

Lucian Gavrilă

**FENOMENE
DE
TRANSFER**

Vol. I

TRANSFER DE IMPULS

**Editura ALMA MATER
Bacău 2000**

Copyright © 1999 Lucian Gavrilă

Toate drepturile rezervate. Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă sau transmisă sub nici o formă și prin nici un fel de mijloc – electronic sau mecanic – inclusiv prin fotocopiere, înregistrare magnetică sau prin alt sistem de stocare și redare a informației, fără permisiunea scrisă a deținătorului de Copyright.

Referenți științifici:

- Prof. dr. ing. **STELIAN PETRESCU**, Facultatea de Chimie Industrială, Universitatea Tehnică “Gh. Asachi” Iași
- Prof. dr. ing. **ABDELKRIM AZZOUZ**, Facultatea de Inginerie, Universitatea Bacău

Lucrarea “**FENOMENE DE TRANSFER**” a fost discutată și avizată în cadrul Catedrei de Chimia și Tehnologia Produselor Alimentare – Facultatea de Inginerie, Universitatea Bacău.

Tehnoredactare computerizată, grafica și coperta:
Lucian Gavrilă

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale

GAVRILĂ LUCIAN

Fenomene de transfer/Lucian Gavrilă.-Bacău: Alma Mater, 2000-

3 vol.: cm. 18,2 x 25,7

ISBN 973-99487-6-6

Vol. I; Transfer de impuls.-2000,-p.151.- bibliogr.-

ISBN 973-99487-7-4

CZU 532.5

ISBN 973-99487-6-6 (Fenomene de transfer vol. I-III)

ISBN 973-99487-7-4 (Fenomene de transfer vol. I: Transfer de impuls)

CUVÂNT ÎNAINTE

Lucrarea de față, prevăzută să apară în trei volume, are la bază prelegerile din cadrul cursului de **FENOMENE DE TRANSFER** predat studenților din anul III ingineri, cursuri de zi, specializarea Tehnologia și Controlul Calității Produselor Alimentare.

Disciplina **FENOMENE DE TRANSFER** a fost introdusă în planul de învățământ al specializării TCCPA cu scopul de a “pregăti terenul” pentru disciplinele care asigură viitorilor specialiști din industria alimentară aprofundarea cunoștințelor în domeniul ingineriei proceselor fizice, chimice și biochimice.

Plasat temporal după studiul calculului diferențial și integral, al fizicii și al chimiei fizice, și înainte de studiul operațiilor unitare, aparatelor, utilajelor și tehnologiilor din industria alimentară, cursul de **FENOMENE DE TRANSFER** reprezintă primul contact pe care studenții îl au cu ingineria chimică (ne place sau nu, inginerul de industrie alimentară este și va rămâne probabil, un inginer chimist specializat în domeniul cercetării, conceperii, producerii, prelucrării, dezvoltării și optimizării produselor alimentare).

Acest curs are rolul de a introduce noțiunile de bază referitoare la transferul și transportul de proprietate: impuls (moment, cantitate de mișcare), energie (căldură), masă. Abordarea într-o concepție unitară a fenomenelor de transfer permite ulterior un studiu sistematic al operațiilor unitare din industria alimentară și al proceselor de transformare, chimice sau biochimice, suferite de materiile prime în procesele tehnologice de prelucrare până la produse alimentare sau conexe.



Lucrarea a fost structurată în trei volume:



Volumul I conține noțiunile de bază referitoare la analiza dimensională și teoria similitudinii precum și problematica transferului de impuls: noțiuni de reologie, tipuri de fluide, statica și dinamica fluidelor, curgeri în sisteme omogene și eterogene.



Volumul II tratează problemele legate de transferul termic, transferul de masă, precum și analogia dintre fenomenele de transfer. În final se fac o serie de referiri la posibilitățile de intensificare a proceselor de transfer.



Volumul III vine în completarea primelor două cu o selecție de aplicații practice, parte rezolvate integral, parte propuse ca exercițiu pentru seminarii și pregătirea individuală a studenților. Aplicațiile practice completează și aprofundează latura teoretică a expunerii, rezolvarea lor familiarizându-i pe studenți cu calculele de ingineria proceselor fizice și chimice.



Având în vedere publicul căruia îi este destinată lucrarea, s-au accentuat o serie de subiecte (proprietăți reologice ale corpurilor, fluide nenenewtoniene și comportarea specifică a acestora în curgere și în procesele de transfer de căldură și de masă), în detrimentul unor subiecte de interes mai restrâns. Nefiind vorba despre o lucrare de cercetare științifică, citarea în text a surselor bibliografice primare a fost intenționat neglijată, preferându-se enumerarea, la sfârșitul fiecărui capitol, a unor lucrări de referință pe baza cărora se poate aprofunda tematica abordată în respectivul capitol.

Deși este dedicată în primul rând studenților care se specializează în ingineria produselor alimentare, lucrarea este utilă și studenților de la alte specializări din domeniul ingineriei chimice și biochimice, precum și studenților de la secțiile de utilaj tehnologic în industrii de proces.

Convins fiind de imperfecțiunea lucrării, dar și de faptul că o ediție ulterioară ar putea fi mult îmbunătățită, autorul rămâne deschis oricăror sugestii referitoare la subiectele abordate și la modul de tratare al acestora.

Septembrie 1999, Bacău

dr. ing. Lucian Gavrila

CUPRINS

1.	INTRODUCERE	1
2.	SIMILITUDINE ȘI ANALIZĂ DIMENSIONALĂ	6
2.1.	Verificarea ecuațiilor pe baza omogenității dimensionale	6
2.2.	Stabilirea formei generale a ecuațiilor	7
2.3.	Teorema π a lui Buckingham	9
2.4.	Deducerea ecuațiilor criteriale din ecuațiile diferențiale ale fenomenelor	12
2.5.	Similitudine și modele	15
2.6.	Criterii de similitudine	16
2.7.	Ecuații criteriale	17
2.8.	Modele. Similitudine completă și parțială	17
2.9.	Avantaje și limitări în utilizarea criteriilor de similitudine	20
2.10.	Bibliografie recomandată pentru aprofundare	21
3.	TRANSFERUL DE IMPULS	22
3.1.	Noțiuni generale despre fluide. Elemente de reologie	22
3.1.1.	Proprietăți reologice fundamentale	23
3.1.2.	Tipuri de solicitări. Parametrii solicitării	24
3.1.3.	Corpuri cu proprietăți unitare și comportare ideală	27
3.1.3.1.	Solidul lui Hooke	27
3.1.3.2.	Fluidul lui Newton	28
3.1.3.3.	Plasticul lui St. Venant	30
3.1.4.	Fluide cu comportare nenenewtoniană	33
3.1.4.1.	Clasificarea fluidelor nenenewtoniene	34
3.1.4.2.	Fluide viscoase nenenewtoniene	35
3.1.4.3.	Fluide viscoelastice	38
3.1.4.4.	Fluide viscoplastice	39
3.1.5.	Reprezentarea generalizată a comportării reologice a fluidelor	42
3.2.	Statica fluidelor	44
3.2.1.	Forțe care acționează în fluide	44
3.2.1.1.	Forțe de masă	44
3.2.1.2.	Forțe de suprafață	44
3.2.2.	Presiunea statică	45
3.2.3.	Ecuația fundamentală a staticii fluidelor	47
3.2.4.	Fluide în echilibru absolut	49
3.2.4.1.	Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional	49
3.2.4.2.	Principiul lui Arhimede. Forța de plutire	50
3.2.5.	Fluide în echilibru relativ	51

3.2.5.1.	Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional	51
3.2.5.2.	Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mișcare de rotație uniformă	52
3.2.6.	Forțe de presiune hidrostatică	55
3.3.	Dinamica fluidelor	58
3.3.1.	Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor	58
3.3.2.	Clasificarea mișcării fluidelor	61
3.3.3.	Stratul limită	65
3.3.4.	Ecuatii de conservare în curgerea fluidelor	68
3.3.4.1.	Ecuatiile de conservare a masei	68
3.3.4.2.	Ecuatiile de conservare a impulsului	71
3.3.4.3.	Ecuatiile de conservare a energiei	75
3.4.	Curgerea în sisteme omogene	78
3.4.1.	Frecarea și căderea de presiune	78
3.4.1.1.	Coeficientul căderii de presiune prin frecare	80
3.4.1.2.	Coeficientul căderii de presiune prin rezistențe locale	84
3.4.1.3.	Curgerea fluidelor compresibile	86
3.4.2.	Curgerea prin conducte	89
3.4.2.1.	Curgerea fluidelor newtoniene	89
3.4.2.2.	Curgerea fluidelor nenewtoniene	93
3.4.3.	Curgerea cu suprafață liberă	97
3.4.3.1.	Curgerea prin canale	98
3.4.3.2.	Curgerea peliculară	100
3.4.4.	Curgerea prin orificii, ajutaje, baraje, deversoare, preaplinuri	103
3.4.4.1.	Orificii	103
3.4.4.2.	Ajutaje	105
3.4.4.3.	Baraje	106
3.4.4.4.	Deversoare	108
3.5.	Curgerea în sisteme eterogene	108
3.5.1.	Curgerea bifazică sub presiune	109
3.5.2.	Curgerea peste corpuri solide	112
3.5.2.1.	Curgerea unui fluid peste corpuri solide imersate	112
3.5.2.2.	Mișcarea particulelor solide printr-un fluid	114
3.5.3.	Curgerea prin straturi granulare și umpluturi	120
3.5.3.1.	Umpluturi și corpuri de umplere	120
3.5.3.2.	Proprietățile sistemelor granulare	126
3.5.3.3.	Straturi granulare străbătute de un singur fluid	130
3.5.3.4.	Straturi granulare străbătute de două fluide	137
3.5.4.	Curgerea peste fascicule de țevi	140
3.6.	Bibliografie recomandată pentru aprofundare	144

1. INTRODUCERE

Industriile de proces (industria chimică, industria petrochimică, industria metalurgică, industria alimentară, industria farmaceutică, industria celulozei și hârtiei, etc.) sunt industrii bazate pe **proces tehnologic** în urma cărora materiile prime (naturale, artificiale sau sintetice) sunt transformate, printr-o succesiune de procese mecanice, fizice, chimice și biochimice, în produse finite comercializabile sau în semifabricate utilizate drept materii prime în alte ramuri prelucrătoare. Un proces tehnologic, oricât de complex, poate fi descompus într-o succesiune de procese componente distincte, în care materialele intrate suferă modificări de formă și/sau dimensiuni (proces mecanice), de presiune, temperatură, concentrație, stare de agregare (proces fizice), sau de specii moleculare (proces chimice și biochimice). Procesele mecanice, fizice, chimice (biochimice) componente au loc în utilaje denumite respectiv mașini, aparate, reactoare (bioreactoare). Ordonarea liniară reprezentată grafic sau numai mental, a proceselor (operațiilor) de la intrarea în sistem a materiilor prime și până la ieșirea din sistem a produselor finite poartă denumirea de **flux tehnologic**. Reprezentarea grafică a proceselor care alcătuiesc fluxul tehnologic poartă denumirea de **schemă tehnologică (schemă bloc)** a procesului tehnologic.

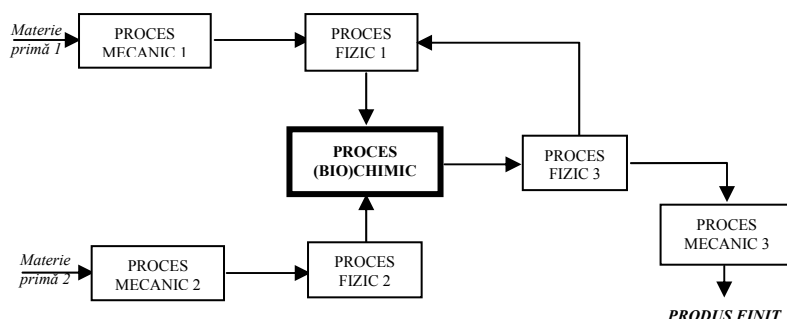


Fig. 1.1. Schema bloc a unui proces tehnologic

Aceasta (fig. 1.1) are la bază principiul cutiei negre, fiecare proces fiind reprezentat printr-un dreptunghi în care intră și din care ies fluxuri de materiale și/sau energie. Dacă în locul proceselor componente sunt schițate utilajele cu care se realizează operațiile procesului tehnologic, se obține **schema instalației** sau **schita tehnologică** a instalației. În aceasta, utilajele sunt reprezentate fie prin simboluri convenționale (fig. 1.2), fie prin forma lor caracteristică simplificată. Nu există reguli generale pentru alcătuirea unei schițe tehnologice: în unele cazuri se preferă schițe simple, în altele, dimpotrivă, schița trebuie să fie cât mai completă, conținând și valorile

FENOMENE DE TRANSFER

prescrise ale **parametrilor tehnologici** principali (debite, concentrații, temperaturi, presiuni), respectiv **regimul tehnologic** al instalației schițate.

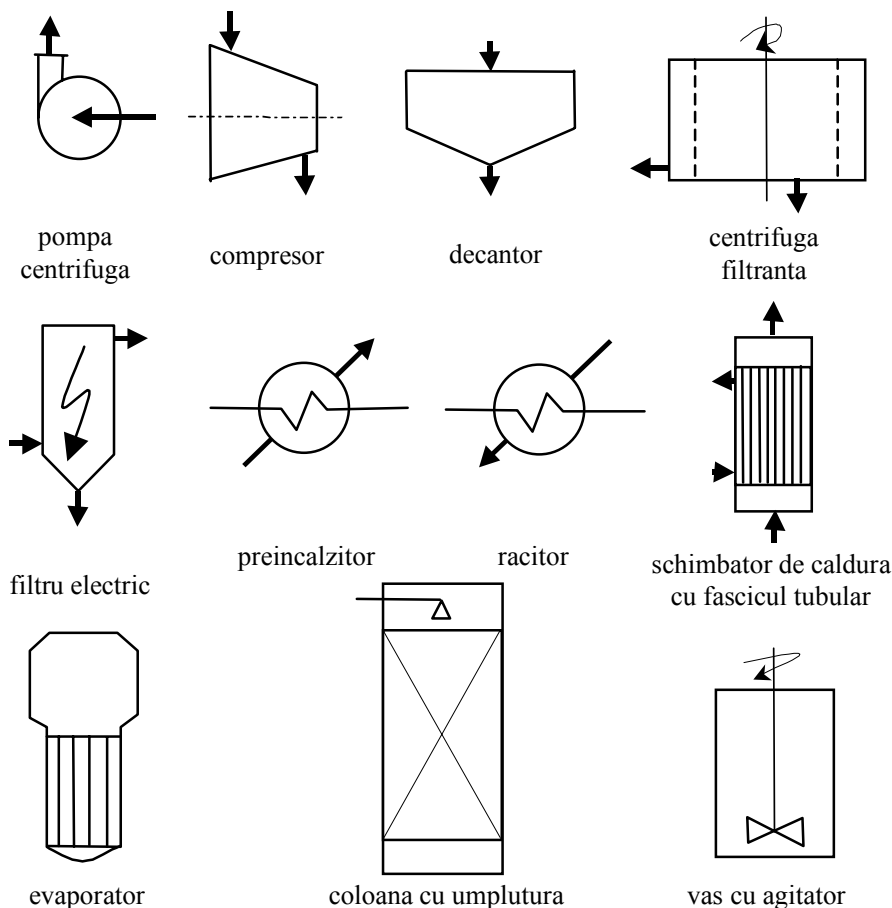


Fig. 1.2. Simboluri convenționale utilizate în schițele tehnologice

În fig. 1.3. este redată schema bloc a procesului de obținere a concentratelor proteice din zer, iar în fig. 1.4 este redată schema instalației de obținere a proteinelor din zer prin procedeul Centri-Whey (Alfa-Laval).

Analizând schemele din fig. 1.3 și 1.4, se pot observa următoarele: într-un proces tehnologic există relativ puține procese chimice (biochimice) majoritatea proceselor fiind de natură fizică sau mecanică; puține operații sunt strict specifice unui anumit proces tehnologic (*ex: tăierea tăișelor de sfeclă la fabricarea zahărului*);

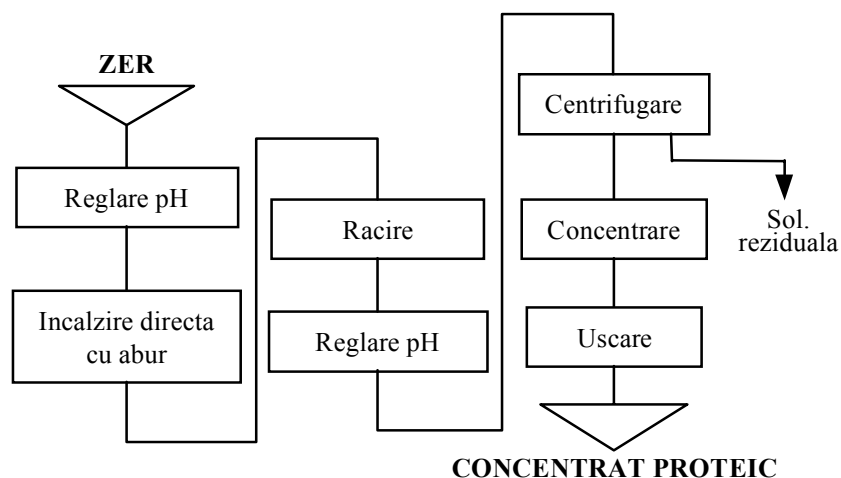
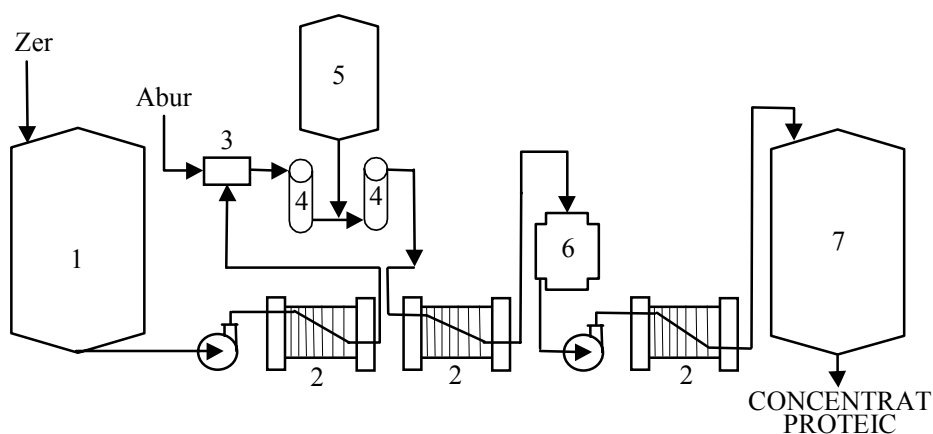


Fig. 1.3. Schema bloc a procesului de obținere a concentratelor proteice din zer



1 - rezervor intermediar; 2 - schimbator de caldura cu placi; 3 - injector; 4 - celula tubulara de mentinere; 5 - rezervor de acid; 6 - clarificator centrifugal; 7 - rezervor

Fig. 1.4. Schema instalației de obținere a proteinelor din zer prin procedeul Centri-Whey (Alfa-Laval)

marea majoritate a proceselor fizice și mecanice sunt comune multor procese tehnologice asemănătoare sau total diferite (ex: filtrarea, centrifugarea, concentrarea, uscarea, etc. Întâlnim procesul de concentrare prin evaporare atât în procesul de fabricare a zahărului dar și în tehnologia fabricării acidului fosforic, a unor îngrășăminte minerale (azotat de amoniu, uree) în procesele de recuperare a sulfatului de amoniu de la fabricarea caprolactamei, în procesele de

FENOMENE DE TRANSFER

regenerare a leșiilor reziduale de la fabricarea celulozei, în unele procese hidrometalurgice, la fabricarea hidroxidului de sodiu, în tehnologia sărurilor minerale, în fabricarea medicamentelor etc.); există puține utilaje specifice unui singur proces tehnologic (ex: tăietoare de sfeclă, cojitoare de lemn), majoritatea utilajelor intrând în componența instalațiilor multor procese tehnologice (ex: filtre, evaporatoare, schimbătoare de căldură, uscătoare, coloane de distilare, etc.).

Cele câteva zeci de **operații unitare** care alcătuiesc marea majoritate a fazelor proceselor tehnologice din industriile de proces au la bază trei **processe fundamentale** principale: transferul de impuls (moment, cantitate de mișcare), transferul de căldură (de energie termică), transferul de masă (cantitate de substanță). Pe lângă acestea, într-un proces tehnologic există și o serie de operații de natură mecanică: depozitarea și transportul materialelor solide, dozarea materialelor granulare, mărunțirea și clasarea (cernerea) materialelor solide. Principalele operații unitare grupate pe criteriul proceselor fundamentale, sunt redată în fig. 1.5.

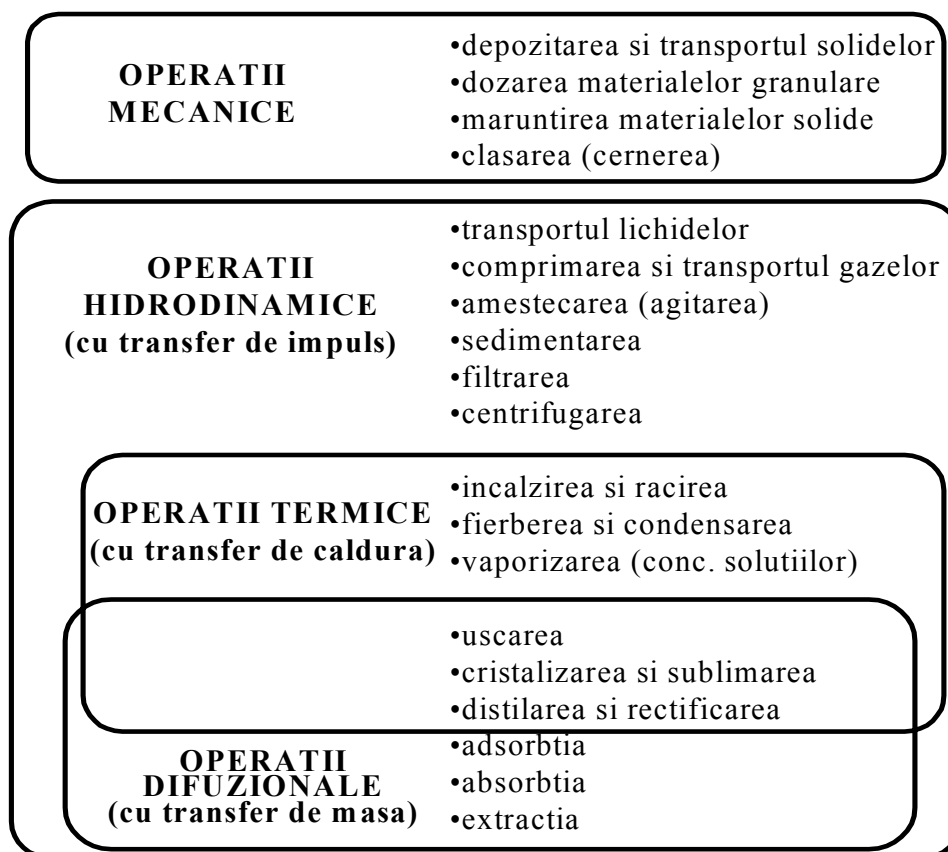


Fig. 1.5. Clasificarea operațiilor unitare

INTRODUCERE

După cum se observă multe operații unitare sunt manifestări ale mai multor procese fundamentale. În majoritatea cazurilor unul din aceste procese fundamentale este dominant; principiul dominant se poate schimba în condițiile cazurilor concrete.

Studiul operațiilor unitare a evoluat către forme superioare de sistematizare și sinteză: în locul studierii celor câteva zeci de operații unitare se studiază cele trei procese fundamentale de transfer, insistându-se asupra mecanismului acestora, asupra fenomenelor din stratul limită, asupra înțelegerii mai profunde a cauzelor și efectelor primare care motivează și explică particularitățile și utilitatea fiecărei operații unitare.

La ora actuală, tendința este de a îngloba toate fenomenele de transfer într-o concepție unitară a **fenomenului general de transport**. Această tendință este justificată prin analogia formală (asemănarea structurală a ecuațiilor diferențiale care le descriu) între procesele fundamentale.

2. SIMILITUDINE ȘI ANALIZĂ DIMENSIONALĂ

Analiza dimensională este ansamblul de cunoștințe și metode pentru tratarea unor probleme de inginerie de proces, utilizând formulele dimensionale ale mărimilor fizice. Principalele aplicații ale analizei dimensionale sunt: convertirea unităților de măsură dintr-un sistem în altul, verificarea ecuațiilor pe baza omogenității dimensionale, stabilirea formei generale a ecuațiilor.

