TEMA nr. 1 (28.02.2012)

Aplicația 1. (1 punct)

Să se determine unitatea de măsură a coeficientului de frecare λ din ecuația lui Fanning:

$$\Delta P = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho \quad (1)$$

în care:
L – lungimea conductei;
d – diametrul conductei;
v – viteza fluidului prin conductă;
ρ – densitatea fluidului;
ΔP – căderea de presiune la capetele conductei.

REZOLVARE

Ecuația se pune sub forma:

$$\lambda = 2\frac{\Delta P \cdot d}{L \cdot v^2 \cdot \rho} \quad (2)$$

Dimensional:

$$[\lambda] = \frac{[\Delta P]\cdot[d]}{[L]\cdot[v^2]\cdot[\rho]} \quad (3)$$

$[L]$ = m;
$[d]$ = m;
$[v]$ = m/s;
$[\rho]$ = kg/m^3;
$[\Delta P]$ = Pa = N/m^2 = kg·(m/s^2)/m^2;

Înlocuind în (3) rezultă:

$$[\lambda] = \frac{\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\cdot\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = \frac{\dfrac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^2}}{\dfrac{\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{m}^3}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \textbf{adimensional}$$

Aplicația 2. **(4 puncte)**

Să se găsească grupurile adimensionale ale ecuației criteriale care descrie transferul de căldură de la un fluid newtonian în convecție forțată la peretele interior al unei conducte. Mărimile fizice care intervin în acest fenomen şi îl influențează sunt:

Mărime	Simbol	Formulă dimensională
Coeficient parțial de transfer termic	α	$MT^{-3}\Theta^{-1}$
Capacitate termică masică a fluidului	c_p	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Conductivitate termică a fluidului	λ	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$
Densitatea fluidului	ρ	ML^{-3}
Viscozitatea fluidului	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
Viteza fluidului	v	LT^{-1}
Diametrul conductei	d	L

REZOLVARE

Aplicând **teorema Π (Buckingham)** pentru cazul analizat, rezultă:

$$m = 7\ (\alpha, c_p, \lambda, \rho, \mu, v, d) \quad (1)$$

$$n = 4\ (M, L, T, \Theta) \quad (2)$$

$$i = m - n = 7 - 4 = 3 \quad (3)$$

Rezultă că fenomenul va fi descris de trei grupuri adimensionale (criterii de similitudine), $\boldsymbol{\pi}$:

$$F_1\ (\alpha, c_p, \lambda, \rho, \mu, v, d) = 0 \quad (4)$$

reducându-se la:

$$F_2\ (\boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3}) = \text{constant} \quad (5)$$

Pentru aplicarea algoritmului teoremei Π, se aleg ca mărimi comune: λ, ρ, v, d, mărimi care conțin – cel puțin o dată – toate mărimile fundamentale ale problemei: M, L, T, Θ. Se alcătuiesc cele trei grupuri adimensionale $\boldsymbol{\pi}$:

$$\pi_1 = \lambda^{a1} \cdot \rho^{b1} \cdot v^{c1} \cdot d^{d1} \cdot \alpha^{e1} \quad (6)$$

$$\pi_2 = \lambda^{a2} \cdot \rho^{b2} \cdot v^{c2} \cdot d^{d2} \cdot c_p^{\ e2} \quad (7)$$

$$\pi_3 = \lambda^{a3} \cdot \rho^{b3} \cdot v^{c3} \cdot d^{d3} \cdot \mu^{e3} \quad (8)$$

Dimensional:

$$[\pi_1] = \left(MLT^{-3}\Theta^{-1}\right)^{a1} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{b1} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{c1} \cdot (L)^{d1} \cdot \left(MT^{-3}\Theta^{-1}\right)^{e1} \quad (9)$$

sau:

$$[\pi_1] = M^{(a1+b1+e1)} \cdot L^{(a1-3b1+c1+d1)} \cdot T^{(-3a1-c1-3e1)} \cdot \Theta^{(-a1-e1)} \quad (10)$$

Pentru ca $\boldsymbol{\pi_1}$ să fie adimensional, este necesar ca exponenții mărimilor fundamentale M, L, T, Θ să fie nuli, adică:

$$\left.\begin{aligned} & a1 + b1 + e1 = 0 \\ & a1 - 3b1 + c1 + d1 = 0 \\ & -3a1 - c1 - 3e1 = 0 \\ & -a1 - e1 = 0 \end{aligned}\right. \quad (11)$$