2.1. VERIFICAREA ECUAȚIILOR PE BAZA OMOGENITĂȚII DIMENSIONALE

Analiza dimensională se bazează pe principiul conform căruia orice ecuație sau relație între variabile trebuie să fie **dimensional consistentă** (fiecare termen al ecuației trebuie să aibă aceleași dimensiuni). Dacă, de exemplu, o ecuație constă dintr-un număr de termeni, fiecare reprezentând lungimi, toți acești termeni vor trebui să aibă dimensiunile unei lungimi. Nu este permisă adunarea lungimilor cu, să zicem, viteze. Corolarul acestui principiu este că dacă întreaga ecuație este împărțită la oricare din termenii săi, toți termenii rămași în ecuație vor trebui să fie adimensionali. Utilizarea **grupurilor** sau **numerelor adimensionale** este de o importanță deosebită în tratarea problemelor ingineriei de proces.

Deoarece ecuațiile fizice trebuie să fie valabile în orice sistem coerent de unități de măsură, verificarea lor dimensională poate fi făcută în orice sistem coerent de unități de măsură.

Exemplu

Să se găsească unitatea de măsură în SI a coeficientului global de transfer de căldură, K .

Fluxul termic transferat în regim staționar între două fluide despărțite printr-un perete este dat de relația:

$$Q = K \cdot A \cdot \Delta T_m$$

Semnificațiile notațiilor și unităților de măsură (în SI) sunt:

- Q - cantitatea de căldură transferată, J/s;
- A - aria suprafeței de transfer de căldură, m^2 ;
- ΔT_m - potențialul mediu al transferului termic, K (kelvini);
- K - coeficientul global de transfer de căldură, ?.

Pentru ca ecuația să fie dimensional consistentă, trebuie ca produsul $KA\Delta T_m$ să aibă dimensiunile unui flux termic (J/s), deci:

$$[K] = \left[\frac{Q}{A \cdot \Delta T_m} \right] = \left[\frac{J/s}{m^2 \cdot K} \right] = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

Coeficientul global de transfer termic se va exprima, în SI, în $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

Aplicația 2.1.

Să se determine unitatea de măsură SI a presiunii hidrostatice.

Aplicația 2.2.

Să se determine unitatea de măsură a coeficientului de frecare λ din ecuația lui Fanning:

$$\Delta P = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho$$

ecuație care redă expresia pierderilor de presiune prin frecare, ΔP , la curgerea unui fluid de densitate ρ și având viteza medie v printr-o conductă de diametru d și lungime L .

2.2. STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUAȚIILOR

Forma generală a unei ecuații fizice poate fi stabilită fie pe cale teoretică, prin aplicarea legilor de bază ale fizicii și chimiei și a aparatului matematic în studierea unui proces sau fenomen, fie pe cale experimentală în cazul studierii unor fenomene complexe sau în cazul obținerii unor relații sau legi mai generale. Analiza dimensională este o metodă intermediară între metoda teoretică și cea experimentală cu ajutorul căreia pot fi stabilite corelațiile dintre mărimile care caracterizează un fenomen sau proces în termeni de numere sau grupuri adimensionale.

Utilizarea analizei dimensionale în stabilirea formei ecuațiilor fizice este posibilă datorită celor două proprietăți de bază ale acestora: consistența (omogenitatea) dimensională și invarianța formei lor la trecerea dintr-un sistem (coerent) de unități de măsură în alt sistem (coerent) de unități de măsură. Este astfel posibilă organizarea mai multor mărimi care intervin într-o ecuație fizică într-un număr restrâns de grupuri (numere) adimensionale, valorile numerice ale acestor grupuri, în orice situație dată fiind independent de sistemul de unități de măsură utilizat (cu condiția folosirii unui sistem coerent).

Aplicarea analizei dimensionale poate fi înțeleasă mai ușor dacă luăm în considerare următorul

Exemplu

S-a constatat experimental că diferența (căderea) de presiune, ΔP , între extremitățile unei conducte prin care curge un fluid este o funcție de diametrul conductei, d , lungimea conductei, l , viteza fluidului, v , densitatea fluidului, ρ și viscozitatea fluidului, μ . Ecuația căderii de presiune se poate scrie:

$$\Delta P = f_1(d, l, v, \rho, \mu) \quad (2.1)$$

Forma funcției este necunoscută dar întrucât orice funcție poate fi dezvoltată într-o serie de puteri, funcția poate fi privită ca suma unui număr de termeni, fiecare constând din produsul puterilor variabilelor luate în considerare. Cea mai simplă formă a unei astfel de relații va fi aceea în care se ia în considerare numai primul termen al seriei de puteri:

$$\Delta P = \text{const} \cdot d^{n_1} \cdot l^{n_2} \cdot v^{n_3} \cdot \rho^{n_4} \cdot \mu^{n_5} \quad (2.2)$$

Pentru ca ecuația (2.2) să fie dimensional consistentă este necesar ca termenul din membrul drept să aibă aceleași dimensiuni ca și termenul din membrul stâng, deci va trebui să aibă dimensiunile unei presiuni.

Fiecare variabilă din ecuația (2.2) poate fi exprimată în termeni de masă (M) lungime (L) și timp (T). Dimensional:

$$\begin{aligned} \Delta P &\equiv M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} & d &\equiv L & l &\equiv L \\ v &\equiv L \cdot T^{-1} & \rho &\equiv M \cdot L^{-3} & \mu &\equiv M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \end{aligned}$$

și: $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \equiv L^{n_1} \cdot L^{n_2} \cdot (L \cdot T^{-1})^{n_3} \cdot (M \cdot L^{-3})^{n_4} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^{n_5}$

Condiția consistenței dimensionale trebuie să fie îndeplinită și de către fiecare din variabilele fundamentale masă, lungime timp:

pentru M: $+1 = n_4 + n_5$

pentru L: $-1 = n_1 + n_2 + n_3 - 3n_4 - n_5$

pentru T: $-2 = -n_3 - n_5$

Sistemul de 3 ecuații cu 5 necunoscute ($n_1 \dots n_5$) poate fi rezolvat în funcție de oricare 2 din cele 5 necunoscute. Rezolvând în funcție de n_2 și n_5 obținem:

$$n_4 = 1 - n_5 \quad (\text{din ecuația în M})$$

$$n_3 = 2 - n_5 \quad (\text{din ecuația în T})$$

Substituind expresiile lui n_3 și n_4 în ecuația în L obținem:

$$-1 = n_1 + n_2 + (2 - n_5) - 3(1 - n_5) - n_5$$

sau: $0 = n_1 + n_2 + n_5$

sau: $n_1 = -n_2 - n_5$

Revenind și efectuând acum substituirile în ecuația (2.2) obținem:

$$\Delta P = \text{const} \cdot d^{-n_2-n_5} \cdot l^{n_2} \cdot v^{2-n_5} \cdot \rho^{1-n_5} \cdot \mu^{n_5}$$

sau:
$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = \text{const} \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho v d}\right)^{n_5} \quad (2.3)$$

Întrucât n_2 și n_5 sunt constante arbitrare, ecuația (2.3) poate fi satisfăcută numai dacă termenii $\Delta P/(\rho v^2)$, l/d și $\mu/(\rho v d)$ sunt adimensionali. Pentru verificare se recomandă să se evalueze dimensiunile fiecăruia dintre grupurile de mai sus și să se constate adimensionalitatea acestora.

Grupul $v d \rho / \mu$, cunoscut ca **numărul Reynolds**, este unul dintre cele mai frecvente în studiul curgerii fluidelor. Pe baza sa se poate aprecia tipul de curgere într-un spațiu de geometrie dată.

În termeni mai generali, ecuația (2.3) poate fi scrisă:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = f_2\left(\frac{l}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}\right) \quad (2.4)$$

Comparând ecuațiile (2.1) și (2.4) se constată că o relație între 6 variabile a fost redusă la o relație între doar 3 grupuri adimensionale.

2.3. TEOREMA π A LUI BUCKINGHAM

Această teoremă reprezintă o generalizare a exemplului prezentat anterior enunțându-se astfel: “O relație fizică în care intervin m mărimi și constante dimensionale poate fi exprimată ca o relație între $i = m - n$ grupuri adimensionale, unde n reprezintă numărul de unități fundamentale ale sistemului de unități de măsură utilizat.”

În acest fel, o ecuație fizică de tipul:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (2.5)$$

se reduce la o ecuație de tipul:

$$f_2(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i) = 0 \quad (2.6)$$

unde fiecare grup (număr) adimensional π depinde de maximum $(n+1)$ mărimi și constante dimensionale. Numărul grupurilor adimensionale π este egal cu $(m-n)$, adică cu diferența dintre numărul m de mărimi fizice plus constante dimensionale care intervin în desfășurarea fenomenului, și numărul n de mărimi fundamentale implicate în unitățile celor m mărimi fizice și constante dimensionale:

$n = 3$ pentru fenomene mecanice (lungime, masă, timp);

$n = 4$ pentru fenomene termice (lungime, masă, timp, temperatură);

$n = 4$ pentru fenomene electrice (lungime, masă, timp, intensitatea curentului electric);

$n = 5$ pentru fenomene termoelectrice (lungime, masă, timp, temperatură intensitatea curentului electric).

FENOMENE DE TRANSFER

Pentru găsirea funcției căutate, teorema π se aplică în modul următor:

1. Se înșiruiesc toate mărimile fizice și constantele dimensionale care – din considerații mecanice, termodinamice, etc. – se apreciază că influențează fenomenul studiat;
2. Se scrie formula dimensională pentru fiecare dintre mărimile fizice și constantele dimensionale considerate la (1);
3. Se aleg cele n mărimi fundamentale dintre mărimile fizice și constantele dimensionale care intervin în problemă. Alegerea se face în așa fel, încât totalitatea mărimilor și constantelor alese să conțină cel puțin odată toate mărimile fundamentale ale problemei.
4. Se formează grupurile $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_i$, constând fiecare din produsul celor n mărimi alese la (3), plus câte una dintre celelalte mărimi și constante; se asociază câte un exponent arbitrar fiecărei mărimi și constante dimensionale din fiecare grup π .
5. Se determină valoarea acestor exponenți, punând condiția ca fiecare grup π să fie adimensional.

Exemplu

Cu ajutorul teoremei π , să se găsească grupurile adimensionale care intervin în curgerea izotermă a fluidelor. Se apreciază că fenomenul este influențat de mărimile prezentate în tab. 2.1.

Tab. 2.1. Mărimi care influențează curgerea fluidelor

Mărime	Simbol	Formulă dimensională
lungime	l	L
viteza de curgere	v	LT^{-1}
densitatea fluidului	ρ	ML^{-3}
viscozitatea fluidului	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
căderea de presiune	ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
acelerația gravitațională	g	LT^{-2}

Sunt deci $m = 6$ mărimi fizice și constante dimensionale și $n = 3$ mărimi fundamentale (M, L, T). Rezultă $i = m - n = 3$ grupuri adimensionale π . Relația căutată, conform teoremei π , va fi:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \text{const.} \quad (2.7)$$

Pentru grupare, se aleg primele trei mărimi, l, v, ρ ca mărimi comune, la care se adaugă, pe rând, câte una din celelalte, toate afectate de exponenții a_i, b_i, c_i, d_i .

$$\pi_1 = l^{a_1} \cdot v^{b_1} \cdot \rho^{c_1} \cdot g^{d_1} \quad (2.8)$$

Dimensional,

$$[\pi_1] = L^{a_1} \cdot (LT^{-1})^{b_1} \cdot (ML^{-3})^{c_1} \cdot (LT^{-2})^{d_1} = M^{c_1} \cdot L^{(a_1+b_1-3c_1+d_1)} \cdot T^{(-b_1-2d_1)} \quad (2.9)$$

Pentru ca π_1 să fie adimensional, este necesar ca exponenții mărimilor fundamentale M, L, T să fie nuli, deci:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 - 3c_1 + d_1 = 0 \\ -b_1 - 2d_1 = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Sistemul (2.10) de 3 ecuații cu 4 necunoscute se rezolvă în raport cu d_1 , considerat egal cu unitatea. Se obține: $a_1 = 1$; $b_1 = -2$; $c_1 = 0$; $d_1 = 1$. Înlocuind în (2.8) rezultă:

$$\pi_1 = l^1 \cdot v^{-2} \cdot \rho^0 \cdot g^1 = \frac{l \cdot g}{v^2} = \text{Fr} \quad (2.11)$$

Grupul adimensional $(lg)/v^2$ poartă denumirea de **numărul (criteriul) lui Froude**, simbolizat Fr.

În mod similar,

$$\pi_2 = l^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot (\Delta P)^{d_2} \quad (2.12)$$

$$[\pi_2] = M^{(c_2+d_2)} \cdot L^{(a_2+b_2-3c_2-d_2)} \cdot T^{(-b_2-2d_2)} \quad (2.13)$$

Deoarece și π_2 este adimensional, se obține sistemul:

$$\begin{cases} c_2 + d_2 = 0 \\ a_2 + b_2 - 3c_2 - d_2 = 0 \\ -b_2 - 2d_2 = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Impunând $d_2 = 1$, se obține: $a_2 = 0$; $b_2 = 2$; $c_2 = -1$; și relația (2.13) devine:

$$\pi_2 = l^0 \cdot v^2 \cdot \rho^{-1} \cdot (\Delta P) = \frac{\Delta P}{\rho \cdot v^2} = \text{Eu} \quad (2.15)$$

Grupul adimensional $(\Delta P)/\rho v^2$ poartă denumirea de **numărul (criteriul) lui Euler**, cu simbolul Eu.

În mod similar,

$$\pi_3 = l^{a_3} \cdot v^{b_3} \cdot \rho^{c_3} \cdot \mu^{d_3} \quad (2.16)$$

sau dimensional:

$$[\pi_3] = M^{(c_3+d_3)} \cdot L^{(a_3+b_3-3c_3-d_3)} \cdot T^{(-b_3-d_3)} \quad (2.17)$$

Punând condiția de adimensionalitate a lui π_3 se obține sistemul:

$$\begin{cases} a_3 + b_3 - 3c_3 - d_3 = 0 \\ -b_3 - d_3 = 0 \\ -c_3 + d_3 = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Impunând $d_3 = 1$, se obține: $a_3 = -1$; $b_3 = -1$; $c_3 = -1$, iar relația (2.17) devine:

$$\pi_3 = l^{-1} \cdot v^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu = \left(\frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu} \right)^{-1} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (2.19)$$

Grupul adimensional $(\rho v l)/\mu$ poartă denumirea de **numărul (criteriul) lui Reynolds**, cu simbolul Re [vezi și relația (2.4)].

Formula generală a funcției care descrie curgerea fluidelor (depinzând doar de variabilele l, v, ρ, g, μ și ΔP) are forma:

$$f(\text{Fr}, \text{Eu}, \text{Re}) = \text{const} \quad (2.20)$$

Aplicația 2.3.

Să se găsească grupurile adimensionale ale ecuației criteriale pentru transferul termic de la un fluid în convecție forțată la peretele interior al unei conducte. Mărimile fizice care intervin în acest fenomen sunt redată în tab. 2.2.

Tab. 2.2. Mărimi care influențează transferul termic în convecție forțată

Mărimă	Simbol	Formulă dimensională
coeficient parțial de transfer termic	α	$\text{MT}^{-3}\Theta^{-1}$
căldura masică a fluidului	C_p	$\text{L}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}$
densitatea fluidului	ρ	ML^{-3}
conductivitatea termică a fluidului	λ	$\text{MLT}^{-3}\Theta^{-1}$
viscozitatea fluidului	μ	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$
viteza fluidului în conductă	v	LT^{-1}
diametrul conductei	D	L

În cazul în care numărul variabilelor m și al mărimilor fundamentale n este mare, modul de stabilire a grupurilor adimensionale π prezentat anterior devine greoi, din acest motiv căutându-se, de la început, micșorarea numărului de variabile.

În cazul fenomenelor complexe, se poate ajunge la sisteme de ecuații algebrice cum sunt (2.10), (2.14), (2.18), dar cu mult mai multe ecuații și necunoscute. În aceste cazuri, sistemele obținute pot fi rezolvate folosind metoda lui Cramer.

2.4. DEDUCEREA ECUAȚIILOR CRITERIALE DIN ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE FENOMENELOR

În cazul în care se cunoaște ecuația diferențială care descrie un fenomen sau un proces, aceasta poate fi utilizată pentru stabilirea grupurilor adimensionale (criteriilor de similitudine) care descriu fenomenul sau

procesul respectiv. Această metodă este de preferat, întrucât pe de o parte se pune în evidență semnificația fizică a grupurilor adimensionale, iar pe de altă parte se evită dificultățile analizei dimensionale. Deducerea criteriilor de similitudine din ecuațiile diferențiale ale proceselor este deosebit de utilă, întrucât în majoritatea cazurilor aceste ecuații diferențiale nu pot fi soluționate analitic.

Exemplu

Se consideră ecuațiile diferențiale Navier-Stokes care descriu curgerea izotermă a unui fluid newtonian. Întrucât toate cele trei ecuații sunt de aceeași formă, este suficientă considerarea uneia dintre ele, cea pentru direcția x:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] - \rho g_x + \frac{\partial P}{\partial x} - \\ - \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ecuția (2.21) este omogenă, iar fiecare termen al său reprezintă o forță raportată la unitatea de volum. Dacă din ecuație se omit semnele diferențiale și constanta numerică 1/3, se poate scrie **ecuația diferențială generalizată**:

$$\left[\frac{\rho v}{t} \right] + \left[\frac{\rho v^2}{l} \right] - [\rho g] + \left[\frac{\Delta P}{l} \right] - \left[\frac{\mu v}{l^2} \right] = 0 \quad (2.22)$$

I II III IV V, VI

în care l este o mărime liniară. Termenii V și VI sunt identici și din această cauză s-au scris împreună. Termenii I și II sunt echivalenți: înmulțind și împărțind primul termen cu v , rezultă identitatea lor. În consecință, din ecuația (2.22) se pot obține trei grupuri adimensionale independente.

- **Numărul Reynolds** (II/V) reprezintă raportul dintre forțele inerțiale și cele de viscozitate:

$$\frac{II}{V} = \frac{\rho v^2 / l}{\mu v / l^2} = \frac{\rho v l}{\mu} = Re \quad (2.23)$$

- **Numărul Froude** (II/III) reprezintă raportul dintre forțele inerțiale și cele gravitaționale:

$$\frac{II}{III} = \frac{\rho v^2 / l}{\rho g} = \frac{v^2}{l \cdot g} = Fr \quad (2.24)$$

- **Numărul Euler** (IV/II), sau coeficientul de presiune, este raportul dintre presiune și forțele inerțiale:

$$\frac{IV}{II} = \frac{\Delta P / l}{\rho v^2 / l} = \frac{\Delta P}{\rho v^2} = Eu \quad (2.25)$$

FENOMENE DE TRANSFER

Ecuatia criterială se scrie sub forma:

$$f(\text{Re}, \text{Fr}, \text{Eu}) = \text{const} \quad (2.26)$$

identică cu aceea a ecuației (2.20) obținută prin metoda analizei dimensionale.

Aplicația 2.4.

Să se deducă forma ecuației criteriale care descrie transferul de căldură prin convecție forțată, pornind de la ecuația diferențială a energiei:

$$\begin{aligned} \rho c_p \left[v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] - \\ - \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aplicația 2.5.

Să se deducă forma ecuației criteriale care descrie transferul de masă prin convecție forțată, pornind de la ecuația diferențială a difuziunii:

$$\begin{aligned} \left[v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \right] + \\ + D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dezavantajul metodei de stabilire a ecuațiilor criteriale din ecuațiile diferențiale constă în faptul că se neglijează unele variabile care nu apar în ecuația diferențială ele neapărând nici în ecuația criterială.

Aplicația 2.6.

Folosind metoda analizei dimensionale, să se găsească ecuația criterială care descrie curgerea fluidelor, considerând că, pe lângă mărimile prezentate în tab. 2.1, intervine suplimentar asupra fenomenului și tensiunea superficială σ , cu formula dimensională $[\text{MT}^{-2}]$.

Câteva grupuri adimensionale (criterii de similitudine) mai frecvent întâlnite în operațiile unitare caracteristice industriei alimentare și biotehnologiilor sunt redate în tab. 2.3. La ora actuală sunt cunoscute câteva sute de astfel de criterii de similitudine.

Tab. 2.3. Criterii de similitudine uzuale

Criteriul	Expresie	Criteriul	Expresie
Reynolds	$Re = \frac{\rho v l}{\mu}$	Nusselt	$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$
Froude	$Fr = \frac{g l}{v^2}$	Grashof	$Gr = \frac{g l^3}{\nu^3} \cdot \beta \cdot \Delta T$
Euler	$Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$	Sherwood	$Sh = \frac{k l}{D}$
Weber	$We = \frac{\rho_d v^2 l}{\sigma}$	Schmidt	$Sc = \frac{\mu}{\rho D}$
Arhimede	$Ar = \frac{d^3 (\rho_p - \rho_m) \rho_m g}{\mu_m^3}$	Stanton (termic)	$St_{termic} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$
Prandtl	$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	Stanton (difuzional)	$St_{difuzional} = \frac{Sh}{Re \cdot Sc}$

2.5. SIMILITUDINE ȘI MODELE

Similitudinea se ocupă cu relațiile dintre sistemele fizice de diverse mărimi, în scopul transpunerii la scară mai mică sau mai mare a proceselor fizice, chimice și biochimice.

Legile obiective, fizice sau chimice, cunoscute sau (deocamdată) necunoscute care guvernează fenomenele pot fi deduse fie prin investigații experimentale directe, fie prin aplicarea unor raționamente asupra unui **model fizic**. Un astfel de model reprezintă o simplificare și o idealizare a fenomenului, în care sunt neglijate implicațiile adiacente fenomenului. În funcție de gradul de complexitate al modelului ales, modelul reproduce cu o acuratețe mai mare sau mai mică fenomenul studiat. Ca exemple de modele fizice se pot menționa: gazul ideal lichidul ideal, soluția ideală, corpul absolut negru, etc.

Două fenomene (procese), **M (model)** și **P (prototip)** sunt similare dacă ele sunt guvernate de aceleași legități și dacă au condițiile de univocitate similare, respectiv îndeplinesc concomitent condițiile de similitudine geometrică, similitudine a constantelor fizice, similitudine dinamică și similitudine a condițiilor la limită.

Similitudinea geometrică între model și prototip este îndeplinită dacă:

$$\frac{L_P^0}{L_M^0} = \frac{L_P^1}{L_M^1} = \frac{L_P^2}{L_M^2} = \dots = \frac{L_P^n}{L_M^n} = S_G \quad (2.29)$$

Similitudinea constantelor fizice între model și prototip este îndeplinită dacă:

$$\frac{C_P^0}{C_M^0} = \frac{C_P^1}{C_M^1} = \frac{C_P^2}{C_M^2} = \dots = \frac{C_P^n}{C_M^n} = S_K \quad (2.30)$$

Similitudinea dinamică între model și prototip este îndeplinită dacă:

$$\frac{t_P^0}{t_M^0} = \frac{t_P^1}{t_M^1} = \frac{t_P^2}{t_M^2} = \dots = \frac{t_P^n}{t_M^n} = S_t \quad (2.31)$$

Similitudinea condițiilor la limită este îndeplinită dacă sunt îndeplinite condițiile de similitudine geometrică, a constantelor fizice și dinamică, la starea inițială și finală ale sistemelor model și prototip.

În relațiile (2.29) – (2.31) indicii M și P se referă respectiv la model și prototip, L^j , C^j și t^j reprezintă respectiv: dimensiuni, constante fizice, durate pentru parcurgerea traiectoriilor, iar S_G , S_K și S_t reprezintă constante de similitudine geometrică, a constantelor fizice și respectiv dinamică.

2.6. CRITERII DE SIMILITUDINE

Similitudinea între sisteme poate fi exprimată în termeni de rapoarte intrinseci ale parametrilor ce caracterizează sistemele. Aceste rapoarte poartă denumirea de **criterii de similitudine** sau **invarianți de similitudine**. Dacă invarianții de similitudine sunt rapoarte între două mărimi de aceeași natură – vezi ecuațiile (2.29) – (2.31) – ei se numesc **simplecși de similitudine**. Dacă invarianții de similitudine sunt rapoarte între mai multe mărimi, ei poartă denumirea de **multiplecși de similitudine**; criteriile Re, Eu, Fr, Nu, etc., sunt exemple de astfel de multiplecși.

Criteriile de similitudine sunt grupuri adimensionale iar valorile lor caracterizează sistemele similare. Criteriile de similitudine pot fi deduse:

- cu ajutorul ecuațiilor care descriu fenomenul;
- cu ajutorul ecuațiilor diferențiale care descriu fenomenul (vezi exemplul de la pag. 13);
- cu ajutorul analizei dimensionale (vezi exemplele de la pag. 8 și 10).

Deducerea criteriilor de similitudine este uneori inutilă, de exemplu în cazul în care ecuațiile diferențiale ce descriu o clasă de fenomene pot fi soluționate. În acest caz, comportarea unui sistem la orice scară, este direct calculabilă prin rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Pentru fenomenele ale căror ecuații diferențiale nu pot fi integrate, criteriile de similitudine se obțin direct din forma diferențială a ecuațiilor. Când ecuațiile diferențiale care descriu comportarea unui sistem sunt necunoscute, dar se cunosc variabilele

care îl pot influența, criteriile de similitudine se pot deduce cu ajutorul analizei dimensionale.

2.7. ECUAȚII CRITERIALE

Criteriile de similitudine se exprimă sub forma unor funcții în care variabilele și constantele dimensionale sunt înlocuite cu criterii de similitudine. Aceste funcții sunt **funcții criteriale**:

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i) = \text{const} \quad (2.32)$$

Considerațiile de analiză dimensională și de similitudine conduc la formarea criteriilor de similitudine, dar nu furnizează informații asupra formei ecuației (2.32). În majoritatea cazurilor, funcțiile criteriale pot fi puse sub forma unor **ecuații criteriale**:

$$\pi_i = k \cdot \pi_1^a \cdot \pi_2^b \cdot \pi_3^c \dots \quad (2.33)$$

în care π_1 este criteriul de primă importanță (determinant) pentru un anumit proces, criteriu ce conține parametrul necunoscut ce urmează a fi calculat, iar criteriile $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$ sunt determinate, conținând numai mărimi cunoscute. Coeficientul k și exponenții $a, b, c, \dots$, urmează a fi determinați pe cale experimentală. Astfel de ecuații criteriale sunt folosite pe larg în ingineria proceselor fizice, cu ajutorul lor rezolvându-se probleme importante referitoare la transferul de impuls, de căldură și de masă.

2.8. MODELE. SIMILITUDINE COMPLETĂ ȘI PARȚIALĂ

Una din problemele majore ale ingineriei de proces este transpunerea rezultatelor obținute într-o instalație experimentală (modelul) la o altă scară – uzual mai mare – pentru proiectarea unei instalații industriale (prototipul). Transpunerea model – prototip (scale-up) se realizează cu ajutorul teoriei similitudinii (denumită uneori și teoria modelelor) pe baza a trei teoreme generale:

1. Dacă două fenomene fizice sunt similare între ele criteriile respective de similitudine au aceeași valoare numerică;
2. Ecuațiile care descriu fenomene fizice pot fi scrise în forma unor relații între criterii de similitudine;
3. Pentru ca două fenomene să fie similare, este necesar și suficient ca ele să fie calitativ identice (adică să fie descrise prin ecuații matematice identice – excepție făcând constantele dimensionale conținute în ele), iar

FENOMENE DE TRANSFER

criteriile lor determinate (care conțin numai mărimile cunoscute) corespunzătoare să aibă valori numerice identice.

Exemplu

Dacă un fenomen este reprezentat prin relația:

$$Nu = f(Re, Pr, l/d) \quad (2.34)$$

condițiile pentru existența similitudinii între modelul M și prototipul P vor fi date de identitățile:

$$Re_M = Re_P; Pr_M = Pr_P; (l/d)_M = (l/d)_P \quad (2.35)$$

Evident, dacă vor fi respectate condițiile stabilite prin ecuațiile (2.35), în mod automat va fi îndeplinită și condiția:

$$Nu_M = Nu_P \quad (2.36)$$

Similitudinea absolută (ideală) între două sisteme (model și prototip) va exista numai în condițiile asigurării unei corespondențe depline a tuturor dimensiunilor geometrice ale sistemelor implicate și a tuturor mărimilor care variază în timp și spațiu, adică a proceselor care se desfășoară în aceste sisteme. Noțiunea este abstractă, neexistând fenomene similare în **toate** detaliile.

Similitudinea completă este similitudinea acelor procese care se desfășoară în timp și spațiu și care determină **în esență** fenomenul studiat. În acest caz condițiile de similitudine se referă numai la procesele sau fenomenele fundamentale, neglijându-se unele forțe a căror pondere este nesemnificativă asupra fenomenului studiat. De exemplu criteriul Fr se ia în considerare doar în cazul fluidelor în mișcare care prezintă una sau mai multe suprafețe libere neorizontale, asupra cărora forțele gravitaționale au o pondere însemnată în desfășurarea procesului respectiv; criteriul Re nu intervine în condițiile în care pierderea de presiune a unui fluid în curgere sub presiune printr-o conductă nu este dependentă de Re (curgere puternic turbulentă), etc.

Similitudinea parțială (incompletă) se realizează în cazul modelării incomplete fie datorită dificultăților de modelare fie datorită imposibilității realizării unei similitudini complete.

Să presupunem că similitudinea între două sisteme este condiționată de identitatea simultană a trei criterii de similitudine: Re, Fr și We. În aceste condiții, dependențele dintre viteza fluidului și caracteristica geometrică vor fi de forma:

$$\begin{cases} v \sim l^1 & \text{pentru criteriul Reynolds} \\ v \sim l^{1/2} & \text{pentru criteriul Froude} \\ v \sim l^{1/2} & \text{pentru criteriul Weber} \end{cases} \quad (2.37)$$

Evident, viteza fluidului nu poate fi proporțională simultan cu $1/l$, $\sqrt{l}$ și cu $1/\sqrt{l}$ cele trei criterii de similitudine fiind incompatibile, făcând astfel imposibilă transpunerea la scară a procesului controlat simultan de cele trei criterii.

Chiar dacă similitudinea a două sisteme este controlată doar de identitatea simultană a numai două criterii (Re și Fr; Re și We; Fr și We – de exemplu), pentru a putea respecta două din proporționalitățile redată de relația (2.37) trebuie să se experimenteze în model cu fluide având viscozitatea diferită de aceea a fluidului care va fi utilizat în prototip. În acest caz, scara la care se va face transpunerea va fi limitată de existența unor fluide (ce se vor folosi în model) a căror viscozitate să fie de $10S_G$ ori mai mică decât viscozitatea fluidului din prototip (S_G reprezentând valoarea raportului geometric de scară) – dacă trebuie îndeplinite simultan identitățile:

$$Re_P = Re_M \quad \text{și} \quad Fr_P = Fr_M \quad (2.38)$$

Aplicația 2.7.

Mișcarea unui fluid este reprezentată de ecuația criterială:

$$Eu = f(Re, Fr)$$

Se cere să se stabilească condițiile pentru care acest proces poate fi modelat la scară de laborator. Dacă fluidul care va fi folosit în prototip este glicerina care va fi raportul de transpunere la scară maxim realizabil, dacă fluidul utilizat în model este: a) glicerina; b) apa; c) eterul etilic (se consideră că atât în prototip, cât și în model, procesul decurge la 293 K).

Pentru ocolirea dificultăților sau incompatibilităților care pot interveni în transpunerea la scară se poate apela fie la folosirea **domeniilor de automodelare**, fie la folosirea **distorsiunilor geometrice** sau **hidrodinamice**.

Prin domeniu de automodelare în raport cu un anumit criteriu se înțelege intervalul de variație a valorii criteriului respectiv în care modificarea valorii lui nu influențează fenomenele a căror similitudine dinamică trebuie asigurată. De exemplu, în domeniul curgerii puternic turbulente, căderea de presiune la curgerea unui fluid printr-o conductă sau consumul de putere într-un agitator prevăzut cu șicane nu mai depind de asigurarea identității numerice pentru Re, ci numai de realizarea similitudinii geometrice a celor două sisteme (M și P), evident cu asigurarea desfășurării proceselor la valori Re mai mari decât limita inferioară la care începe regimul turbulent.

Utilizarea distorsiunilor geometrice sau hidrodinamice înseamnă renunțarea la similitudinea geometrică și/sau dinamică completă, cu

FENOMENE DE TRANSFER

corecturile necesare (de regulă efectul unei distorsiuni este compensat prin introducerea unei alte distorsiuni) pentru realizarea transpunerii la scară.

În unele cazuri, când dimensiunile modelului sunt mult diferite de cele ale prototipului procesul din model poate fi influențat de mărimi fizice nesemnificative pentru desfășurarea procesului în prototip și viceversa, apărând așa-numitele **efecte de scară**. De exemplu, efectele tensiunii superficiale sunt mult mai pronunțate în modelele de dimensiuni mici. Pentru eliminarea efectelor de scară se recomandă realizarea, pe cât posibil, a modelelor la dimensiuni cât mai apropiate de cele ale prototipului.

2.9. AVANTAJE ȘI LIMITĂRI ÎN UTILIZAREA CRITERIILOR DE SIMILITUDINE

Utilizarea criteriilor de similitudine și a ecuațiilor criteriale prezintă o serie de avantaje importante, cum ar fi:

- Un proces se poate transpune de la o scară la alta prin simpla păstrare a valorii numerice a criteriilor de similitudine.
- Prin înlocuirea celor “ m ” variabile și constante dimensionale din ecuațiile obișnuite cu “ $m-n$ ” criterii de similitudine din ecuațiile criteriale, se micșorează (în general cu “ n ”) numărul variabilelor efective ale problemei.
- Criteriile de similitudine fiind adimensionale, ele sunt independente de sistemul de unități de măsură în care se lucrează.

Dintre limitările teoriei similitudinii se pot menționa:

- Analiza dimensională și considerațiile de similitudine nu furnizează direct ecuația criterială care descrie fenomenul oferind doar forma generală a funcției. Coeficientul k și exponenții a , b , c , ... din ecuația (2.33) trebuie determinați experimental.
- Transpunerea la scară a rezultatelor experimentale obținute pe un model nu este întotdeauna posibilă, fie datorită incompatibilității unor criterii de similitudine fie datorită efectelor de scară, fie datorită restricțiilor referitoare la alegerea rapoartelor de scară.

Cu toate dezavantajele sale, teoria similitudinii este la ora actuală indispensabilă în tratarea multor aspecte legate de fenomenele de transfer.

**2.10. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU
APROFUNDARE**

1. Bratu, A.E., **Operații unitare în ingineria chimică**, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1984;
2. Coulson, J.M și Richardson, J.F., **Chemical Engineering**, vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1993;
3. Franks, R.G.E., **Modelarea și simularea în ingineria chimică**, Ed. Tehnică, București 1979;
4. Vasilescu, A.A., **Analiza dimensională și teoria similitudinii** Ed. Academiei, București, 1969;
5. Zlokarnik, M., **Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering**, Springer Verlag, Berlin, 1991;
6. * * * **Sistemul Internațional de unități SI**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982;

3. TRANSFERUL DE IMPULS

3.1. NOȚIUNI GENERALE DESPRE FLUIDE. ELEMENTE DE REOLOGIE

Din punct de vedere macroscopic, corpurile materiale pot fi clasificate în corpuri solide și corpuri fluide.

Solidele sunt corpuri cu dimensiuni și forme bine definite, a căror principală caracteristică este **rigiditatea**. Aceste corpuri sunt obiect de studiu al mecanicii corpurilor rigide, modificată prin legile elasticității pentru corpurile care nu pot fi considerate perfect rigide.

Fluidele sunt corpuri caracterizate prin mobilitate mare, rezistență la rupere practic nulă și deformare ușoară (sunt lipsite de formă proprie). Principala proprietate a acestor corpuri este **fluiditatea**. Sub acțiunea unei tensiuni tangențiale constante, fluidul se deformează. Dacă tensiunea nu este îndepărtată, deformarea poate atinge orice valoare. Viteza de deformare este constantă și depinde de viscozitatea fluidului. Deformarea continuă a unui fluid sub acțiunea unei tensiuni poartă denumirea de **curgere**. În practică prezintă interes comportarea corpurilor supuse la solicitări mecanice externe. Curgerea fluidelor prezintă o importanță deosebită pentru procesele tehnologice din industria alimentară și nu numai.

Fluidele pot fi clasificate fie după modul lor de comportare la aplicarea unei presiuni exterioare, fie după efectele pe care le produce asupra lor acțiunea unei tensiuni tangențiale.

Lichidele sunt fluide foarte puțin compresibile, care au proprietatea de a forma o suprafață liberă în contact cu un gaz, sau o suprafață de separare în contact cu un alt lichid nemiscibil.

Gazele sunt acele fluide care ocupă întreg volumul în care se află și sunt foarte compresibile. Pentru gaze se face distincție între **gaze permanente (necondensabile)** și **vapori**, după cum temperatura lor este superioară sau inferioară temperaturii critice.

Comportarea macroscopică diferită a gazelor și lichidelor se explică prin diferența dintre forțele de atracție intermoleculare și distanța medie dintre molecule. Diferența între un lichid și un gaz nu este foarte distinctă; modificând parametrii de stare (presiunea și temperatura) se poate trece un lichid în fază de vapori, fără apariția unei suprafețe libere și fără a-l fierbe. Acest fenomen are loc în **punctul critic**, caracterizat de parametrii critici (P_{cr} , T_{cr}), punct în care proprietățile lichidului și vaporilor sunt identice.

3.1.1. Proprietăți reologice fundamentale

Reologia se ocupă cu studiul solicitărilor și a răspunsului corpurilor la solicitări, stabilind modelele matematice care formează funcția de răspuns a unui corp supus la solicitări. Aplicând asupra unui corp o forță sau un sistem de forțe corpul va fi pus în mișcare, mișcarea constând în **deplasări** și/sau **deformări** (fig. 3.1). O deplasare poate consta din **translația** sau/și **rotația** corpului în timp ce o deformare constă în modificarea **forme**i sau/și **volumului** corpului. Deplasările nu modifică poziția relativă a elementelor constitutive ale unui corp, modificând doar poziția corpului în raport cu un sistem de referință exterior, în timp ce deformările modifică poziția relativă a elementelor constitutive ale unui corp.

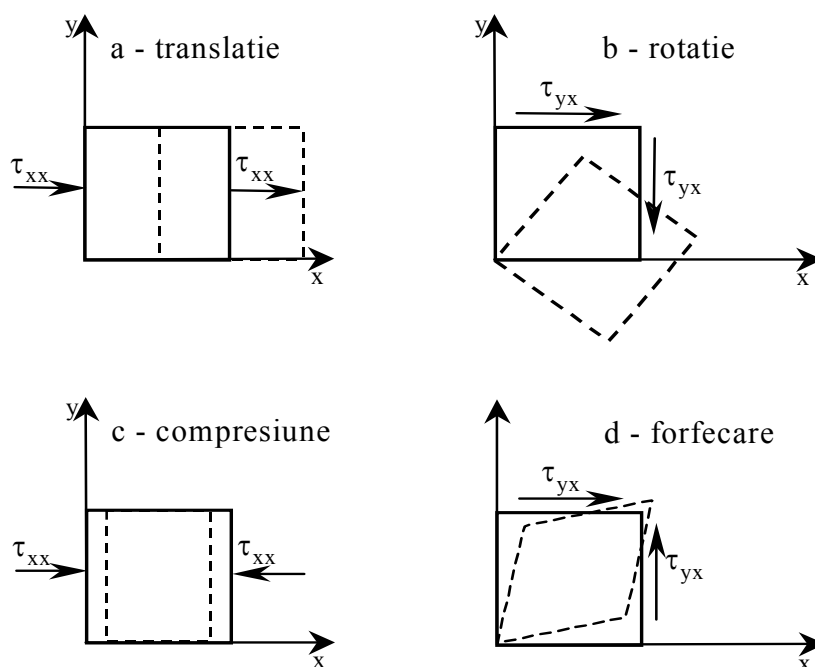


Fig. 3.1. Mișcări caracteristice ale unui corp supus solicitărilor

În cazul solidelor, deformarea are loc până la echilibrarea forțelor interne cu cele externe; după îndepărtarea solicitărilor deformarea se recuperează. Această proprietate de recuperare a deformăției după îndepărtarea solicitării care a produs-o poartă denumirea de **elasticitate**.

Fluidele opun rezistență redusă la deformare, iar deformarea nu ajunge la echilibru, ea crește continuu și nu se mai recuperează după îndepărtarea solicitării: apare fenomenul de curgere. Proprietatea fluidelor de a opune rezistență la schimbarea ireversibilă a poziției elementelor de

FENOMENE DE TRANSFER

volum constituente, disipând energia mecanică sub formă de căldură, poartă denumirea de **viscozitate**.

Elasticitatea și viscozitatea sunt proprietăți intrinseci, fundamentale ale corpurilor. Extrem de puține corpuri reale manifestă o singură proprietate. Majoritatea materialelor prezintă atât elasticitate (specifică solidelor), cât și viscozitate (specifică fluidelor). Dacă ambele proprietăți se manifestă **concomitent**, corpul se numește **viscoelastic** sau **elastoviscos**, după cum preponderentă este viscozitatea, respectiv elasticitatea. Dacă proprietățile se manifestă **succesiv** la o sollicitare continuu crescătoare, corpul se numește **plastic**. Un corp plastic se comportă la sollicitări reduse ca un solid (rigid sau elastic) iar peste o anumită valoare a sollicitării (sollicitare critică, prag de curgere) se comportă ca un fluid (curge), deformându-se ireversibil. Deși plasticitatea nu este o proprietate intrinsecă a corpurilor, ci doar un mod de comportare a acestora, ea este considerată practic a treia proprietate reologică (alături de elasticitate și viscozitate) a corpurilor deformabile.

Din punct de vedere reologic nu există o delimitare netă între starea solidă, lichidă și gazoasă. Indiferent de starea de agregare, toate corpurile “curg”, trecerea de la o stare la alta presupunând doar o schimbare cantitativă a raportului dintre componenta elastică și cea viscoasă. Stările de agregare solidă, lichidă și gazoasă pot fi considerate drept cazuri particulare ale unei **stări fluide generalizate**. Generalizarea are la bază faptul că atributul esențial al stării lichide – viscozitatea – există și la starea gazoasă și, nedemonstrat, la starea solidă.

3.1.2. Tipuri de sollicitări. Parametrii sollicitării

Dacă o forță sau un sistem de forțe acționează asupra unui corp spunem că respectivul corp este sollicitat. Forțele care acționează asupra corpului (forțe exterioare, concentrate sau repartizate, forțe sau momente volumice, forțe de inerție, forțe centrifugale sarcini produse de un câmp termic, electromagnetic etc.) se numesc **sollicitări**, iar totalitatea acestora formează **starea de sollicitare** sau **starea de tensiune** a corpului. Ansamblul forțelor aplicate unui corp îl pot sollicita la **tracțiune, compresie, forfecare, torsiune și încovoiere**, primele trei tipuri de sollicitări prezentând o importanță deosebită din punct de vedere reologic, forfecarea stând la baza curgerii fluidelor.

Pentru deformarea unui corp (incluzând și curgerea) este necesară acțiunea unei **tensiuni (efort unitar)**, care va produce o **deformație specifică** cu o anumită **viteză de deformare**. Aceștia sunt principalii parametri ai unei sollicitări.

Tensiunea sau **efortul unitar** reprezintă limita raportului dintre forța aplicată și suprafața pe care este aplicată când aria suprafeței tinde la zero:

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (3.1)$$

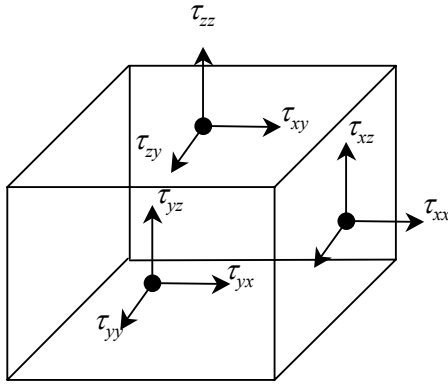


Fig. 3.2. Tensiuni normale și tangențiale care acționează asupra unui element de volum

Pe cele șase fețe ale unui paralelipiped (fig. 3.2) pot acționa câte trei tensiuni după direcțiile axelor de coordonate, dintre care două sunt tangențiale (solicitând corpul la forfecare) și una este normală (solicitând corpul la întindere sau compresie). Din considerente de simetrie (tensiunile care acționează pe fețele opuse ale paralelipipedului sunt identice), starea de tensiune este definită de nouă componente, componente care formează tensorul simetric al tensiunilor:

$$\tau = \tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ll} i = j & \text{tensiuni normale} \\ i \neq j & \text{tensiuni tangențiale} \end{array} \quad (3.2)$$

Deformația este rezultatul acțiunii unei tensiuni. Tensiunile normale acționează asupra volumului corpurilor, provocând comprimarea sau dilatarea acestora în timp ce tensiunile tangențiale acționează asupra formei corpurilor. Deformația, ca și tensiunea, este o mărime tensorială definită prin relații de forma (3.3) – (3.4), în care X_i este o mărime vectorială ce caracterizează deplasarea relativă a unui punct din corpul considerat, în urma solicitării. Starea de deformare este definită de nouă componente. Datorită simetriei deformațiilor specifice de forfecare, starea de deformare este dată de numai șase componente: γ_{xx} , γ_{yy} , γ_{zz} , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

$$\gamma_{xx} = \frac{\partial X_x}{\partial x} \quad \gamma_{yy} = \frac{\partial X_y}{\partial y} \quad \gamma_{zz} = \frac{\partial X_z}{\partial z} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.4)$$

Viteza de deformare, se exprimă prin derivata deformației în raport cu timpul:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{d}{dt}(\gamma_{ij}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X_i}{\partial j} \right) = \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right) = \frac{dv_i}{dj} \quad (3.5)$$

Dacă $i \neq j$, viteza de deformare devine **viteză de forfecare**. Conform relației (3.5) rezultă că viteza de deformare și gradientul de viteză sunt noțiuni identice, dar care nu se pot substitui reciproc. De exemplu, aplicarea a două tensiuni tangențiale asupra unui corp (fig. 3.1.b) pentru care se poate scrie:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (3.6)$$

are drept efect o rotație rigidă a corpului. Pe de altă parte, aplicarea a două tensiuni tangențiale ca în fig. 3.1.d, pentru care se poate scrie:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (3.7)$$

conduce la deformarea prin forfecare pură. Numai gradientii de viteză nu pot constitui o măsură a vitezei de forfecare. Măsura vitezei de forfecare o constituie media gradientilor de viteză:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i} \right) \quad (3.8)$$

Viteza de deformare volumică se poate scrie:

$$\dot{\gamma}_v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.9)$$

Ecuatiile care corelează tensiunile cu deformațiile (în cazul solidelor), sau tensiunile cu vitezele de deformare (în cazul fluidelor) poartă denumirea de **ecuații reologice**. Reprezentarea grafică a acestor ecuații în coordonate tensiune – deformație, respectiv tensiune – viteză de deformare, poartă denumirea de **reograme**. Toate ecuațiile reologice conțin un număr de **coeficienți de material**. Pentru mediile anizotrope și neomogene sunt necesari 81 de coeficienți de material. Numărul lor se reduce la 21 în cazul corpurilor neomogene și la 2 în cazul corpurilor omogene și izotrope. Astfel

de coeficienți de material sunt, de ex.: modulul de elasticitate al lui Young, modulul de elasticitate la forfecare coeficientul de viscozitate la forfecare simplă (viscozitatea dinamică), pragul de elasticitate (limita de elasticitate pragul de curgere) etc.

3.1.3. Corpuri cu proprietăți unitare și comportare ideală

Dacă un corp este solicitat, funcție de proprietățile corpului, răspunsul la solicitare poate fi:

1. Deformație nulă; corpul este neelastic (pur rigid);
2. Deformație temporară, recuperabilă; corpul este perfect elastic;
3. Deformație permanentă, nerecuperabilă; corpul este pur viscos;
4. Deformație parțial temporară, parțial permanentă; corpul este simultan elastic și viscos;
5. Deformație temporară sau/și permanentă; corpul este succesiv elastic și viscos (plastic);
6. Deformație permanentă pentru solicitare nulă; corpul este nevicos (inviscid).