Sistemul (11) de 4 ecuații cu 5 necunoscute se rezolvă impunând $e1 = 1$. Se obține:

$$\begin{aligned} a1 &= -1 \\ b1 &= 0 \\ c1 &= 0 \\ d1 &= 1 \\ e1 &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Înlocuind (12) în (6) rezultă:

$$\pi_1 = \lambda^{-1} \cdot \rho^0 \cdot v^0 \cdot d^1 \cdot \alpha^1 = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = \text{Nu - criteriul lui Nusselt} \quad (13)$$

În mod analog,

$$[\pi_2] = \left(MLT^{-3}\Theta^{-1}\right)^{a2} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{b2} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{c2} \cdot (L)^{d2} \cdot \left(L^2T^{-2}\Theta^{-1}\right)^{e2} \quad (14)$$

sau:

$$[\pi_2] = M^{a2+b2} \cdot L^{a2-3b2+c2+d2+2e2} \cdot T^{-3a2-c2-2e2} \cdot \Theta^{-a2-e2} \quad (15)$$

Pentru ca $\boldsymbol{\pi_2}$ să fie adimensional, este necesar ca exponenții mărimilor fundamentale M, L, T, Θ să fie nuli, adică:

$$\begin{aligned} & a2 + b2 = 0 \\ & a2 - 3b2 + c2 + d2 + 2e2 = 0 \\ & -3a2 - c2 - 2e2 = 0 \\ & -a2 - e2 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Sistemul (16) de 4 ecuații cu 5 necunoscute se rezolvă impunând *e*2 = 1. Se obține:

$$\begin{aligned} a2 &= -1 \\ b2 &= 1 \\ c2 &= 1 \\ d2 &= 1 \\ e2 &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

Înlocuind (17) în (7) rezultă:

$$\pi_2 = \lambda^{-1} \cdot \rho^1 \cdot v^1 \cdot d^1 \cdot c_p^1 = \frac{\rho \cdot c_p \cdot v \cdot d}{\lambda} = \text{Pe - criteriul lui Peclet} \quad (18)$$

La fel:

$$[\pi_3] = \left(MLT^{-3}\Theta^{-1}\right)^{a3} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{b3} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{c3} \cdot (L)^{d3} \cdot \left(ML^{-1}T^{-1}\right)^{e3} \quad (19)$$

sau:

$$[\pi_3] = M^{a3+b3+e3} \cdot L^{a3-3b3+c3+d3-e3} \cdot T^{-3a3-c3-e3} \cdot \Theta^{-a3} \quad (20)$$

Pentru ca $\boldsymbol{\pi_3}$ să fie adimensional, este necesar ca exponenții mărimilor fundamentale M, L, T, Θ să fie nuli, adică:

$$\begin{aligned} & a3 + b3 + e3 = 0 \\ & a3 - 3b3 + c3 + d3 - e3 = 0 \\ & -3a3 - c3 - e3 = 0 \\ & -a3 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (21) în raport cu *e*3 rezultă:

$$\begin{aligned} a3 &= 0 \\ b3 &= -e3 \\ c3 &= -e3 \\ d3 &= e3 \end{aligned} \quad (22)$$

Impunând pentru $e3$ valoarea arbitrară +1, ecuațiile (22) devin:

$$\begin{aligned} a3 &= 0 \\ b3 &= -1 \\ c3 &= -1 \\ d3 &= -1 \\ e3 &= 1 \end{aligned} \quad (23)$$

Înlocuind (23) în (8), rezultă expresia criteriului $\boldsymbol{\pi_3}$:

$$\pi_3 = \lambda^0 \cdot \rho^{-1} \cdot v^{-1} \cdot d^{-1} \cdot \mu^1 = \frac{\mu}{\rho \cdot v \cdot d} = \frac{1}{\mathrm{Re}} = \mathrm{Re}^{-1} - \text{criteriul lui Reynolds} \quad (24)$$

Ecuația (5) se poate scrie acum:

$$F_2\,(\boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}, \boldsymbol{\pi_3}) = F_2\,(\mathbf{Nu}, \mathbf{Pe}, \mathbf{Re}) = \text{constant} \quad (25)$$

În practică se preferă înlocuirea criteriului **Péclet** cu un alt criteriu, criteriul lui **Prandtl**, care conține numai proprietățile fluidului: c_p, λ, μ. Pentru aceasta se face raportul între criteriile **Péclet** și **Reynolds**:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\dfrac{\rho \cdot c_p \cdot v \cdot d}{\lambda}}{\dfrac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}} = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda} \quad (26)$$