Răspunsurile (1) și (6) sunt caracteristice pentru două corpuri ipotetice ideale: solidul perfect rigid (solidul lui Euclid), respectiv fluidul inviscid (fluidul lui Pascal). Pe baza acestor corpuri ipotetice s-a dezvoltat mecanica clasică a solidului și teoria clasică a dinamicii fluidelor. Din punct de vedere reologic, cele două corpuri nu prezintă importanță, neposedând nici una din însușirile specifice materiei reale: solidul lui Euclid este lipsit de elasticitate, iar fluidul lui Pascal este lipsit de viscozitate. Aceste două corpuri formează două extreme între care se încadrează toate corpurile reale.

Cele mai simple corpuri studiate de reologie posedă o singură proprietate. Comportarea lor este descrisă cu ajutorul unor legi liniare. Aceste corpuri sunt denumite **corpuri reologice particulare**, sau corpuri cu proprietăți unitare cu comportare ideală. Acestea sunt: **solidul lui Hooke** (perfect elastic), **fluidul lui Newton** (pur viscos), **plasticul lui St. Venant** (perfect plastic).

3.1.3.1. Solidul lui Hooke

Acest corp (corpul perfect elastic) posedă numai elasticitate. Sub acțiunea unei tensiuni aplicate sub formă de impact, se deformează instantaneu, iar la descărcare recuperează întreaga deformație. Este elastic pe întregul domeniu al solicitării. Forma corpului depinde exclusiv de

FENOMENE DE TRANSFER

solicitare și este independentă de factorul timp. Ecuația reologică a acestui corp (cunoscută și ca legea lui Hooke) supus la forfecare simplă are forma:

$$\tau_{yx} = G \cdot \gamma_{yx} \quad (3.10)$$

în care G reprezintă modulul de elasticitate la forfecare (modulul de rigiditate).

Modelul analog mecanic al acestui corp este **arcul elicoidal** sau **resortul** (fig. 3.3). Dacă asupra unui arc de lungime L acționează o forță instantanee F_I , arcul se deformează instantaneu cu ΔL_I . Sub acțiunea forței F_I deformația se menține constantă în timp. După îndepărtarea forței, arcul revine la starea lui naturală. Recuperarea deformației este instantanee. Între forță și deformație există o proporționalitate directă:

$$F_I = k \cdot \Delta L_I \quad (3.11)$$

Comparând ecuațiile (3.10) și (3.11) și făcând identitatea între parametrii solicitării, rezultă că arcul este analogul mecanic al solidului lui Hooke.

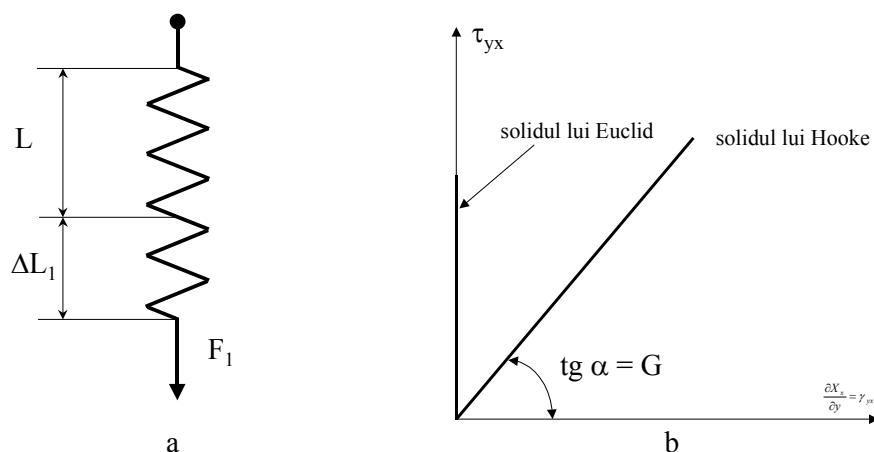


Fig. 3.3. Solidul lui Hooke
a – modelul mecanic; b – reograma corpului solicitat la forfecare simplă

3.1.3.2. Fluidul lui Newton

Acest corp (corpul pur viscos) posedă numai viscozitate. Sub acțiunea unei solicitări, curge. Legea care descrie comportarea reologică include coeficienții de viscozitate și este valabilă numai în **curgerea laminară**. Deformația viscoasă depinde de mărimea și durata solicitării. La efort constant curgerea este continuu întreținută, deformația este continuu crescătoare și viteza de deformare este constantă. Din acest motiv, în cazul fluidelor viscoase, tensiunea se corelează cu viteza de deformare. Ecuația

reologică generală a acestui corp exprimă dependența liniară dintre tensorul tensiunilor și tensorul vitezelor de deformare:

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\gamma}_{ij} + \left[\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right]\dot{\gamma}_{ij}\delta_{ij} \quad (3.12)$$

în care δ_{ij} este **tensorul unitate** sau simbolul lui Kronecker, care are valoarea 1 pentru $i = j$, respectiv 0 pentru $i \neq j$. Cei doi coeficienți de material din ecuație, μ (viscozitatea dinamică) și μ_v (viscozitatea volumică) reprezintă respectiv o măsură a rezistenței corpului la modificările de formă și de volum. Acești doi coeficienți se determină experimental iar valoare lor nu depinde de mărimea și durata solicitării și nici de viteza de deformare.

Pentru fluide incompresibile când deformarea volumică este exclusă ($\dot{\gamma}_{ii} = 0$), sau pentru fluide compresibile solificate numai la forfecare ($i \neq j$ și $\delta_{ij} = 0$), ecuația (3.12) devine:

$$\tau_{ij} = 2\mu\dot{\gamma}_{ij} \quad (3.13)$$

sau dacă luăm în considerare solicitările pe direcțiile x și y iar corpul este supus la forfecare simplă după direcția x ($v_y = 0$):

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \cdot \dot{\gamma}_{yx} \quad (3.14)$$

cunoscută ca **legea de frecare a lui Newton**.

Deși ecuația (3.14) este considerată în mod curent ecuația reologică a fluidelor newtoniene, ea reprezintă doar un caz particular al ecuației (3.12), fiind valabilă **numai pentru curgerea cu forfecare simplă**.

Modelul analog mecanic al fluidului lui Newton este **amortizorul** (fig. 3.4.a). Acesta se compune dintr-un recipient cilindric umplut cu un lichid newtonian, în care se deplasează un piston într-o manieră care exclude apariția turbulenței. Între partea fixă și cea mobilă a amortizorului nu există puncte de contact, ceea ce evită apariția unor forțe de frecare. Sistemul este astfel construit încât efectele inerțiale, gravitaționale și de capăt sunt neglijabile.

Forța F_l aplicată tijei determină deplasarea pistonului și trecerea lichidului din față în spate, prin spațiul dintre piston și cilindru. Deplasarea crește continuu în timp iar viteza de deplasare este constantă. La aplicarea unei forțe sub formă de impact, amortizorul nu reacționează instantaneu. Viteza de deplasare este constantă atâta timp cât forța este constantă. Între forța aplicată și viteza de deplasare există o proporționalitate directă:

$$F_l = k \frac{dL}{dt} \quad (3.15)$$

în care k reprezintă constanta amortizorului, iar dL/dt viteza de deplasare. Se observă analogia dintre ecuațiile (3.14) și (3.15).

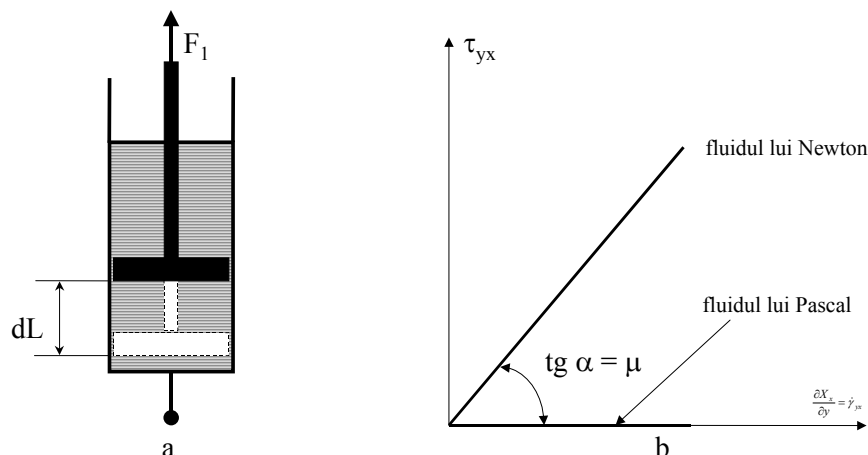


Fig. 3.4. Fluidul lui Newton

a – modelul mecanic; b – reograma corpului solicitat la forfecare simplă

Reograma fluidului cu comportare newtoniană supus la forfecare simplă (în condiții izoterme) este o dreaptă a cărei pantă este o măsură a viscozității (fig. 3.4.b). În fluidele viscoase, deformarea duce la creșterea forțelor de frecare internă, care disipează o parte din energia cinetică a fluidului și o face să apară sub formă de căldură. La viteze mici de forfecare, în fluide cu viscozitate mică, fenomenul este minor, creșterea temperaturii fluidului datorită disipării energiei fiind neglijabilă. Fluidele cu viscozitate mare pot însă genera cantități apreciable de căldură, fapt care duce la modificarea proprietăților fluidului.

3.1.3.3. Plasticul lui St. Venant

Denumit și corpul pur plastic, acest corp posedă numai plasticitate. Până la pragul de tensiune se comportă ca un solid, după care se comportă ca un lichid.

Proprietățile de elasticitate și viscozitate la corpurile viscoelastice solicate la forfecare se manifestă concomitent în toate punctele corpului. Materialele elastoplastice manifestă succesiv comportare elastică și comportare plastică (fig. 3.5.a). Există și corpuri lichide cu comportare plastică (suspensii, vopsele, soluții, etc.). Acestea încep să curgă numai după ce solicitarea egalează pragul de curgere.

Segmentele OA din fig. 3.5.a corespund deformărilor perfect elastice, iar segmentele AB corespund deformării plastice. Curba 1 corespunde unui **corp elastoplastic ecruisabil**, iar curba 2 corespunde unui **corp elasto- perfect plastic**.

În cazul unor corpuri, deformațiile elastice sunt foarte mici comparativ cu deformația totală, deformațiile elastice putându-se astfel neglija. Aceste corpuri sunt denumite **rigid-plastice** sau, mai simplu, **plastice**.

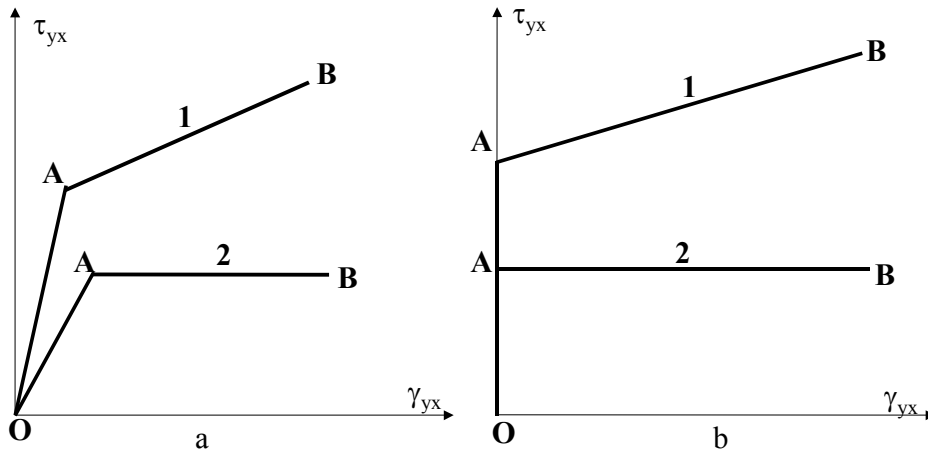


Fig. 3.5. Moduri de comportare plastică (curbe idealizate)
a – comportare elasto-plastică; b – comportare rigid-plastică

Curba 1 din fig. 3.5.b descrie comportarea unui corp **rigid-plastic ecruisabil**, iar curba 2 pe aceea a unui corp **rigid-perfect plastic**. Până la pragul de tensiune corespunzător punctelor A, ambele corpuri sunt perfect rigide (au comportare de solid euclidian), iar peste acest prag se deformează ireversibil (curg), având comportare de fluid newtonian (curba 1), respectiv de fluid pascalian (curba 2). Corpul a cărui comportare este descrisă de curba 2 este tocmai **plasticul St. Venant**, acesta având ca unică proprietate reologică, plasticitatea.

Ecuția reologică a plasticului St. Venant supus la forfecare simplă are forma:

$$\tau_{yx} = \tau_{0f} \quad (3.16)$$

în care τ_{0f} reprezintă pragul de tensiune la forfecare.

Pentru $\tau_{yx} < \tau_{0f}$, corpul se comportă ca un solid rigid. În momentul în care solicitarea egalează pragul de tensiune conform ecuației (3.16), corpul se deformează iar deformația este nerecuperabilă.

Modelul analog mecanic al plasticului St. Venant este **corpul cu frecare** sau **patina** (fig. 3.6.a). Un corp solid, așezat pe o suprafață plană, orizontală, asupra căruia acționează forța F_I , este pus în mișcare numai când forța aplicată egalează forța de frecare, F_f , dată de ecuația:

$$F_f = \mu_f \cdot m \cdot g \quad (3.17)$$

în care m este masa corpului, g accelerația gravitațională și μ_f coeficientul de frecare. Pentru condiția de deplasare se poate scrie:

$$F_1 = F_f \quad (3.18)$$

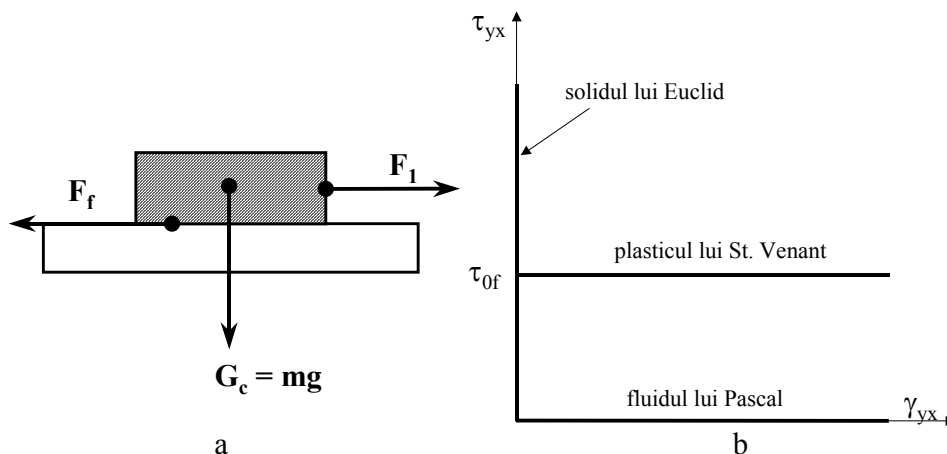


Fig. 3.6. Plasticul lui St. Venant
a – modelul mecanic; b – reograma corpului solicitat la forfecare simplă

Comparând ecuațiile (3.16) și (3.18) și făcând identitatea între parametrii solicitării, rezultă că patina este analogul mecanic al plasticului St. Venant. Dacă se dau coeficientului de frecare din ecuația (3.17) valorile extreme se ajunge la corpurile ideale:

Pentru $\mu_f = \infty$ se obține $F_1 = \infty$, ecuație analogă cu ecuația reologică a solidului euclidian: $\tau = \infty$ sau $\dot{\gamma} = 0$.

Pentru $\mu_f = 0$ se obține $F_1 = 0$, ecuație analogă cu ecuația reologică a fluidului pascalian: $\tau = 0$ sau $\dot{\gamma} = \infty$.

O sumarizare a corpurilor cu comportare ideală este prezentată în tabelul 3.1 și în reogramele din fig. 3.7.

Tab. 3.1. Corpuri cu comportare ideală

	LICHID		SOLID		
	curgere		deformare		rigid
	inviscidă	viscidă	plastică	elastică	
Corpul	PASCAL	NEWTON	ST. VENANT	HOOKE	EUCLID
Constanta de forfecare	$0 \leftarrow \mu$		τ_0	$G \rightarrow \infty$	
Ecuația reologică	$\tau = 0$	$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}$	$\tau = \tau_0$	$\tau = G \cdot \gamma$	$\gamma = 0$

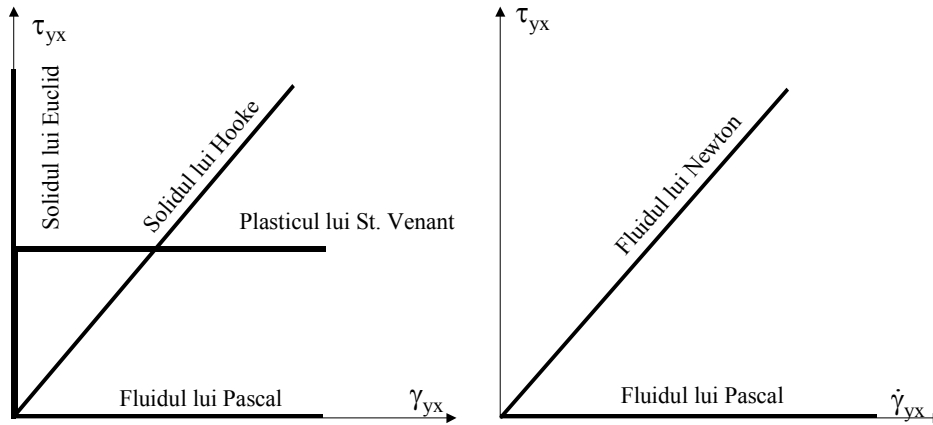


Fig. 3.7. Reogramele corpurilor cu comportare ideală supuse la forfecare simplă

3.1.4. Fluide cu comportare nenewtoniană

Diversitatea comportării corpurilor reale apare ca urmare a asocierii – în diverse proporții – a mai multor proprietăți reologice. Sugestiv, comportarea unui corp real poate fi vizualizată în triunghiul comportărilor reologice (fig. 3.8). În vârfurile unui triunghi echilateral sunt amplasate corpurile care prezintă o singură proprietate reologică. Pe laturile triunghiului sunt amplasate corpurile care posedă câte două proprietăți reologice. Acestor laturi le corespund comportările: viscoplastică, visco-elastică și elasto-plastică.

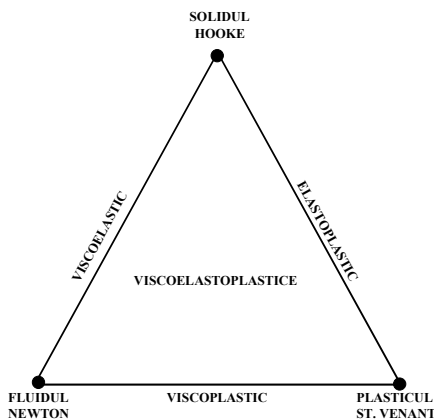


Fig. 3.8. Triunghiul comportărilor reologice

Punctele din interiorul triunghiului reprezintă corpuri ce posedă toate cele trei proprietăți reologice, fiind corpuri cu comportare visco-elasto-plastică.

În industria alimentară, pe lângă fluidele cu comportare newtoniană (apă, are, gaze, soluții și lichide cu masă moleculară mică) întâlnim multe fluide a căror comportare la forfecare simplă nu

respectă legea de frecare a lui Newton.

Înțelegerea comportării fluidelor nenewtoniene este importantă pentru specialistul din industria alimentară din cel puțin două motive:

1. În mod frecvent proprietățile nenewtoniene sunt caracteristici cerute anumitor produse: muștarul, maioneza, sosurile și alte produse ambalate în tuburi flexibile sunt fluide cu prag de curgere. Ele nu trebuie să curgă liber din tub, ci să iasă numai la presarea acestuia (deci după ce tensiunea aplicată a depășit limita de curgere). Elaborarea produselor alimentare (creme, paste, sosuri, aluaturi, etc.) necesită cunoașterea temeinică a comportării fluidelor nenewtoniene.
2. La proiectarea utilajelor, instalațiilor și traseelor de conducte este absolut necesar să se țină seama de comportarea nenewtoniană a fluidelor. Coeficienții de transfer de căldură și de masă sunt considerabil afectați de comportarea fluidului. O deosebită atenție va trebui de asemenea acordată alegerii echipamentelor adecvate pentru amestecare și pompare.

3.1.4.1. Clasificarea fluidelor nenewtoniene

Fluidele pot fi clasificate, funcție de dependența dintre efortul unitar de forfecare și viteza de forfecare în fluide newtoniene (pentru care dependența este liniară) și fluide nenewtoniene (pentru care dependența este neliniară). În categoria fluidelor nenewtoniene sunt incluse atât fluidele care posedă numai viscozitate, cât și fluidele care prezintă două sau chiar trei proprietăți reologice fundamentale.

În funcție de numărul și tipul proprietăților reologice fundamentale pe care le posedă un fluid, putem clasifica fluidele în modul următor:

Fluide fără nici o proprietate reologică. În această categorie se încadrează fluidul inviscid al lui Pascal, care este un fluid ideal. Nu există un corespondent real al unui astfel de corp.

Fluide având o singură proprietate reologică – viscozitatea. În această categorie se încadrează fluidul newtonian precum și fluidele pentru care dependența tensiune – viteză de deformare este neliniară, iar viscozitatea este dependentă de parametrii solicitării sau de timp. Aceste din urmă fluide sunt numite fluide cu viscozitate de structură sau fluide viscoase nenewtoniene.

Fluide având două proprietăți reologice. În această categorie sunt incluse fluidele viscoelastice și fluidele viscoplastice (fluide cu prag de tensiune sau cu prag de curgere).

Fluide având trei proprietăți reologice. Sunt fluidele care posedă concomitent elasticitate viscozitate și plasticitate, denumite fluide visco-elasto-plastice.

În cazul fluidelor nenewtoniene, viscozitatea dinamică nu este constantă nici în condiții izobar-izoterme. Funcție de parametrii care influențează modificarea vitezei de forfecare, aceste fluide pot fi împărțite în două categorii:

Fluide independente de timp (dependente de forfecare), pentru care viteza de forfecare într-un punct depinde exclusiv de tensiunea de forfecare în punctul respectiv;

Fluide dependente de timp, pentru care viteza de forfecare este o funcție de mărimea și durata efortului de forfecare, precum și de istoria forfecării.

În funcție de modul în care variația vitezei de forfecare influențează viscozitatea, fluidele – atât cele pur viscoase, cât și cele viscoplastice sau viscoelastice – pot fi clasificate în:

Fluide pentru care valoarea viscozității este independentă de viteza de forfecare:

- fluide newtoniene;
- fluide tip plastic Bingham;

Fluide a căror viscozitate crește cu creșterea vitezei de forfecare:

- fluide dilatante (independente de timp);
- fluide reopexice (dependente de timp);

Fluide a căror viscozitate scade cu creșterea vitezei de forfecare:

- fluide pseudoplastice (independente de timp);
- fluide tixotrope (dependente de timp);

3.1.4.2. Fluide viscoase nenewtoniene

Pentru aceste fluide, a căror dependență tensiune – viteză de deformare (în condiții izoterme) este neliniară, iar viscozitatea depinde de parametrii solicitării, se poate defini o viscozitate aparentă:

$$\mu_a = \frac{\tau_{ij}}{\dot{\gamma}_{ij}} \quad (3.19)$$

Factorul principal al abaterii acestor fluide de la comportarea newtoniană îl constituie modificarea structurii fluidului sub acțiunea forțelor de forfecare.

Dacă viteza de modificare a structurii este mare, insesizabilă experimental, viscozitatea fluidului se modifică numai dacă se modifică parametrii solicitării. Această comportare este **caracteristică fluidelor independente de timp** (fig. 3.9). Sensul de variație a viscozității aparente depinde de comportarea reologică a fluidelor: fluidele **pseudoplastice** prezintă fenomenul de fluidificare (viscozitatea scade la creșterea vitezei de forfecare), în timp ce fluidele **dilatante** prezintă fenomenul de îngroșare (viscozitatea crește la creșterea vitezei de forfecare), așa cum reiese din fig. 3.10.

Dacă viteza de modificare a structurii este suficient de mică pentru a fi sesizabilă experimental, fluidul își modifică viscozitatea în timp, deși parametrii solicitării rămân constanți. Această comportare este caracteristică **fluidelor dependente de timp**. Fluidele **reopexice** prezintă fenomenul de îngroșare, în timp ce fluidele **tixotrope** prezintă fenomenul de fluidificare (fig. 3.11). Comportarea dependentă de timp a acestor fluide se datorează modificării lente a structurii prin forfecare. Modificând continuu viteza de forfecare în sens crescător și apoi în sens descrescător, se obțin curbe cu histerezis (fig. 3.12).

Comportarea neliniară la solicitare la forfecare simplă a fluidelor viscoase newtoniene independente de timp este descrisă cu ajutorul unor modele reologice semiempirice. Cel mai simplu dintre acestea este **modelul Ostwald – de Waele**, cunoscut și sub denumirea de **legea puterii**:

$$\tau = k \cdot \dot{\gamma}^n \quad (3.20)$$

în care cele două constante de material sunt:

k - indice de consistență [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{n-2}$];

n - indice de curgere [adimensional].

Combinând ecuația (3.19) cu ecuația (3.20), prin eliminarea tensiunii de forfecare, se obține:

$$\mu_a = k \cdot \dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.21)$$

Ținând cont de ecuația de definiție a viscozității dinamice (3.14), din (3.20) rezultă:

$$\mu = n \cdot \mu_a \quad (3.22)$$

Funcție de valoarea indicelui n , modelul Ostwald – de Waele poate reproduce comportarea reologică a următoarelor fluide:

Fluide newtoniene: $n = 1$; $\mu_a = k$;

Fluide pseudoplastice: $n < 1$; μ_a scade cu creșterea vitezei de forfecare;

Fluide dilatante: $n > 1$; μ_a crește cu creșterea vitezei de forfecare.

Câteva fluide viscoase nenewtoniene întâlnite frecvent în industria alimentară și în biotehnologii sunt prezentate în tabelul 3.2.

Tab. 3.2. *Fluide viscoase nenewtoniene*

Fluide pseudoplastice	fluide biologice, maioneză, suspensii de amidon
Fluide dilatante	soluții de zahăr, amidon, făină de porumb
Fluide tixotropice	soluții de gelatină, albuș de ou, grăsimi, unt
Fluide reopexice	soluții diluate de oleat de amoniu

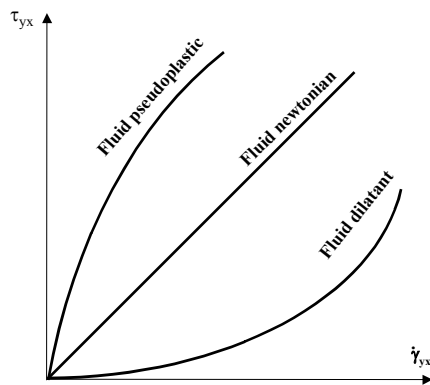


Fig. 3.9. Reogramele fluidelor viscoase independente de timp

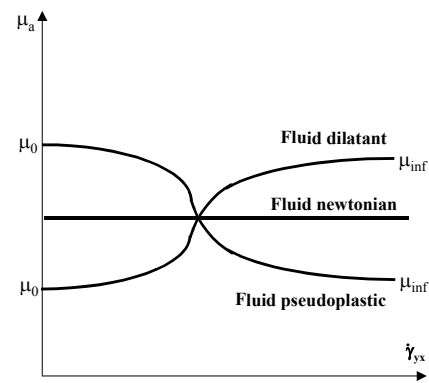


Fig. 3.10. Dependența viscozității de viteza de forfecare

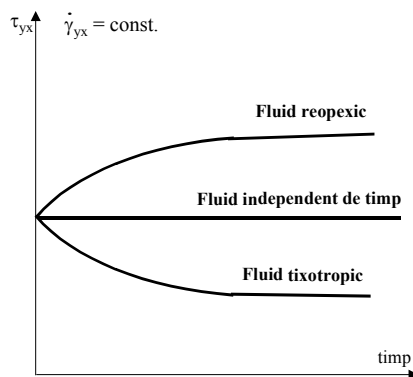


Fig. 3.11. Variația în timp a tensiunii de forfecare

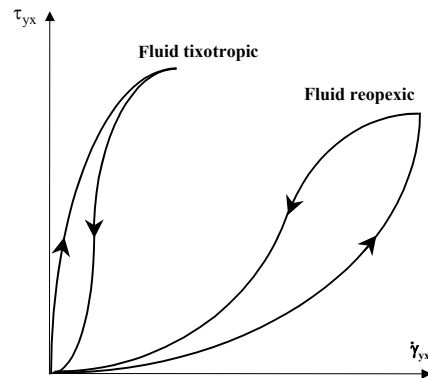


Fig. 3.12. Reograme ale fluidelor viscoase dependente de timp

3.1.4.3. **Fluide viscoelastice**

Fluidele viscoelastice posedă două proprietăți reologice fundamentale: vâzcozitate și elasticitate. Ele disipează numai o parte din energia care li se furnizează, respectiv componenta viscoasă iar o parte – componenta elastică – o conservă și, după îndepărtarea solicitării, o recuperează. Datorită componentei elastice, în comportarea acestor fluide apar fenomene speciale, cum ar fi: efectul de ridicare a lichidului pe tijă, fenomenul de îngroșare a jetului la ieșirea dintr-un tub circular, apariția recirculării curenților la îngustarea bruscă a secțiunii de curgere, etc.

Comportarea acestor fluide poate fi descrisă prin intermediul unor modele analoge mecanice constituite din resorturi (care descriu componenta elastică) și amortizoare (care descriu componenta viscoasă). Cele mai simple modele, reprezentate în fig. 3.13, sunt alcătuite dintr-un resort și un amortizor legate în serie (corpul Maxwell), sau în paralel (corpul Voigt – Kelvin). Aceste modele descriu comportarea liniară a corpurilor viscoelastice, dar există și modele care descriu comportarea neliniară.

Deformația totală a corpului Maxwell este dată de suma dintre deformația elastică (γ_e) și deformația viscoasă (γ_v):

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_v \quad (3.23)$$

La forfecare simplă, γ_e și γ_v rezultă respectiv din:

$$\tau_{yx} = -G \frac{dX_x}{dy} = -G \cdot \gamma_{yx}(t_0, t) \quad (3.24)$$

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} = -\mu \cdot \dot{\gamma}_{yx}(t) \quad (3.25)$$

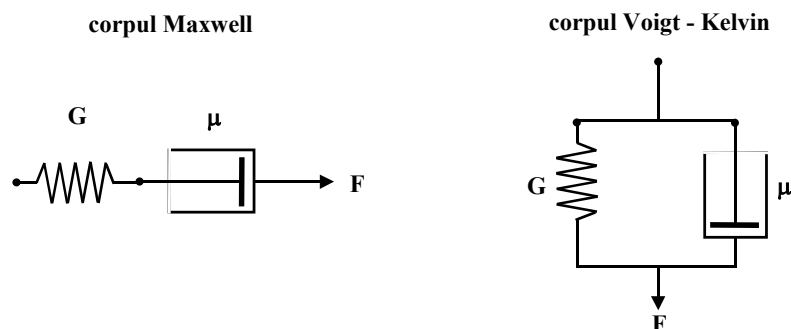


Fig. 3.13. Modele analog mecanice ale fluidelor viscoelastice

în care v_x este viteza fluidului în direcția x și X_x este deplasarea fluidului în aceeași direcție, din poziția de echilibru corespunzătoare timpului t_0 . Derivând (3.23) în raport cu timpul și substituind în ea vitezele de deformare, se obține:

$$\tau_{yx} + \frac{\mu}{G} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} = -\mu \cdot \dot{\gamma}_{yx} \quad (3.26)$$

care este **ecuația reologică a corpului Maxwell**. Pentru forfecare în regim staționar ecuația (3.26) se reduce la ecuația reologică a fluidului newtonian (3.14). La modificarea rapidă a tensiunii, al doilea termen din membrul stâng al ecuației devine predominant și, integrând (3.26) se obține ecuația reologică a solidului lui Hooke (3.10).

În cazul corpului Voigt – Kelvin deformațiile ambelor elemente componente (resortul și amortizorul) sunt egale, iar solicitarea totală este dată de suma:

$$\tau = \tau_e + \tau_v \quad (3.27)$$

Substituind termenii din membrul drept al relației (3.27) cu componentele corespunzătoare din legea lui Hooke (3.10) și legea lui Newton pentru cazul forfecării simple (3.14), se obține:

$$\tau_{yx} = G \cdot \gamma_{yx} + \mu \cdot \dot{\gamma}_{yx} = G \cdot \gamma_{yx} + \mu \frac{d\gamma_{yx}}{dt} \quad (3.28)$$

care este **ecuația reologică a corpului Voigt – Kelvin**.

Dacă unui corp Voigt – Kelvin i se atașează în serie un amortizor se obține corpul Letherisch, care manifestă curgere pur viscoasă și elasticitate întârziată, și descrie comportarea unor suspensii și emulsii a unor soluții de polimeri și a biturilor.

Un corp Voigt – Kelvin înseriat cu un resort formează un corp Zener, model reologic cu elasticitate instantanee și elasticitate întârziată, care descrie comportarea fibrelor de sticlă și a unor metale.

Corpul Burgers se obține înseriind un corp Voigt – Kelvin cu un corp Maxwell. Acest model reologic care prezintă viscozitate, elasticitate instantanee și elasticitate întârziată, reproduce comportarea betoanelor și a polimerilor amorfi liniari.

3.1.4.4. Fluide viscoplastice

Fluidele viscoplastice sunt cunoscute și sub denumirea de **fluide cu prag de tensiune**. Ele încep să curgă numai după ce solicitarea atinge valoarea τ_0 , care reprezintă pragul de tensiune (pragul de curgere, limita de curgere). În domeniul tensiunilor care satisfac condiția $\tau < \tau_0$ au comportare

FENOMENE DE TRANSFER

de solid, iar pentru $\tau \geq \tau_0$ au o comportare viscoasă, prezentând fenomenul de curgere.

Cel mai simplu model reologic al unui fluid viscoplastic se obține prin înserierea unui amortizor cu o patină (fig. 3.14.a). Până la pragul de curgere τ_0 , corpul are comportare de lichid newtonian:

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \dot{\gamma}_{yx} \quad (3.29)$$

După egalarea tensiunii $\tau_{yx} = \tau_0$, viteza de forfecare poate lua orice valoare mai mare decât $\dot{\gamma}_0$. În acest caz patina are rolul unui limitator al solicitării; corpul nu poate suporta tensiuni mai mari decât τ_0 (fig. 3.14.b).

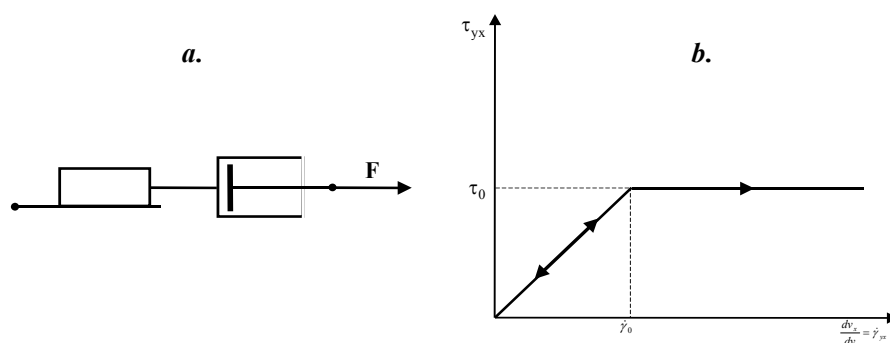


Fig. 3.14. Modelul corpului viscoelastic cu elemente înseriate
a – modelul analog mecanic; b – reograma corpului

Un alt model poate fi obținut prin legarea în paralel a unui amortizor cu o patină (fig. 3.15.a). Acest model, cunoscut ca **plasticul Bingham**, sub acțiunea unei forțe crescătoare se manifestă inițial ca un solid rigid, iar peste pragul τ_0 are comportare de lichid newtonian (fig. 3.15.b).

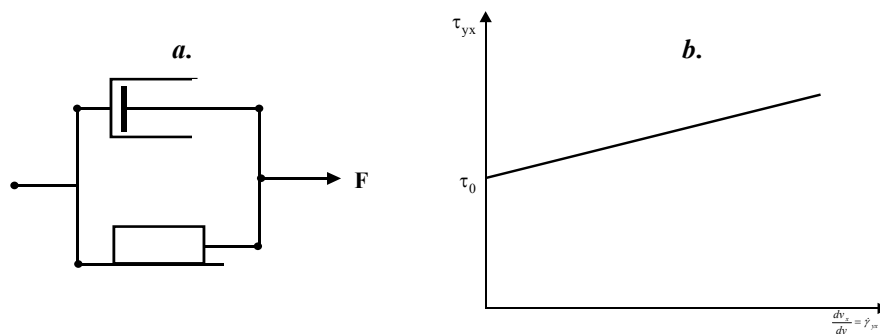


Fig. 3.14. Plastic Bingham (corp viscoplastic cu elemente legate în paralel)
a – modelul analog mecanic; b – reograma corpului

Ecuția reologică a plasticului Bingham are forma:

$$\tau_{yx} - \tau_0 = \mu_p \cdot \frac{dv_x}{dy} \quad \text{pentru} \quad \tau_{yx} > \tau_0 \quad (3.30)$$

în care μ_p este viscozitatea plastică (mobilitatea).

Modelul plasticului Bingham conține două constante de material: pragul de curgere τ_0 și viscozitatea plastică μ_p . Prin analogie cu fluidele viscoase nenenewtoniene se definește o viscozitate aparentă a plasticului Bingham:

$$\mu_p = \frac{\tau_{yx}}{\frac{dv_x}{dy}} = \mu + \frac{\tau_0}{\frac{dv_x}{dy}} \quad (3.31)$$

a cărei valoare descrește cu creșterea vitezei de forfecare. Pentru valori mici ale lui τ_0 și valori mari ale vitezei de forfecare, al doilea termen din membrul drept al ecuației (3.31) se poate neglija astfel încât $\mu_p = \mu$.

Principalele tipuri de comportări viscoplastice sunt redată în reogramele din fig. 3.15. Toate corpurile sunt cu prag de curgere τ_0 . Curba (1) corespunde plasticului Bingham. Curbele (2) și (3) reprezintă comportări plastice neliniare cu fluidificare, respectiv cu îngroșare. Curba (4) reprezintă comportarea unui lichid viscoplastic tixotrop.

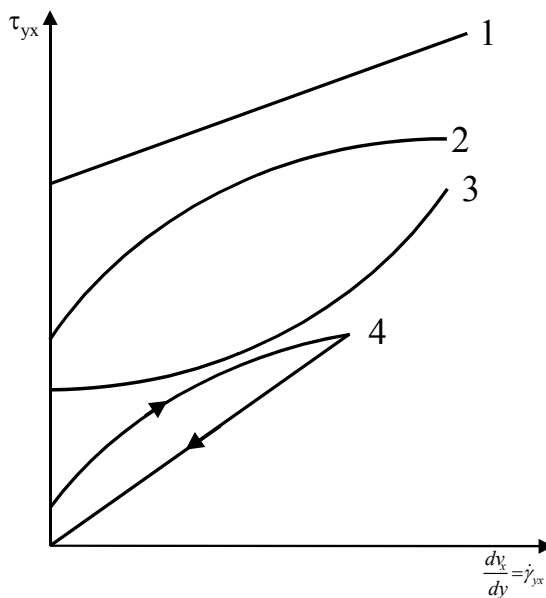


Fig. 3.15. Reogramele corpurilor viscoplastice

Aceste reograme sunt valabile numai pentru forfecarea simplă.

Plasticul Bingham are comportare liniară viteza de forfecare fiind o funcție liniară de tensiune. Această comportare este caracteristică unor suspensii, margarinei, unor grăsimi, pastei de dinți, unor suspensii de săpunuri și detergenți, unor paste de hârtie etc.

Pentru descrierea comportării materialelor al căror răspuns la solicitări este neliniar, se folosesc modele neliniare.

Modelul Herschel – Bulkley, cu ecuația:

$$\tau_{yx} - \tau_0 = \left(\mu' \cdot \frac{dv_x}{dy} \right)^{1/m} \quad (3.32)$$

are o formă echivalentă cu modelul Ostwald – de Waele [vezi ec. (4.20)], dar conține trei constante reologice (τ_0 , μ' și m), ale căror valori se obțin din datele experimentale. Funcție de valorile exponentului m , se obțin comportările corespunzătoare curbelor (1) – (3) din fig. 3.15:

- pentru $m = 1$ comportare liniară (plastic Bingham – curba (1));
- pentru $m < 1$ comportare dilatantă (curba (3));
- pentru $m > 1$ comportare fluidifiantă (curba (2)).

Modelul Casson având ecuația:

$$\sqrt{\tau_{yx}} - \sqrt{\tau_0} = k \cdot \sqrt{\frac{dv_x}{dy}} \quad (3.33)$$

conține două constante empirice, τ_0 și k ale căror valori se obțin prin prelucrarea grafică a datelor experimentale. Modelul descrie comportarea reologică a cernelurilor tipografice, a sângelui, sucului de portocale, pastelor de tomate, ciocolatei topite.

3.1.5. Reprezentarea generalizată a comportării reologice a fluidelor

Comportarea reologică a fluidelor viscoase nenenewtoniene, a fluidelor viscoelastice și a fluidelor viscoplastice permite stabilirea unor concluzii generalizatoare pe baza cărora poate fi înțeleasă și explicată comportarea fluidelor reale.

În fig. 3.16 sunt redată două curbe generalizate de curgere. Curba (1) reprezintă **curba de curgere a lui Ostwald**, iar curba (2) reprezintă **curba generalizată de curgere**. Pe curba (1) se disting patru domenii:

- dreapta OA, corespunzătoare primului domeniu newtonian;
- curba AB, corespunzătoare comportării pseudoplastice;
- curba BC, corespunzătoare comportării dilatante;
- dreapta CD, corespunzătoare celui de-al doilea domeniu newtonian.

Curba (2), care reprezintă o generalizare a curbei (1), conține trei domenii de comportare newtoniană (OA, B₁B₂, CD), între care se intercalează un domeniu pseudoplastic (AB₁) și unul dilatant (B₂C).

Pe baza curbei generalizate de curgere, precum și prin posibilitatea restrângerii, lărgirii sau contopirii domeniilor, se pot explica toate tipurile de comportări reologice:

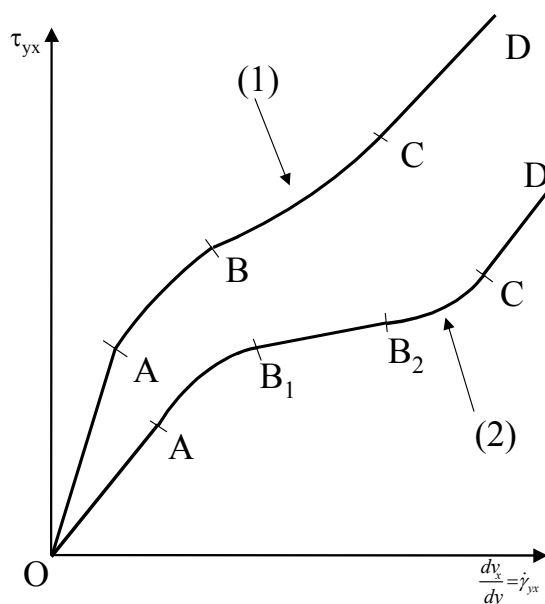


Fig. 3.16. Curbe generalizate de curgere

care primul domeniu newtonian, domeniul pseudoplastic și uneori o parte din al doilea domeniu newtonian, apar succesiv la viteze de forfecare mici și nu pot fi separate pe cale experimentală.

Corpul plastic: Materialul cu curbă generalizată de curgere la care primul domeniu newtonian se suprapune pe axa tensiunilor de forfecare, după care urmează domeniul pseudoplastic și, posibil, o parte din al doilea domeniu newtonian.

Plasticul Bingham: Corpul cu curbă generalizată de curgere, la care primul domeniu newtonian coincide cu axa tensiunilor, domeniul de comportare pseudoplastică este atât de restrâns, încât primul domeniu newtonian pare să fie urmat de cel de-al doilea domeniu newtonian, iar domeniul dilatant nu mai poate fi obținut pe cale experimentală.

Lichidul Ostwald: Un material cu curbă generalizată de curgere, la care al doilea domeniu newtonian este atât de restrâns încât se reduce la un punct de inversiune ce marchează trecerea de la domeniul pseudoplastic la cel dilatant.

Conceptul de curbă generalizată de curgere este important atât pentru comportarea reologică a fluidelor, cât și pentru comportarea reologică a solidelor.

Fluidul newtonian: Un corp cu o curbă generalizată de curgere, la care modificarea comportării după punctul A, apare la viteze de forfecare foarte mari, nerealizabile experimental.

Lichidul pseudoplastic: Corpul la care curba generalizată de curgere poate fi stabilită pe cale experimentală până la o limită situată între punctele A și B₂, în condiții de curgere laminară.

Lichidul dilatant: Materialul cu curbă generalizată de curgere, pentru

3.2. STATICA FLUIDELOR

Statica fluidelor se ocupă cu legile repausului fluidelor și cu interacțiunile dintre fluide și suprafețele solide cu care acestea vin în contact. Un fluid este în echilibru (repaus) atunci când rezultanta forțelor care acționează asupra masei de fluid este nulă. Echilibrul este considerat **absolut** dacă fluidul este în repaus față de un sistem de referință fix (ex: repausul unui fluid dintr-un rezervor static), respectiv **relativ** dacă fluidul este în repaus față de un sistem de referință mobil (ex: repausul unui fluid dintr-o cisternă în deplasare, repausul unui lichid dintr-o centrifugă aflată în mișcare de rotație).

3.2.1. Forțe care acționează în fluide

Forțele care acționează asupra unei mase de fluid pot fi grupate în forțe masice și forțe de suprafață (superficiale).

3.2.1.1. Forțe de masă

Sunt acele forțe care acționează în fiecare punct al masei de fluid, sunt determinate de câmpul de forțe externe în care se află fluidul (câmp gravitațional, centrifugal, electric, etc.) și sunt proporționale cu masa fluidului. Astfel de forțe sunt: forța gravitațională, forța centrifugă, forța inerțială, forța electromagnetică, etc.

Forțele unitare de masă se definesc prin relația:

$$\vec{F}_m = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\rho \cdot \Delta V} = \frac{d\vec{F}_m}{\rho \cdot dV} \quad (3.34)$$

și au formula dimensională $|\vec{F}_m| = \frac{\text{Forța}}{\text{Masa}} = \frac{\text{Masa} \cdot \text{Acceleratie}}{\text{Masa}} = L \cdot T^{-2}$.

Din punct de vedere matematic sunt mărimi vectoriale (tensori de ordinul 1).

3.2.1.2. Forțe de suprafață

Sunt forțe care acționează asupra suprafețelor de delimitare a masei de fluid și sunt rezultatul interacțiunii dintre moleculele de fluid din interiorul volumului V de fluid cu moleculele fluidului înconjurător sau cu suprafețele solide cu care fluidul vine în contact. Astfel de forțe sunt forțele de presiune, forțele de frecare la curgerea fluidelor, etc.

Notând cu $\Delta \vec{F}_s$ forța de suprafață aplicată pe aria ΔA care mărginește volumul de fluid ΔV , forța unitară de suprafață (tensiunea, efortul unitar) se definește prin relația:

$$\vec{F}_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_s}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_m}{dA} \quad (3.35)$$

cu formula dimensională

$$|\vec{F}_s| = \frac{\text{Forța}}{\text{Suprafața}} = \frac{\text{Masa} \cdot \text{Acceleratie}}{\text{Suprafața}} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

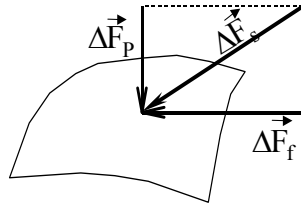


Fig. 3.17. Descompunerea forțelor de suprafață

Din punct de vedere matematic, forțele superficiale sunt mărimi tensoriale de ordin 2.

În cazul general, forța de suprafață $\Delta \vec{F}_s$ este înclinată în raport cu suprafața ΔA pe care acționează, ea putând fi descompusă în două componente (fig. 3.17):

- o componentă **normală** la suprafața ΔA : forța de presiune $\Delta \vec{F}_p$;
- o componentă **tangentă** la suprafața ΔA : forța de frecare $\Delta \vec{F}_f$.

În mod analog, tensiunea se descompune în:

- tensiunea normală (sau compresiunea), numită și presiune hidrodinamică sau presiune:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_p}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_p}{dA} \quad (3.36)$$

- tensiunea tangențială (sau tensiunea de forfecare):

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_f}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_f}{dA} \quad (3.37)$$

3.2.2. Presiunea statică

Tensiunea normală (de compresiune) caracterizată prin: (1) perpendicularitate pe suprafața pe care acționează; (2) orientare către interiorul volumului de fluid considerat; (3) valoare identică pe orice

FENOMENE DE TRANSFER

direcție (devenind astfel o mărime scalară) poartă denumirea de **presiune statică**, fiind definită de relația:

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_P}{\Delta A} = \frac{dF_P}{dA} \quad (3.38)$$

având formula dimensională $|P| = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$.