În concluzie, transferul de căldură de la un fluid newtonian în convecție forțată la peretele interior al unei conducte este descris de criteriile de similitudine:

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \text{ - criteriul lui Nusselt}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda} \text{ - criteriul lui Prandtl}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu} \text{ - criteriul lui Reynolds}$$

Aplicația 3. **(4 puncte)**

Să se deducă forma ecuației criteriale care descrie transferul de masă prin convecție forțată, pornind de la ecuația diferențială a difuziunii:

$$\left[v_x\frac{\partial C}{\partial x}+v_y\frac{\partial C}{\partial y}+v_z\frac{\partial C}{\partial z}\right]+D\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right]+\frac{\partial C}{\partial t}=0 \quad (1)$$

în care:

C – concentrația speciei transferate (mol/m^3);
D – coeficientul de difuziune al speciei transferate (m^2/s);
v – viteza fluidului (m/s);
t – timpul (s).

REZOLVARE

Ecuația diferențială (1) se poate scrie sub forma ecuației diferențiale generalizate (omițând semnele de diferențiere şi constantele numerice adimensionale):

$$\left[\frac{v\cdot C}{l}\right]+\left[\frac{D\cdot C}{l^2}\right]+\left[\frac{C}{t}\right]=0 \quad (2)$$

Al treilea termen al ecuației reprezintă cantitatea de substanță acumulată în unitatea de timp. Acest termen se mai poate scrie sub forma:

$$\left[\frac{C}{t}\right]=\left[\frac{k\cdot C}{l}\right] \quad (3)$$

în care k este un coeficient individual (parțial) de transfer de masă, exprimat în m/s. Cu această substituție, ecuația (2) devine:

$$\left[\frac{v\cdot C}{l}\right]+\left[\frac{D\cdot C}{l^2}\right]+\left[\frac{k\cdot C}{l}\right]=0 \quad (4)$$

Raportul dintre termenul al treilea şi termenul al doilea reprezintă raportul dintre fluxul total de substanță şi fluxul de substanță transferat prin mecanism molecular:

$$\frac{\text{Flux total de substanta}}{\text{Flux transferat prin mecanism molecular}}=\frac{\frac{k\cdot C}{l}}{\frac{D\cdot C}{l^2}}=\frac{k\cdot C}{l}\cdot\frac{l^2}{D\cdot C}=\frac{k\cdot l}{D}=\mathrm{Sh} \quad (5)$$

Acesta este **criteriul lui Sherwood** (analog cu **criteriul lui Nusselt** din transferul de căldură).

Raportul dintre primul termen şi al doilea termen reprezintă raportul dintre fluxul de substanță transferat prin mecanism convectiv şi fluxul de substanță transferat prin mecanism molecular:

$$\frac{\text{Flux transferat prin mecanism convectiv}}{\text{Flux transferat prin mecanism molecular}}=\frac{\frac{v\cdot C}{l}}{\frac{D\cdot C}{l^2}}=\frac{v\cdot C}{l}\cdot\frac{l^2}{D\cdot C}=\frac{v\cdot l}{D}=\mathrm{Pe_D} \quad (6)$$

Acest raport este cunoscut ca fiind **criteriul Péclet difuzional**, analog criteriului **Péclet** din transferul termic. Produsul $v\times l$ din expresia criteriului **Péclet difuzional** se poate elimina prin împărțire la criteriul **Reynolds**:

$$\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{v \cdot l}{D} \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot v \cdot l} = \frac{\mu}{\rho \cdot D} = \frac{\upsilon}{D} = \mathrm{Sc} \quad (7)$$

Se obţine în acest mod **criteriul lui Schmidt**, cunoscut şi sub denumirea de criteriul **Prandtl difuzional** (**$\mathbf{Pr_D}$**) prin analogie cu criteriul **Prandtl** din transferul de căldură. Ca şi **Pr**, **Sc** este funcţie numai de proprietăţile fluidului: viscozitate dinamică (μ), densitate (ρ), coeficient de difuziune (D), respectiv viscozitate cinematică (υ) şi coeficient de difuziune (D).

Ecuaţia criterială care descrie transferul de masă prin convecţie forţată se va scrie sub forma:

$$\mathbf{Sh} = F\,(\mathbf{Re}, \mathbf{Sc}) \quad (8)$$