Presiunea statică este o mărime scalară care caracterizează intensitatea stării de tensiune a unui fluid și intervine în ecuația de stare a fluidelor:

$$f(P, V, T) = 0 \quad (3.39)$$

Unitatea de măsură a presiunii în SI este pascalul (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

O unitate tolerată (dar nerecomandată) este barul:

$$1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Alte unități (unele folosite încă frecvent în diverse ramuri ale tehnicii) sunt: atmosfera fizică (atm), atmosfera tehnică (at), torrul (1 torr = 1 mm col Hg), mm coloană de apă (mm col H₂O sau mm CA), kgf/m², dyn/cm², psi (lb/in²), etc.

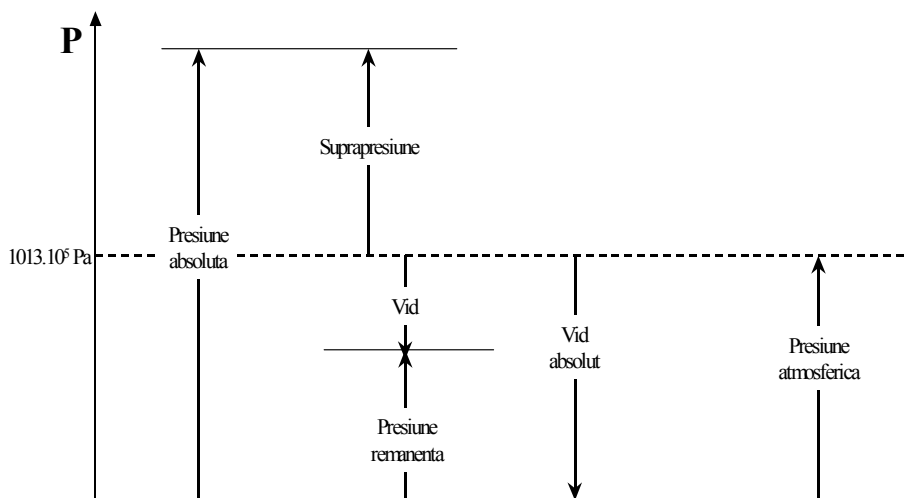


Fig. 3.18. Moduri de exprimare a presiunii

Pentru măsurarea presiunii se utilizează două baze (presiuni de referință), așa cum reiese și din fig. 3.18. În mod frecvent se iau ca presiuni de referință **presiunea atmosferică** sau **presiunea zero**, corespunzătoare unui **vid absolut**.

Presiunea absolută este presiunea totală exercitată de fluid, măsurată de la un vid absolut.

Suprapresiunea sau **presiunea efectivă** reprezintă excesul de presiune ce depășește presiunea atmosferică. Dacă la presiunea efectivă se adaugă presiunea atmosferică, se obține presiunea absolută:

$$P_{abs} = P_{ef} + P_{atm} \quad (3.40)$$

Vidul reprezintă un caz special al presiunii diferențiale utilizat în cazul presiunilor subatmosferice și reprezintă diferența între presiunea atmosferică și presiunea remanentă. Presiunea remanentă este mai mică decât presiunea atmosferică și se exprimă sub formă de presiune absolută.

3.2.3. Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

În interiorul unui fluid, presiunea variază în fiecare punct al acestuia după o ecuație de forma:

$$P = f(x, y, z) \quad (3.41)$$

sau, scrisă diferențial:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \quad (3.42)$$

$\partial P/\partial x, \partial P/\partial y, \partial P/\partial z$ reprezentând gradientii presiunii statice după axele de coordonate carteziane. Deducerea acestor gradienti necesită cunoașterea forțelor care acționează asupra fluidului. Fluidul fiind în echilibru rezultanta forțelor care acționează asupra sa este nulă.

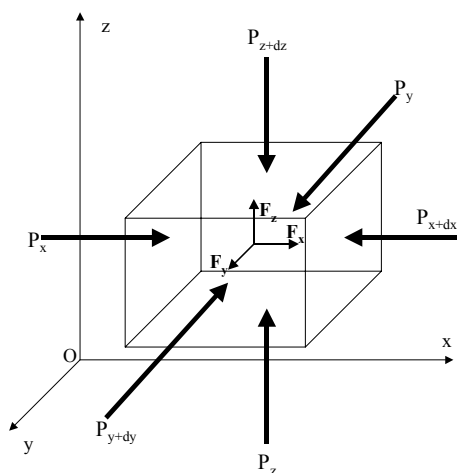


Fig. 3.19. Forțe care acționează asupra unui volum elementar de fluid aflat în echilibru

Se consideră un volum diferențial dV de fluid omogen ($\rho = \text{const.}$) aflat în repaus. Elementul de volum considerat (fig. 3.19) este de formă paralelipedică, având laturile dx, dy, dz . Volumul elementului este:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (3.43)$$

iar masa sa este:

$$m = \rho dV \quad (3.44)$$

Asupra sa acționează forțele de suprafață sub forma forțelor de presiune $\vec{F}_p$ (reamintim că forțele tangențiale sunt nule, fluidul fiind în repaus),

FENOMENE DE TRANSFER

și forțele masice $\vec{F}$. În fig. 3.19 sunt reprezentate proiecțiile forțelor pe axele de coordonate; P reprezintă presiunea statică, iar F_x , F_y , F_z forțele unitare masice.

Condiția de echilibru cere ca suma proiecțiilor forțelor care acționează asupra volumului elementar de fluid pe axele de coordonate să fie nulă. Această condiție se poate scrie astfel pentru axele de coordonate x , y și z :

$$\begin{aligned} P|_x dydz - P|_{(x+dx)} dydz + \rho dx dy dz F_x &= 0 \\ P|_y dx dz - P|_{(y+dy)} dx dz + \rho dx dy dz F_y &= 0 \\ P|_z dx dy - P|_{(z+dz)} dx dy + \rho dx dy dz F_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ținând cont că:

$$\Psi|_{(w+dw)} = \Psi|_w + \frac{\partial \Psi}{\partial w} dw \quad (3.46)$$

după înlocuiri, simplificări și împărțirea fiecărei ecuații prin dV , ecuațiile (3.45) devin:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho F_x \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho F_y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho F_z \quad (3.47)$$

Ecuațiile (3.47) sunt **ecuațiile diferențiale de echilibru** ale fluidului cunoscute și ca **ecuațiile Euler**.

Introducând (3.47) în (3.42) se obține **ecuația diferențială a staticii fluidelor**:

$$dP = \rho(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (3.48)$$

Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt vectorii unitate (versorii) pe axele Ox , Oy , Oz , din (3.42) și (3.47) rezultă:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right) = (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \quad (3.49)$$

sau:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } P = \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.50)$$

forma vectorială a ecuației Euler, în care operatorul ∇ (nabla) aplicat unei funcții $\Psi(x, y, z)$ are expresia:

$$\nabla \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \vec{k} \quad (3.51)$$

Ecuația (3.50) este valabilă atât pentru repausul absolut cât și pentru repausul relativ al fluidelor.

3.2.4. Fluide în echilibru absolut

3.2.4.1. Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

Într-un fluid omogen ($\rho = \text{const.}$), aflat în repaus în câmp gravitațional, acționează ca forță de masă forța gravitațională, ale cărei componente sunt:

$$F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = g$$

unde g reprezintă accelerația gravitațională. Înlocuind aceste expresii în (3.47) ecuațiile diferențiale de echilibru devin:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \quad (3.52)$$

iar ecuația (3.48) devine:

$$dP = \rho \cdot g \cdot dz \text{ sau } \int_{P_0}^P dP = \rho g \int_{H_0}^H dz \quad (3.53)$$

din care rezultă:

$$P - P_0 = \rho g (H - H_0) \quad (3.54)$$

Dacă P_0 reprezintă presiunea la suprafața unui lichid ($H_0 = 0$), ecuația (3.54) devine:

$$P = P_0 + \rho \cdot g \cdot H \quad (3.55)$$

Relația (3.55) arată că presiunea într-un lichid (considerat incompresibil) crește liniar cu adâncimea. Diferența:

$$P - P_0 = \rho \cdot g \cdot H = \gamma \cdot H \quad (3.56)$$

poartă denumirea de **presiune piezometrică** și reprezintă presiunea exercitată de un lichid, egală cu greutatea coloanei de lichid de deasupra punctului pentru care se măsoară presiunea piezometrică; H este înălțimea coloanei de lichid deasupra punctului considerat (sau adâncimea punctului în lichid), iar γ este greutatea specifică a lichidului (greutatea unității de volum).

În cazul fluidelor compresibile (gaze sau vapori) aflate în repaus izoterm, integrarea ecuației (3.53) se efectuează ținând cont că densitatea fluidului variază cu presiunea acestuia.

Aplicația 3.1.

Să se exprime variația pe înălțime a presiunii statice exercitate de o coloană de gaz a cărei comportare poate fi descrisă utilizând modelul gazului ideal.

Analizând ecuațiile (3.52) – (3.56) se poate constata că, într-un fluid omogen, incompresibil, aflat în echilibru în câmp de forțe gravitațional

- presiunea statică este direct proporțională cu înălțimea coloanei de lichid;
- suprafețele izobare (suprafețe de egală presiune) sunt plane orizontale de ecuație $z = \text{const.}$; pe baza acestui fapt se explică principiul vaselor comunicante și aplicațiile acestui principiu (sticla de nivel, manometrul, manometrul diferențial);
- orice variație a presiunii într-un punct oarecare al lichidului se transmite cu intensitate egală în toată masa fluidului (principiul lui Pascal); pe baza acestui principiu sunt construite presele hidraulice.

3.2.4.2. Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

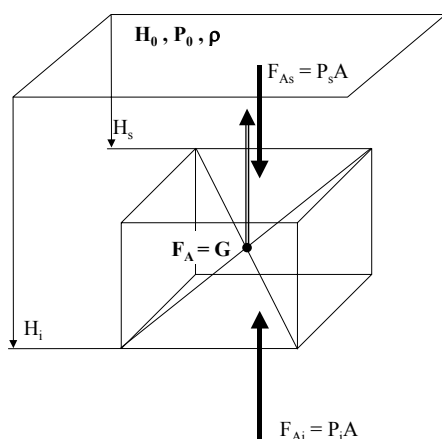


Fig. 3.20. Ilustrarea principiului lui Arhimede

Asupra unui corp imersat într-un fluid aflat în echilibru, efectul presiunii statice se manifestă ca o forță F_A (numită și **forță arhimedică**), egală cu greutatea volumului de fluid dislocuit de corp (G), orientată de jos în sus și având punctul de aplicație în centrul de greutate al corpului imersat.

Se consideră cazul unui corp paralelipipedic (fig. 3.20) cufundat într-un fluid omogen având densitatea ρ .

Forțele rezultate din presiunea hidrostatică pe fețele laterale ale paralelipipedului se echilibrează două câte două, ca fiind egale și de sens opus. Forțele de pe fața superioară (F_{As}) și inferioară (F_{Ai}) vor fi, conform ecuației (3.54):

$$F_{As} = P_s \cdot A = (\rho \cdot g \cdot H_s + P_0) \cdot A$$

$$F_{Ai} = P_i \cdot A = (\rho \cdot g \cdot H_i + P_0) \cdot A$$

în care P_s și P_i sunt presiunile hidrostatice pe fețele superioară și respectiv inferioară ale paralelipipedului, A este aria fiecăreia dintre aceste fețe, P_0 este presiunea la suprafața lichidului, iar H_s și H_i sunt adâncimile la care se găsesc fața superioară și respectiv inferioară a corpului imersat. Forța rezultantă pe direcția z va fi:

$$F_A = F_{Ai} - F_{As} = \rho \cdot g \cdot (H_i - H_s) \cdot A = \rho \cdot g \cdot H \cdot A = \rho \cdot g \cdot V = g \cdot m = G$$

Același rezultat, $F_A = G$ se va obține indiferent de forma corpului imersat.

Principiul lui Arhimede se aplică și în cazul unui corp parțial imersat într-un lichid, caz în care se consideră numai volumul părții de corp scufundate.

Aplicația 3.2.

Să se determine forța de plutire (forța arhimedică) în cazul următoarelor corpuri complet imersate în fluid:

- un cilindru cu diametrul D și înălțimea H , orientat cu generatoarea paralelă cu axa Oz ;
- o sferă de rază R ;

precum și în cazul unor corpuri parțial imersate:

- un cilindru cu diametrul D și înălțimea H , orientat cu generatoarea paralelă cu axa Ox , imersat până la jumătate;
- o sferă de rază R imersată până la jumătate.

3.2.5. Fluide în echilibru relativ

Asupra unui fluid aflat în repaus relativ față de un sistem de referință mobil care se mișcă accelerat, acționează și forțele masice inerțiale datorită deplasării fluidului odată cu sistemul de referință. Gazele fiind fluide ușoare (cu densitate mică), au forțe de inerție neglijabile. Ca urmare, prezintă importanță studiul echilibrului relativ al lichidelor, a căror forță de inerție este apreciabilă.

3.2.5.1. Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

Fie $\vec{F}_i$ forțele unitare de inerție și F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} proiecțiile acestora pe axele de coordonate ale sistemului de referință $Oxyz$ mobil (solidar cu recipientul în care se află lichidul). Fie $\vec{F}_g$ forțele unitare gravitaționale și F_{gx} , F_{gy} , F_{gz} proiecțiile acestora pe axele sistemului de referință considerat. Fie $\vec{F}_p$ forțele de presiune și P presiunea statică ce acționează asupra unui volum elementar de fluid, considerat paralelipipedic, având volumul $dV = dxdydz$ și masa $m = \rho dV$. Condiția de echilibru cere ca rezultanta dintre forțele unitare de inerție, gravitaționale și de presiune să fie nulă:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_g + \vec{F}_p = 0 \quad (3.57)$$

Aplicând un raționament similar celui expus în secțiunea 3.2.3, se obține sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho(F_{ix} + F_{gx}) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \rho(F_{iy} + F_{gy}) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \rho(F_{iz} + F_{gz}) \end{cases} \quad (3.58)$$

sau vectorial:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_g = \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (3.59)$$

Înlocuind ecuațiile (3.58) în ecuația (3.42) se obține **ecuația diferențială a echilibrului relativ al fluidelor**:

$$dP = \rho[(F_{ix} + F_{gx})dx + (F_{iy} + F_{gy})dy + (F_{iz} + F_{gz})dz] \quad (3.60)$$

sau, în forma integrală:

$$P = \int \rho[(F_{ix} + F_{gx})dx + (F_{iy} + F_{gy})dy + (F_{iz} + F_{gz})dz] + C \quad (3.61)$$

Ecuația (3.61) exprimă repartitia presiunilor hidrostatice într-un lichid aflat în repaus relativ; constanta de integrare C se determină dintr-o condiție la limită, într-un punct oarecare de pe suprafața liberă a lichidului, punct în care presiunea P_0 este cunoscută.

3.2.5.2. Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mișcare de rotație uniformă

Să considerăm un vas cilindric de rază R și înălțime H_V , umplut cu lichid până la nivelul H_i (fig. 3.21). Dacă vasul este în repaus, suprafața liberă a lichidului este plană, paralelă cu planul xOy , întrucât singura forță de masă care acționează asupra lichidului este forța gravitațională. Atunci când vasul începe să se rotească în jurul axei sale verticale, lichidul se va roti și el în jurul axei vasului, cu aceeași viteză unghiulară ω (considerând că frecarea internă în lichid este nulă, iar stratul de lichid aflat în contact cu peretele vasului se mișcă solidar cu acesta). În această situație, în fiecare punct al masei de lichid vor acționa următoarele forțe masice unitare:

- accelerația gravitațională, g ;
- accelerația centrifugală $\omega^2 r$, r fiind raza de rotație a particulei.

Suprafața liberă a lichidului va lua o astfel de formă încât orice element de suprafață să fie normal la rezultanta celor două forțe masice (forța gravitațională, $\vec{F}_g$ și forța centrifugă, $\vec{F}_c$).

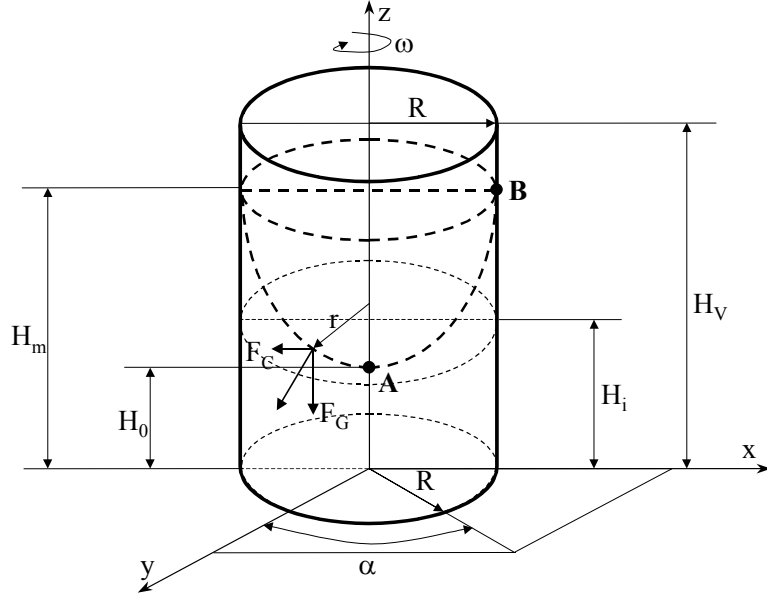


Fig. 3.21. Vas cilindric cu lichid în mișcare de rotație

Dacă viteza unghiulară ω este constantă, mișcarea de rotație este uniformă și se realizează un echilibru relativ între forțele masice și cele de suprafață. Pe baza ecuațiilor deduse în secțiunea 3.2.5.1. se poate stabili legea distribuției presiunilor în lichid.

Componentele accelerației gravitaționale pe axele de coordonate sunt:

$$F_{gx} = 0 \quad F_{gy} = 0 \quad F_{gz} = -g \quad (3.62)$$

Componentele accelerației centrifugale pe axele de coordonate sunt:

$$F_{cx} = \omega^2 x \quad F_{cy} = \omega^2 y \quad F_{cz} = 0 \quad (3.63)$$

Cu aceste înlocuiri, ecuațiile (3.58) devin:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \omega^2 x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \omega^2 y \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (3.64)$$

iar ecuația diferențială a echilibrului relativ (3.60) devine:

$$dP = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) \quad (3.65)$$

Dacă ținem cont că:

$$x = r \sin \alpha \quad y = r \cos \alpha \quad (3.66)$$

și

$$dx = dr \sin \alpha - r \cos \alpha \quad dy = dr \cos \alpha + r \sin \alpha \quad (3.67)$$

după înlocuiri și efectuarea calculelor, (3.65) devine:

$$dP = \rho(\omega^2 r dr - g dz) \quad (3.68)$$

FENOMENE DE TRANSFER

Considerând $\rho = \text{const.}$ și $\omega = \text{const.}$ și integrând ecuația (3.65) pentru o înălțime oarecare H , obținem:

$$P - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho g H = C \quad (3.69)$$

unde C reprezintă constanta de integrare. Aceasta se determină pentru cazul particular al punctului A, în care: $r = 0$ ($x = 0$; $y = 0$), $H = H_0$ și $P = P_0$. În aceste condiții:

$$C = P_0 + \rho g H_0 \quad (3.70)$$

Înlocuind în (3.69) obținem:

$$P = P_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \rho g (H_0 - H) \quad (3.71)$$

Ecuația (3.71) reprezintă **ecuația distribuției presiunilor într-un fluid incompresibil aflat în mișcare de rotație uniformă**. Suprafața liberă a lichidului și orice suprafață de nivel izobară este un paraboloid de rotație cu axa verticală Oz . Din expresia (3.71) se pot calcula:

- distribuția presiunilor pe peretele vasului ($r = R$):

$$P = P_0 + \rho g \left(H_0 - H + \frac{\omega^2 R^2}{2g} \right) \quad (3.72)$$

- distribuția presiunilor pe fundul vasului ($H = 0$):

$$P = P_0 + \rho g \left(H_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) \quad (3.73)$$

Nivelul maxim (H_m) al lichidului în vasul care se rotește se obține punând condiția ca volumul lichidului din vas să fie constant înainte și după rotație:

$$\pi R^2 H_i = \pi R^2 H_0 + \frac{1}{2} \pi R^2 (H_m - H_0) \quad (3.74)$$

sau: $2H_i = H_0 + H_m \quad (3.75)$

În punctul B: $P = P_B = P_0$ (suprafața liberă a lichidului este o curbă de nivel izobară), $r = R$ și $H = H_m$. În aceste condiții, din (4.69), constanta de integrare C are valoarea:

$$C = P_0 - \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 + \rho g H_m \quad (3.76)$$

Deoarece C are aceeași valoare pentru orice punct de pe o suprafață izobară, prin egalarea ecuațiilor (3.69) și (3.76) se obține:

$$H_m - H_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (3.77)$$

Exprimându-l pe H_0 din (3.75) și introducându-l în (3.77) rezultă:

$$H_m = H_i + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (3.78)$$

Analizând ecuația (4.78) se constată că înălțimea la care se ridică lichidul pe pereții vasului aflat în mișcare de rotație uniformă este direct proporțională cu pătratul vitezei unghiulare și cu pătratul razei recipientului.

Aplicația 3.3.

Să se stabilească forma suprafeței lichidului din tamburul unei centrifuge aflate la viteze mari de rotație ($\omega^2 r \gg g$), precum și profilul distribuției presiunilor în lichid.

3.2.6. Forțe de presiune hidrostatică

Fluidele exercită forțe de presiune asupra contururilor solide (pereții recipientilor și conductelor, corpuri imersate) cu care vin în contact. Aceste forțe de presiune se exprimă în funcție de efortul unitar de compresiune P , conform relației:

$$dF_p = \vec{P}dA = Pd\vec{A} \quad \text{sau} \quad F_p = \int_A PdA \quad (3.79)$$

în care A este aria suprafeței pe care acționează fluidul.

Cunoașterea forțelor de presiune $\vec{F}_p$ este necesară în vederea dimensionării din punct de vedere al rezistenței mecanice a utilajelor și instalațiilor. Pentru calculul de rezistență mecanică este necesară cunoașterea **valorii** (modulului) forței rezultante de presiune, **orientării** (ca direcție și ca sens) acesteia precum și a **punctului său de aplicație**, denumit și **centru de presiune**.

În cazul **suprafețelor plane**, toate forțele elementare de presiune sunt perpendiculare pe suprafață și sunt paralele între ele. Rezultanta lor va avea aceeași direcție și sens, de la fluid către suprafață.

În cazul **suprafețelor plane orizontale** (fundul unui rezervor sau al unui canal, de ex.) asupra căroră acționează presiunea hidrostatică a unui lichid, presiunile sunt egale pe toată suprafața, iar forța de presiune orizontală F_{P_0} este dată de relația:

$$F_{P_0} = (P - P_0)A = \rho g H A \quad (3.80)$$

în care:

- P - presiunea exercitată de lichid pe suprafața solidă (Pa);
- P_0 - presiunea la suprafața lichidului (Pa);
- H - înălțimea coloanei de lichid deasupra suprafeței solide (m);
- A - aria suprafeței solide orizontale (m²).

În cazul **suprafețelor plane verticale** (pereții laterali ai unui rezervor prismatic, baraje, deversoare, șicane verticale, etc.) forțele de presiune sunt variabile pe înălțime, crescând cu creșterea adâncimii. Este de preferat ca solicitările provenite din presiunea hidrostatică:

$$P = P_0 + \rho g H \quad (3.81)$$

să se separe în:

- o solicitare provenită din acțiunea presiunii P_0 (F_{P1}), de valoare constantă, cu punctul de aplicație în centrul de greutate al ariei suprafeței A , solicitare dată de relația:

$$F_{P1} = P_0 \cdot A \quad (3.82)$$

- o solicitare provenită din acțiunea presiunii piezometrice a lichidului ($P - P_0$), solicitare notată cu F_{P2} , reprezentând rezultanta forțelor elementare de presiune. Această rezultantă crește cu creșterea adâncimii și are punctul de aplicație în centrul de presiune al suprafeței A :

$$F_{P2} = \int_A (P - P_0) dA = \rho g b \int_{H_0=0}^H h dh = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \quad (3.83)$$

în care:

- b - lățimea suprafeței plane verticale (m);
- h - înălțimea curentă a suprafeței plane verticale (m);
- dh - înălțimea diferențială a suprafeței plane verticale (m);
- H - adâncimea lichidului (m);
- H_0 - nivelul suprafeței lichidului (m).

Poziția centrului de presiune C (care nu coincide întotdeauna cu poziția centrului de greutate G al suprafeței plane fiind situat mai jos) se definește prin coordonatele x_C și y_C față de axele Ox , respectiv Oy ; aceste coordonate se determină egalând sumele momentelor forțelor elementare față de cele două axe cu momentul rezultantei lor, față de aceleași axe:

$$\begin{aligned} F_{P2} \cdot x_C &= x \cdot \int_A dF_{P2} \\ F_{P2} \cdot y_C &= y \cdot \int_A dF_{P2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Aplicația 3.4.

Să se determine valorile forțelor care solicită fundul și pereții unui rezervor paralelipipedic (lung de 2 m, lat de 1 m și adânc de 3 m) și centrul de presiune corespunzător, dacă rezervorul este umplut cu 6000 kg lichid având densitatea de 1500 kg/m^3 . Presiunea P_0 la suprafața lichidului din rezervor este de 0,1 MPa.

În cazul **suprafețelor plane înclinate** sub un unghi θ față de suprafața liberă a lichidului, solicitarea provenită din acțiunea presiunii P_0 este:

$$F_{P_0} = P_0 \cdot A \quad (3.85)$$

și are punctul de aplicație în centrul de greutate al suprafeței A , iar solicitarea provenită din acțiunea presiunii piezometrice ($P - P_0$) este egală cu produsul dintre presiunea din centrul de greutate G al suprafeței A și aria acesteia:

$$F_p = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \int_A y dA = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot A_x = P_G \cdot A \quad (3.86)$$

în care:

A_x - momentul static al suprafeței A față de axa Ox ;

P_G - presiunea în centrul de greutate al suprafeței A .

Punctul de aplicație al solicitării datorate presiunii piezometrice este centrul de presiune C , ale cărui coordonate sunt:

$$x_C = \frac{I_{xy}}{A_x} \quad ; \quad y_C = \frac{I_x}{A_x} \quad (3.87)$$

în care:

I_{xy} - momentul centrifugal al suprafeței A față de axele Ox și Oy ;

I_x - momentul de inerție axial al suprafeței A față de axa Ox .

Dacă suprafața A se află în contact cu un gaz având presiunea P , valoarea modulului forței de presiune este:

$$F_p = P \cdot A \quad (3.88)$$

iar centrul de presiune coincide cu centrul de greutate al suprafeței întrucât presiunea se manifestă cu aceeași intensitate pe întreaga suprafață, iar greutatea gazului este neglijabilă.

În cazul **suprafețelor curbe**, forțele de presiune nu pot fi reduse la o rezultantă unică decât în unele cazuri particulare (suprafețe sferice sau cilindrice, de ex.). Pentru suprafețele curbe care nu admit o rezultantă unică, se reduce sistemul de forțe elementare la un punct convenabil ales și se obține rezultanta sistemului (forța de presiune) – calculabilă cu relația (3.79) – și un cuplu (moment) resultant.

Aplicația 3.5.

Să se determine forța de presiune care acționează asupra pereților tamburului unei centrifuge (cilindru de rază R) care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω . Presiunea la suprafața lichidului se consideră a fi egală cu P_0 .

(Indicație: Se consideră $\omega^2 r \gg g$, astfel încât lichidul se distribuie pe pereții tamburului sub forma unui inel cilindric de rază interioară R_0 .)

3.3. DINAMICA FLUIDELOR

Dinamica fluidelor studiază mișcarea fluidelor și interacțiunea acestora cu corpurile solide, ținând seama de forțele care determină starea de mișcare și de transformările energetice produse în timpul mișcării. La curgerea fluidelor reale, o parte din energia mecanică a fluidului este disipată ireversibil sub formă de energie termică, fenomen datorat viscozității fluidelor și interacțiunii fluidelor cu contururile solide.

Pentru caracterizarea mișcării unui fluid este necesară cunoașterea distribuției vitezelor, presiunii și temperaturii în masa de fluid, parametri care depind de o serie de factori ca: forma și dimensiunile spațiului de curgere, debitul fluidului, câmpul de forțe care acționează asupra fluidului, etc. Datorită complexității fenomenului și a numărului mare de parametri care îl influențează, rezolvarea analitică a problemelor de curgere este posibilă doar pentru cazuri simple sau simplificate. În majoritatea cazurilor însă, se apelează la îmbinarea metodelor teoretice cu determinările experimentale.

3.3.1. Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

Câmpul reprezintă distribuția valorilor unei mărimi în toate punctele sistemului considerat, în funcție de timp, sau la un moment dat.

Traectoria unei particule de fluid este curba formată de mulțimea punctelor prin care trece centrul de greutate al particulelor aflate în mișcare.

Linia de curent este o curbă imaginară într-un fluida a cărei tangentă în orice punct al ei coincide cu direcția vectorului viteză a particulelor lichide care se află pe această curbă la un moment t dat.

Totalitatea liniilor de curent la un moment t dat formează **spectrul hidrodinamic** al mișcării în acel moment.

Tubul de curent este suprafața formată de totalitatea liniilor de curent care se sprijină pe un contur închis care nu este o linie de curent (fig. 3.23.a). Forma tubului de curent variază în timp dacă mișcarea este nestaționară și rămâne nedeformată dacă mișcarea este staționară. Prin pereții tubului de curent ne se realizează transfer de masă, vitezele fiind tangente la pereții tubului.

Secțiunea unui tub de curent (secțiune vie, secțiune dreaptă, secțiune transversală) este suprafața limitată de tubul de curent, normală pe toate liniile de curent care o străbat (fig. 3.22.a). Secțiunea de curgere este dreaptă dacă liniile de curent sunt paralele între ele (fig. 3.22.b), respectiv curbă dacă liniile de curent nu sunt paralele între ele (fig. 3.22.c).

Un tub de curent a cărui secțiune este suficient de mică pentru a se admite pe ea o distribuție uniformă a vitezelor poartă denumirea de **tub elementar de curent**.

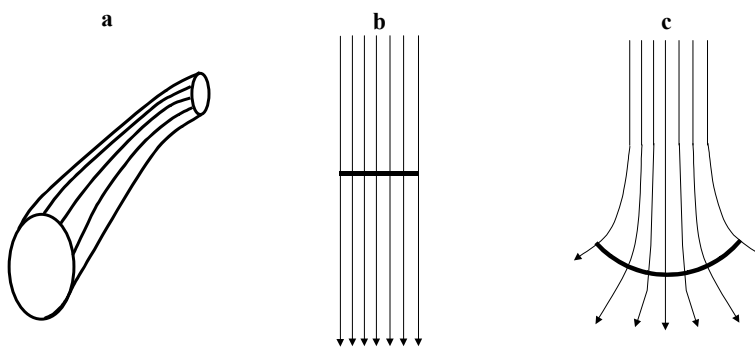


Fig. 3.22. Tub de curent

a – tub de curent; b – secțiune plană de curgere; c – secțiune curbă de curgere

Viteza unei particule de fluid este o mărime vectorială care reprezintă limita deplasării în timp a particulei pe direcția considerată:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t) \quad (3.89)$$

În mod analog se definesc și componentele v_y și v_z ale vitezei.

Variația în timp a vitezei unei particule de fluid este **acelerația** acesteia:

$$\begin{cases} a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{cases} \quad (3.90)$$

Se poate constata că accelerația fluidului este **derivata substanțială** a vitezei acestuia.

Cantitatea de fluid care trece în unitatea de timp printr-o secțiune de arie A poartă denumirea de **debit**. Limita raportului între cantitatea de fluid (exprimată în unități masice, volumice, molare sau de greutate) care trece printr-o secțiune de curgere când Δt tinde spre zero poartă denumirea de **debit instantaneu (momentan)**:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \\ m_V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} \\ m_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} \\ m_G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{dG}{dt} \end{array} \right. \quad (3.91)$$

Dacă mișcarea este nestaționară debitul este variabil în timp. În aceste condiții se definește **debitul mediu** ca fiind cantitatea de fluid ce trece printr-o secțiune într-un interval finit de timp, sau ca media debitelor instantanee:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{m}_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_V \rho dV = \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt \\ \tilde{m}_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_V dV = \int_A v_i dA = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt \\ \tilde{m}_N = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{M \Delta t} \int_V \rho dV = \frac{1}{M} \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{M \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt \\ \tilde{m}_G = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{1}{g \Delta t} \int_V \rho dV = \frac{1}{g} \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{g \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt \end{array} \right. \quad (3.92)$$

unde v_i reprezintă viteza locală în diverse puncte ale secțiunii curentului.

Între diversele moduri de exprimare a debitului există echivalența:

$$m_m = \frac{1}{g} m_G = \rho \cdot m_V = M \cdot m_N \quad (3.93)$$

unde g este accelerația gravitațională, ρ este densitatea fluidului iar M este masa molară a fluidului.

Pentru calculul debitelor medii este necesară cunoașterea funcției $m(t)$ sau legea repartiției vitezelor locale v_i în lungul secțiunii curentului.

Viteza medie este valoarea medie a vitezelor locale; valoarea ei este dată de raportul între debitul volumic de fluid și aria secțiunii de curgere:

$$\tilde{v} = \frac{m_V}{A} = \frac{1}{A} \int_A v_i dA \quad (3.94)$$

Viteza medie este tangentă la axa tubului de curent și are sensul mișcării. Este acea viteză fictivă cu care ar trebui să se deplaseze toate particulele de fluid din secțiunea de curent considerată, astfel încât să se obțină, în unitatea de timp, același debit al tubului de curent.

Fluxul de fluid (denumit și: debit unitar, flux unitar, viteză medie masică, debit specific) este cantitatea de fluid, exprimată în kg, care trece prin unitatea de suprafață (m^2) în unitatea de timp (s). Se obține raportând debitul masic de fluid la aria secțiunii de curgere:

$$m_m^* = \frac{m_m}{A} = \rho \frac{m_v}{A} = \rho \cdot \tilde{v} \quad [kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}] \quad (3.95)$$

3.3.2. Clasificarea mișcării fluidelor

Mișcarea unui fluid este definită dacă în fiecare punct din fluid definit de coordonatele x, y, z și în orice moment t se cunosc valorile **vitezei**, ale **presiunii** și ale **densității**.

Mișcarea fluidelor se poate clasifica după mai multe criterii:

- După condițiile de variație în timp a parametrilor locali:
 - curgere staționară
 - curgere nestaționară
- După condițiile de variație în spațiu a parametrilor locali:
 - curgere unidimensională (unidirecțională)
 - curgere bidimensională (plană sau axial-simetrică)
 - curgere tridimensională (spațială)
- După condițiile de contact cu suprafețele solide care delimitează spațiul de curgere:
 - curgere sub presiune
 - curgere cu suprafață liberă
- După natura câmpului vectorial al vitezelor:
 - curgere irotațională (potențială)
 - curgere rotațională
- După mecanismul curgerii:
 - curgere laminară
 - curgere turbulentă.

Curgerea staționară presupune ca mărimile care descriu mișcarea fluidului (v, P, ρ) sunt invariante în timp (ca mărime și direcție):

$$P = P(x, y, z) ; \quad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z) ; \quad \rho = \rho(x, y, z) \\ \frac{\partial P}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0 \quad (3.96)$$

În cazul curgerii staționare, liniile de curent formează o familie de curbe fixe în spațiu și în timp (care coincid cu traiectoriile particulelor de fluid), tuburile de curent sunt fixe în spațiu, iar debitul masic este constant de-a lungul unui tub de curent.

Curgerea nestaționară este caracterizată prin variația în timp a mărimilor care descriu mișcarea fluidului:

$$P = P(x, y, z, t) ; \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) ; \rho = \rho(x, y, z, t) \quad (3.97)$$

Curgerea unidimensională se dezvoltă de-a lungul unei singure direcții (Ox , de ex.). Viteza mișcării este descrisă de o singură variabilă spațială:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} ; v_y = 0 ; v_z = 0 \quad (3.98)$$

iar accelerația mișcării are o singură componentă, a_x :

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x ; a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} v_x \quad (3.99)$$

exprimată pentru curgerea nestaționară, respectiv pentru curgerea staționară.

Curgerea bidimensională se dezvoltă într-un plan. Curgerea axial-simetrică (în pompe, conducte, reactoare tubulare) fiind identică în plane care trec printr-o axă de simetrie, se reduce la o curgere bidimensională. Dacă planul de curgere este planul xOy , viteza de curgere este:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} ; v_z = 0 \quad (3.100)$$

iar accelerația are două componente nenule ($a_z = 0$), care pentru regim nestaționar au expresia:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y \\ a_y &= \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y \end{aligned} \quad (3.101)$$

Curgerea tridimensională se dezvoltă în spațiu. În acest caz sunt valabile ecuațiile generale ale vitezei (3.89) și ale accelerației (3.90).

În **curgerea sub presiune**, fluidul umple întreg spațiul disponibil mișcării, udând întreg perimetrul secțiunii de curgere (fig. 3.23. a, b, c). Gazele fiind fluide expandabile, curg întotdeauna sub presiune.

Dacă lichidul umple numai parțial spațiul disponibil curgerii, formând o suprafață liberă în contact cu atmosfera sau cu un alt gaz, avem de a face cu o **curgere cu suprafață liberă** (fig. 3.23 d, e, f). Lichidul udă doar parțial perimetrul interior al secțiunii de curgere.

Partea perimetrului secțiunii de curgere aflată în contact cu un contur rigid poartă denumirea de **perimetru udat** (P_u). Raportul dintre aria secțiunii de curgere și perimetrul udat poartă denumirea de **rază hidraulică**:

$$r_h = \frac{A}{P_u} \quad (3.102)$$

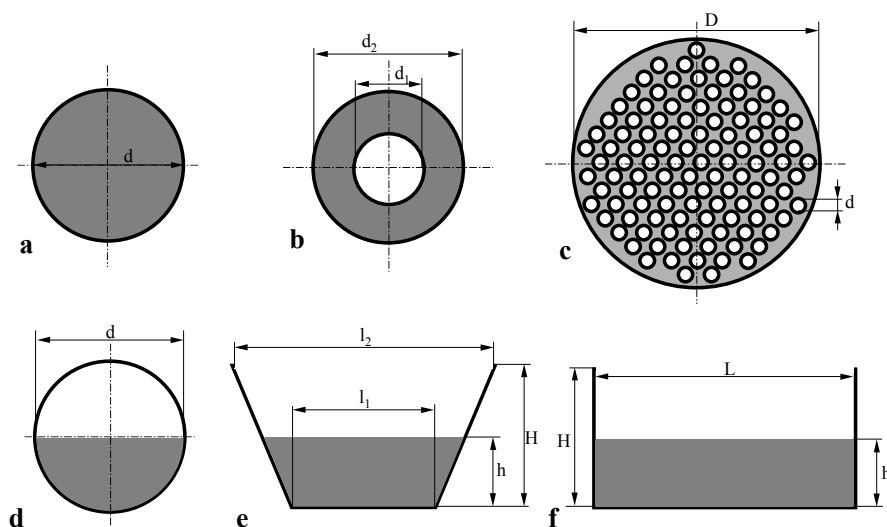


Fig. 3.23. Tipuri de curgere

Curgere sub presiune: a – prin conducte circulare; b – prin spații inelare;

c – prin mantaua unui schimbător de căldură cu fascicul tubular

Curgere cu suprafață liberă: d – prin canale circulare; e – prin canale trapezoidale; f – prin canale dreptunghiulare

În cazul curgerii prin secțiuni cu altă formă decât circulară, se definește un **diametru echivalent al secțiunii de curgere**, (d_{ech});

$$d_{ech} = 4r_h = \frac{4A}{P_u} \quad (3.103)$$

Această noțiune este frecvent întâlnită în dimensionarea echipamentelor bazate (și) pe transferul de impuls.

Aplicația 3.6.

Să se determine expresia diametrului echivalent al secțiunilor de curgere redate în fig. 3.23. În cazul curgerii cu suprafață liberă, se consideră că lichidul umple canalul până la jumătate din înălțimea acestuia.

Curgerea irotațională, numită și **curgere potențială**, este caracterizată de faptul că toate componentele vitezei unghiulare de rotație ω sunt nule:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (3.104)$$

iar gradientii de viteză perpendiculari pe direcția de curgere sunt simetrici:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (3.105)$$

În cazul **curgerii rotaționale**, componentele vitezei unghiulare de rotație ω sunt nenule:

$$\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z \neq 0 \quad (3.106)$$

apărând vârtejuri, curgeri elicoidale, etc. Se pot defini în aceste condiții linii de curent turbionare, care îndeplinesc condiția:

$$\frac{\partial x}{\omega_x} = \frac{\partial y}{\omega_y} = \frac{\partial z}{\omega_z} \quad (3.107)$$

Curgerea laminară se caracterizează din punct de vedere macroscopic printr-o structură ordonată: straturile adiacente de fluid se deplasează paralel, fără amestecare macroscopică între ele. Particulele de fluid își păstrează individualitatea, traiectoriile lor fiind curbe continue de formă regulată. Transportul impulsului în masa de fluid are loc prin mecanism molecular, ca rezultat al mișcării individuale – ciocniri și interferențe – a purtătorilor de impuls de tip molecular: ioni, atomi, molecule. Transportul are loc atunci când între straturile învecinate de fluid există diferențe în concentrația impulsului (straturile au viteze diferite); direcția globală a transportului este în sensul micșorării forței motoare – diferența de impuls. Tensiunile tangențiale care apar la orice element de suprafață care separă două straturi de fluid în mișcare laminară sunt determinate exclusiv de viscozitatea fluidului.

Curgerea turbulentă se caracterizează macroscopic printr-o structură dezordonată: straturile și particulele de fluid se deplasează pe traiectorii neregulate, cu viteze diferite ca sens și mărime, ceea ce determină o amestecare intensă în masa fluidului. Transportul impulsului în masa fluidului în mișcare are loc atât prin mecanism molecular, cât mai ales prin mecanism turbulent (convectiv) ca rezultat al mișcării purtătorilor de impuls de tip turbulent: macroparticule de fluid, agregate polimoleculare, a căror viață și mărime depinde de energia fluidului și de geometria sistemului.

Între mișcarea laminară și cea turbulentă, deosebiri esențiale se datorează dimensiunilor și structurii particulelor care participă la transferul impulsului.

Trecerea de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă se face gradat, existând o zonă a vitezelor fluidului în care mișcarea este tranzitorie. Cantitativ, caracterul laminar sau turbulent al curgerii este determinat de valoarea criteriului Reynolds. La curgerea prin conducte și canale, curgerea se menține laminară pentru valori ale criteriului Re mai mici decât Re_{cr} :

$$Re_{cr} = \frac{\rho \cdot v \cdot d_{ech}}{\mu} = 2300 \quad (3.108)$$

Pentru valori Re cuprinse între 2300 și 10000, curgerea decurge în regim tranzitoriu (intermediar), iar la valori $Re > 10^4$ curgerea este turbulentă. În regim intermediar, curgerea poate rămâne laminară în absența unor promotori de turbulență (trepidații, vibrații exterioare, rugozitatea pereților interiori ai conductei). În anumite condiții, regimul laminar se poate menține și la $Re = 4 \cdot 10^4$.

Din relația (3.108) se poate determina viteza maximă (critică) până la care curgerea unui fluid rămâne laminară:

$$v_{cr} = 2300 \frac{\mu}{\rho \cdot d_{ech}} \quad (3.109)$$

Aplicația 3.7.

Să se determine viteza critică la curgerea izotermă ($T = 298 \text{ K}$) prin conducte circulare cu diametrul interior de 100 mm a următoarelor fluide: benzen, apă, etanol absolut, glicerină, ulei rafinat de floarea – soarelui, lapte degresat.

3.3.3. Stratul limită

În majoritatea cazurilor întâlnite în practică, fluidele curg în prezența unor contururi solide staționare: pereții rezervoarelor, ai conductelor, suprafețele unor corpuri imersate, etc. Ca urmare, viteza stratului de fluid aflat în contact cu conturul solid va fi egală cu viteza acestuia, respectiv va fi nulă pentru contururile solide staționare. Prezența contururilor solide conduce la apariția unor gradienti ai vitezei fluidului normal pe suprafața acestora. În curgerea fluidelor reale, gradientii de viteză generează apariția unor tensiuni tangențiale a căror valoare este direct proporțională cu mărimea gradientului de viteză, în conformitate cu legea de frecare a lui Newton (ec. 3.14). Deoarece tensiunile tangențiale se exercită în sens opus direcției de curgere a fluidului, ele acționează ca forțe de frecare care se opun inegalității vitezelor în diverse puncte ale masei de fluid, reprezentând rezistențe la curgerea (întârzierea) fluidului.

Regiunea din fluid în care viteza acestuia se modifică datorită interacțiunii cu contururile solide poartă denumirea de **strat limită**, noțiune introdusă de către **Prandtl**. Această regiune se întinde de la suprafața conturului solid până la punctul din fluid în care gradientul de viteză (după normala mișcării) devine nul. Întrucât modificarea semnificativă a vitezei se face preponderent în vecinătatea pereților solizi, convențional se definește grosimea stratului limită (δ), măsurată pe distanță normală la perete, ca fiind zona în care viteza fluidului este mai mică decât 99% din valoarea vitezei libere, v_0 .

Deoarece stratul limită constituie acea porțiune a fluidului în care are loc cea mai importantă modificare a vitezelor în lungul secțiunii de curgere, rezultă că aici este practic localizat efectul de frânare al pereților: în stratul limită este disipată energia mecanică a fluidului, ca urmare a rezistenței la înaintare pe care acesta o întâmpină. Formarea stratului limită este importantă nu numai pentru curgerea fluidelor ci - așa cum se va arăta în capitolele următoare - și în transferul de căldură și de masă.

Curgerea fluidului în stratul limită poate fi laminară sau turbulentă.

În fig 3.24.a este prezentat schematic modul de formare al stratului limită la curgerea laminară a unui fluid printr-o conductă circulară dreaptă.

Inițial, la intrarea în conductă, mișcarea fluidului este ideală, distribuția vitezelor în lungul secțiunii de curgere fiind uniformă. Aici grosimea stratului limită este nulă. Datorită efectului de frânare produs de pereți, pe măsură ce fluidul înaintază, profilul vitezelor se modifică.

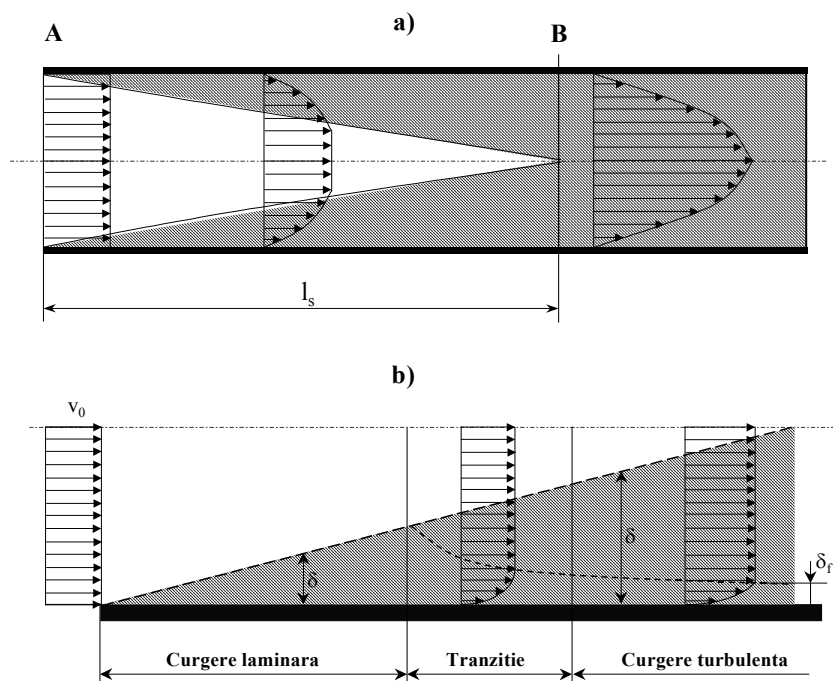


Fig. 3.24. Formarea stratului limită la curgerea fluidelor
a – curgere laminară; b – curgere turbulentă

Apare stratul limită (zona hașurată) a cărei grosime crește, strat limită în care gradientii de viteză sunt nenuli. La un moment dat (în punctul B), grosimea stratului limită devine egală cu raza interioară a conductei. Cele două straturi limită se unesc, iar din acest punct curgerea fluidului și

distribuția vitezelor sunt stabilizate, iar stratul limită este complet format, cuprinzând întreaga secțiune a conductei. Distanța pe care se formează stratul limită și se stabilizează curgerea poartă denumirea de **lungime de stabilizare**, l_s , mărime care poate fi calculată, pentru curgerea în regim laminar, cu ajutorul relației:

$$l_s = 0,0575 \cdot D \cdot Re \quad (3.110)$$

Valoarea l_s este mult influențată de condițiile de intrare ale fluidului în conductă.

În cazul curgerii turbulente (fig. 3.24.b), inițial se formează un strat limită laminar, pentru ca de la un moment dat acesta să devină turbulent, menținându-se totuși în imediata vecinătate a peretelui un film laminar, de grosime δ_f , în care se consideră că mișcarea fluidului este laminară. Între filmul laminar și zona turbulentă există o zonă intermediară în care sunt prezente ambele regimuri de curgere. Tranziția de la un regim la altul este dată de valoarea criteriului Re , de intensitatea turbulenței și de rugozitatea pereților. Pe baza datelor experimentale s-a constatat că regimul turbulent și profilul vitezelor în acest regim se stabilizează după ce fluidul a parcurs o distanță egală cu aproximativ $50D$.

Noțiunile de **film laminar** și **strat limită** nu trebuie confundate; filmul laminar se referă doar la acea parte din stratul limită, imediat adiacentă conturului solid, care rămâne în curgere laminară, în timp ce stratul limită include întreaga zonă în care există o variație a vitezei într-un plan normal pe conturul solid. Curgerea turbulentă nu se extinde până la perete întrucât viteza fluidului în acea zonă este insuficientă pentru promovarea turbulenței. Din acest motiv, curgerea turbulentă este întotdeauna însoțită și de curgere laminară.

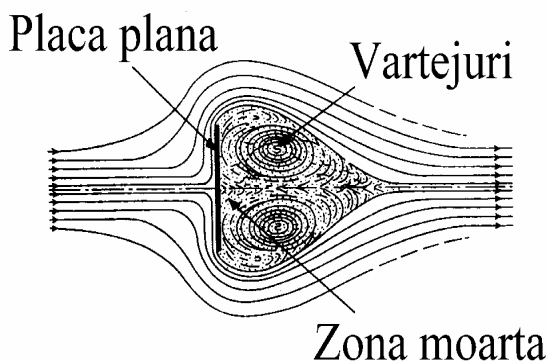


Fig. 3.25. Curgerea cu desprinderea stratului limită

Dacă fluidul în curgere întâlnește obstacol solid (un cilindru, o sferă, o placă plasată sub un anumit unghi față de direcția de mișcare a fluidului, etc.), stratul limită format pe suprafața corpului suferă fenomenul de desprindere în zona în care fluidul este încetinit. Desprinderea stratului limită va conduce la apariția unei zone de turbulență în spatele

obstacolului (fig. 3.25), turbulență care determină pierderi suplimentare de energie, în afara celor determinate de frecarea de suprafață. Posibilitatea desprinderii stratului limită există întotdeauna când presiunea curențului

FENOMENE DE TRANSFER

exterior stratului limită crește în direcția mișcării, deci ori de câte ori viteza fluidului se schimbă brusc (ca mărime sau ca direcție). Cu cât creșterea de presiune este mai mare, cu atât posibilitatea de desprindere a stratului limită este mai mare.

3.3.4. Ecuații de conservare în curgerea fluidelor

Expresiile matematice care descriu cantitativ mișcarea fluidelor au la bază trei dintre legile fizice fundamentale, care se aplică (excepție făcând fenomenele nucleare) oricărei mișcări, independent de natura fluidului considerat:

Legea	Ecuația de conservare
Legea conservării masei	Ecuația de continuitate
Legea mișcării (Legea a II-a a lui Newton)	Ecuația de echilibru dinamic (Ecuația Navier – Stokes)
Legea conservării și transformării energiei (Principiul I al termodinamicii)	Ecuația bilanțului de energie (Ecuația Bernoulli)

Ecuațiile curgerii fluidelor se obțin întocmind bilanțurile globale sau diferențiale de masă, forțe și energii pentru sistemul considerat. Aceste ecuații corelează mărimile fizice care determină un proces dat. De regulă, variabilele independente ale acestor ecuații sunt coordonatele spațiale (x , y , z) și temporale (t), iar variabilele dependente sunt viteza (v), temperatura (T), presiunea (P) și proprietățile fluidului.

3.3.4.1. Ecuațiile de conservare a masei

În conformitate cu legea conservării masei, masa totală a tuturor substanțelor care iau parte într-un proces rămâne constantă. Această lege poate fi exprimată și sub forma următoarei ecuații de bilanț:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{acumulata} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{intrata} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{iesita} \end{array} \right\} \quad (3.111)$$

Se consideră un fluid compresibil, omogen, monocomponent aflat în curgere izotermă, nestaționară, din care se izolează un volum elementar paralelipipedic dV cu laturile dx , dy , dz (fig. 3.26). Bilanțul se întocmește pentru un interval de timp dt . Considerând curgerea fluidului pe o direcție oarecare, pe direcția x intră în elementul de volum dV în intervalul de timp dt cantitatea de substanță:

$$\rho v_x|_x \cdot dydzdt = \rho v_x dydzdt \quad (3.112)$$

și iese cantitatea de substanță:

$$\rho v_x|_{x+dx} \cdot dydzdt = \rho v_x dydzdt + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dydzdt \quad (3.113)$$

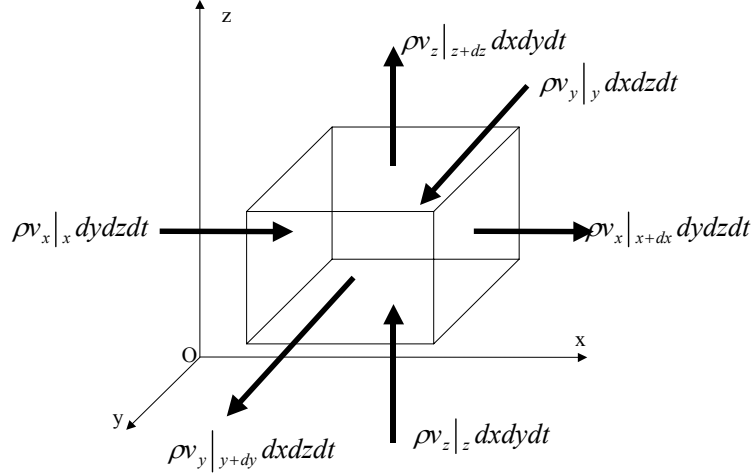


Fig. 3.26. Volum elementar de fluid pentru întocmirea bilanțului de materiale

Expresii similare pot fi scrise și pentru direcțiile y și z :

$$\rho v_y|_y \cdot dx dzdt = \rho v_y dx dzdt \quad (3.114)$$

$$\rho v_y|_{y+dy} \cdot dx dzdt = \rho v_y dx dzdt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy dx dzdt \quad (3.115)$$

$$\rho v_z|_z \cdot dx dydt = \rho v_z dx dydt \quad (3.116)$$

$$\rho v_z|_{z+dz} \cdot dx dydt = \rho v_z dx dydt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dz dx dydt \quad (3.117)$$

Ținând cont de ecuația (3.111), acumularea de substanță pe direcția x , de ex., are expresia:

$$[acumulare]_x = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dydzdt \quad (3.118)$$

Acumularea totală în elementul de volum se poate scrie:

$$[acumulare]_{dV} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dVdt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dydzdt \quad (3.119)$$

Înlocuind expresiile de forma (3.118) în (3.119) se obține expresia acumulării totale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dydzdt = -\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dydzdt \quad (3.120)$$

FENOMENE DE TRANSFER

Împărțind ambii membri prin dV și reordonând termenii se obține ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.121)$$

Ecuția de mai sus reprezintă expresia matematică a legii conservării masei și exprimă faptul că “masa unui sistem nu se schimbă din cauza mișcării”.

Ecuția (3.121) poate căpăta diverse forme particulare:

- Curgerea este unidirecțională ($v_y = v_z = 0$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \quad (3.121.a)$$

- Regimul de curgere este staționar (derivatele în raport cu timpul sunt nule):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.121.b)$$

- Fluidul este incompresibil ($\rho = \text{const.}$ și $D\rho/dt = 0$):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho \nabla v = 0 \text{ echivalent cu } \nabla v = 0 \quad (3.121.c)$$

- Fluidul este incompresibil și curgerea este unidirecțională:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (3.121.d)$$

Toate aceste ecuații se referă la fluide aflate în curgere laminară, când vectorul vitezei din orice punct al domeniului considerat nu variază ca direcție. Tratarea curgerii turbulente necesită introducerea mărimilor medii temporale și a celor fluctuante. Astfel, vectorul v_j (unde j poate fi x , y sau z) se înlocuiește cu:

$$v_j = \tilde{v}_j + v_j' \quad (3.122)$$

în care $\tilde{v}_j$ reprezintă mărimea medie temporală a componentei j a vitezei, iar v_j' reprezintă valoarea fluctuației componentei j a vitezei. Cu aceste modificări, ecuația (3.121.c) capătă forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}_y + v_y') + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{v}_z + v_z') = \nabla \tilde{v} = 0 \quad (3.123)$$

Se constată că ecuațiile (3.121.c) și (3.123) sunt similare, excepție făcând faptul că valorile momentane ale componentelor vitezei sunt înlocuite cu valorile medii temporale.

La curgerea în regim staționar a unui fluid printr-o conductă de secțiune variabilă (fig. 3.27), acumularea este nulă și debitul masic de fluid este constant:

$$m_1 = m_2 = m_3 \quad (3.124)$$

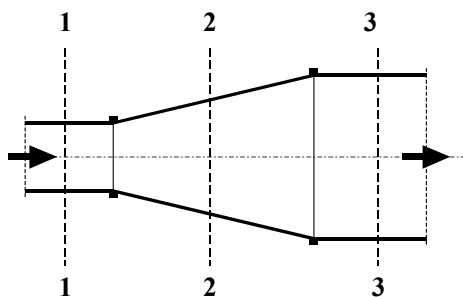


Fig. 3.27. Conductă circulară de secțiune variabilă

sau:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_3 v_3 A_3 \quad (3.125)$$

Dacă fluidul este incompresibil:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \quad (3.126)$$

și ecuația (3.125) se poate reduce la:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 = \text{ct.} \quad (3.127)$$

Produsul $\rho v A$ are dimensiunile $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$, fiind deci un debit masic.

Ținând cont de relația existentă între debitul masic și cel volumic, ecuația (3.127) devine:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 = m_v = \text{const.} \quad (3.128)$$

Ecuația (3.128) este cunoscută și ca **ecuația debitului**, ea fiind relația de legătură între viteza unui fluid (v), debitul său volumic (m_v) și aria secțiunii de curgere (A). Dacă secțiunea de curgere este circulară și curgerea este sub presiune, ecuația permite calculul diametrului secțiunii de curgere:

$$d = \sqrt{\frac{4m_v}{\pi \cdot v}} \quad (3.129)$$

3.3.4.2. Ecuațiile de conservare a impulsului

În conformitate cu cea de a doua legi a mișcării a lui Newton, forțele de inerție ale unui element de fluid în mișcare trebuie să fie egale cu suma forțelor externe care acționează asupra elementului respectiv:

$$F_i = m \cdot a = \frac{d(mv)}{dt} = \sum F_e \quad (3.130)$$

Produsul mv reprezintă impulsul (cantitatea de mișcare) a elementului de fluid considerat, iar derivata sa în raport cu timpul are dimensiunile unei forțe. Ținând cont de aceasta, ecuația de bilanț a impulsului în regim nestaționar se poate scrie ecuația (3.131):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{acumulare} \\ \text{a impulsului} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{intrare a} \\ \text{impulsului} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{iesire a} \\ \text{impulsului} \end{array} \right\} + \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Forte externe ce} \\ \text{actioneaza asupra} \\ \text{elementului de} \\ \text{volum de fluid} \end{array} \right\}$$

Se consideră un volum elementar de fluid $dV = dxdydz$ izolat din masa unui fluid aflat în curgere izotermă, nestaționară, după o direcție arbitrară de curgere (fig. 3.28).

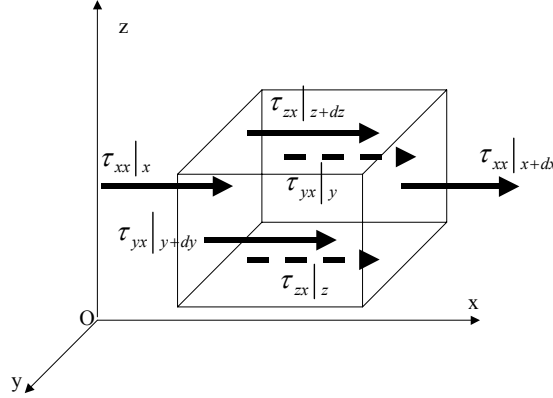


Fig. 3.28. Volum elementar de fluid pentru întocmirea bilanțului impulsului; componentele tensiunilor după direcția x

Transportul impulsului are loc atât prin mecanism molecular, ca rezultat al forțelor de frecare ce apar între straturi adiacente de fluid ce curg cu viteze diferite, cât și prin mecanism convectiv, prin deplasarea masei de fluid sub acțiunea unui gradient de presiune.

Viteza de acumulare a impulsului, după direcția x , în volumul considerat, este dată de produsul dintre variația concentrației impulsului în timp și volum:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \cdot dxdydz \quad (3.132)$$

Componenta impulsului pe direcția x , care intră/iese în/din elementul de volum prin mecanism convectiv este dat de produsul dintre concentrația impulsului pe unitatea de volum și debitul volumic:

$$\begin{aligned} \text{pe fata } x: & \rho v_x \cdot v_x|_x dydz & \rho v_x \cdot v_x|_{x+dx} dydz \\ \text{pe fata } y: & \rho v_x \cdot v_y|_y dxdz & \rho v_x \cdot v_y|_{y+dy} dxdz \\ \text{pe fata } z: & \rho v_x \cdot v_z|_z dxdy & \rho v_x \cdot v_z|_{z+dz} dxdy \end{aligned} \quad (3.133)$$

Viteza cu care componenta x a impulsului intră/iese prin mecanism molecular în/din elementul de volum este dată de produsul dintre tensiunea tangențială și suprafața prin care are loc transferul:

$$\begin{aligned}
 &\text{pe fata } x: \tau_{xx}|_x dydz & \tau_{xx}|_{x+dx} dydz \\
 &\text{pe fata } y: \tau_{yx}|_y dxdz & \tau_{yx}|_{y+dy} dxdz \\
 &\text{pe fata } z: \tau_{zx}|_z dxdy & \tau_{zx}|_{z+dz} dxdy
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Asupra elementului de volum dV mai acționează pe direcția x și forța de presiune și cea gravitațională:

$$(P|_x - P|_{x+dx}) dydz + \rho g_x dxdydz \tag{3.135}$$

Înlocuind (3.132) – (3.135) în ecuația de bilanț (3.131), după trecere la limită, împărțire prin dV și reordonarea termenilor rezultă:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Similar, pentru direcțiile y și z se pot scrie ecuațiile:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Vectorial, ecuațiile (3.136) – (3.138) se pot scrie:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -(\nabla \rho \mathbf{v}) + (\nabla \tau) - (\nabla P) + \rho \mathbf{g} \tag{3.139}$$

Ecuațiile (3.136) – (3.138) pot fi scrise și sub o altă formă. Pentru direcția x , de exemplu, ecuația (3.136) devine:

$$\begin{aligned}
 &\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] + \\
 &+ v_x \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = \\
 &= \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x
 \end{aligned} \tag{3.140}$$

Paranteza primului termen din membrul stâng conține derivata substanțială a vitezei Dv_x/dt , iar paranteza celui de-al doilea termen din membrul stâng este nulă, termenii săi reprezentând ecuația continuității curgerii, (3.121). Ca urmare, ecuația transferului impulsului după direcția x , are în final forma:

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (3.141.a)$$

În mod similar, ecuațiile transferului de impuls după direcțiile y și z au forma:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{dt} &= \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{dt} &= \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (3.141.b,c)$$

sau scrise vectorial:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \nabla \tau - \nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (3.142)$$

Ecuatiile de conservare a impulsului deduse anterior sunt valabile pentru orice fluid aflat în curgere. Pentru obținerea cazurilor particulare ale anumitor fluide, tensorul tensiunilor (τ_{ij}) trebuie explicitat din ecuația reologică corespunzătoare. Astfel, în cazul fluidelor newtoniene, tensorul tensiunilor se corelează cu viscozitatea dinamică a fluidului (μ) și cu gradientii de viteză astfel:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla v \right) = 2\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] \\ \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.143)$$

Înlocuind (3.143) în (3.141), după efectuarea calculelor și derivarea în condițiile curgerii izoterme ($\rho = \text{const.}$ și $\mu = \text{const.}$) se obțin **ecuațiile Navier – Stokes** (3.144).

Ecuatiile Navier – Stokes împreună cu ecuațiile de continuitate, reprezintă rezolvarea teoretică a curgerii fluidelor newtoniene. Integrarea acestor ecuații, pentru a determina valorile variabilelor v_x , v_y , v_z , P , în funcție de timp, pentru punctele unui curent de fluid, nu se poate realiza decât pentru cazuri simple sau simplificate.

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_x}{dt} &= \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla v) + \nabla^2 v_x \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv_y}{dt} &= \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla v) + \nabla^2 v_y \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{dt} &= \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla v) + \nabla^2 v_z \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z\end{aligned}\quad (3.144)$$

În cazul fluidelor ideale, pentru care viscozitatea este nulă, ecuațiile (3.144) iau forma binecunoscută a **ecuațiilor Euler**:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_x}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv_y}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z\end{aligned}\quad (3.145)$$

Aceste ecuații sunt valabile doar în cazurile în care efectele viscozității asupra curgerii sunt neesențiale.

3.3.4.3. Ecuațiile de conservare a energiei

Aceste ecuații exprimă matematic legea conservării energiei, cu ajutorul lor putându-se obține distribuția temperaturilor la curgerea neizotermă a fluidelor (ecuații ce vor fi prezentate în capitolul 4), precum și relațiile de calcul pentru determinarea “pierderilor de energie” prin frecare la curgerea fluidelor prin conducte și utilaje.

La modul cel mai general, bilanțul de energie are forma (3.146):

$$\sum \left[\text{Energii}_{\text{acumulate}} \right] = \sum \left\{ \text{Energii}_{\text{intrate}} \right\} - \sum \left\{ \text{Energii}_{\text{iesite}} \right\}$$

Se consideră (fig. 3.29) un tub de curent de secțiune variabilă, delimitat de secțiunile de curgere (1) și (2). În acest tub de curent, schimbul de energie cu exteriorul constă din introducerea de energie mecanică (W) și de căldură (Q) în sistem. Pe lângă aceste forme de energie, în sistem mai intervin:

- energia potențială (gh);
- energia cinetică ($v^2/2$);
- energia internă (u);

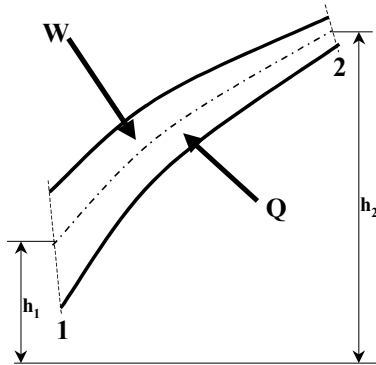


Fig. 3.29. Sistem pentru deducerea ecuației Bernoulli

- lucrul mecanic extern (Pv_s).

Toate aceste energii sunt raportate la unitatea masică de fluid. Pe baza ecuației (3.146), acumularea de energie în sistem se poate scrie:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (u_1 - u_2) + (P_1 v_{s1} - P_2 v_{s2}) + W + Q \quad (3.147)$$

Ecuația (3.147) se mai poate scrie și înlocuind energia internă cu entalpia (H) prin intermediul relației: $H = u + Pv_s$:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (H_1 - H_2) + W + Q \quad (3.148)$$

Variația energiei interne ($u_1 - u_2$) se datorează pe de o parte energiei calorice Q introduse din exterior și pe de altă parte energiei F rezultate din frecări: frecarea internă între straturile de fluid cu viteze diferite, respectiv frecarea externă a fluidului cu pereții. În aceste condiții se poate scrie:

$$u_1 - u_2 = -(\Delta u)_1^2 = -\left(Q + F - \int_1^2 P dv_s\right) \quad (3.149)$$

$$P_1 v_{s1} - P_2 v_{s2} = -[\Delta(Pv_s)]_1^2 = -\left(\int_1^2 P dv_s - \int_1^2 v_s dP\right) \quad (3.150)$$

Înlocuind substituțiile de mai sus în (3.147), aceasta devine în final:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \int_1^2 v_s dP - F + W \quad (3.151)$$

cunoscută și ca **ecuația Bernoulli**. Pentru regim staționar, ecuația Bernoulli capătă forma:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \int_1^2 v_s dP - F + W = 0 \quad (3.152)$$

Dacă regimul de curgere este staționar ($dE/dt = 0$), curgerea este izotermă ($T = \text{const.}$) și fluidul este incompresibil ($v_{s1} = v_{s2}$), atunci:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + v_s(P_1 - P_2) - F + W = 0 \quad (3.153)$$

Înlocuind volumul specific al fluidului funcție de densitatea acestuia: $v_s = 1/\rho$, ecuația (3.153) devine:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} - F + W = 0 \quad [\text{J/kg}] \quad (3.154)$$

$$\rho g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + (P_1 - P_2) - F^* + W^* = 0 \quad [\text{J/m}^3 = \text{N/m}^2]$$

în care:

W energia necesară pentru transportul unității de **masă** de fluid din secțiunea 1 în secțiunea 2;

W^* energia necesară pentru transportul unității de **volum** de fluid din secțiunea 1 în secțiunea 2;

F energia de frecare raportată la unitatea de **masă** de fluid;

F^* energia de frecare raportată la unitatea de **volum** de fluid;

între care există corelațiile:

$$W^* = W\rho \quad \text{și} \quad F^* = F\rho \quad (3.155)$$

Dacă regimul de curgere este staționar ($dE/dt = 0$), curgerea este izotermă ($T = \text{const.}$), fluidul este incompresibil ($v_{s1} = v_{s2}$), ideal (frecare nulă) și nu schimbă energie cu mediul exterior ($W = 0, Q = 0$), atunci:

$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} = \text{const.} \quad (3.156)$$

Împărțind ecuația (3.156) prin g , ecuația Bernoulli devine:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} = H_T = \text{const.} \quad (3.157)$$

în care H_T reprezintă energia specifică a fluidului, denumită și **sarcină hidrodinamică** exprimată în metri coloană de fluid. Această ecuație se mai poate scrie:

$$H_g + H_d + H_p = H_T \quad (3.158)$$

unde sarcina hidrodinamică (înălțimea totală de ridicare a fluidului) este alcătuită din înălțimea geometrică (H_g), înălțimea dinamică (H_d) și înălțimea statică sau piezometrică (H_p). Înmulțind cu ρg în ecuația (3.157) se obține:

$$\rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2 = P_T = \text{const.} \quad (3.159)$$

din care se poate explicita căderea totală de presiune din sistem, ΔP_T , ca o sumă între căderea de presiune geometrică (ΔP_g), căderea de presiune dinamică (ΔP_d) și căderea de presiune statică sau piezometrică (ΔP_{st}):

$$\Delta P_T = \Delta P_g + \Delta P_d + \Delta P_{st} = \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (P_1 - P_2) \quad (3.160)$$

Dacă un fluid ideal se află în curgere izotermă, în regim staționar, fără schimb de energie cu mediul exterior, iar conducta este amplasată orizontal ($h_1 = h_2$), ecuația Bernoulli devine:

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{\rho} = 0 \quad (3.161)$$

Pentru un fluid real aflat în curgere izotermă, în regim staționar, prin conducte orizontale, de secțiune constantă ($v_1 = v_2$), ecuația Bernoulli se scrie:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} - F = 0 \quad \text{echivalent cu:} \quad \frac{\Delta P}{\rho} = F \quad \text{sau:} \quad \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{F}{g} = f \quad (3.162)$$

unde f are dimensiunile unei lungimi și poartă denumirea de **factor de frecare**.

3.4. CURGEREA ÎN SISTEME OMOGENE

3.4.1. Frecarea și căderea de presiune

La curgerea fluidelor reale în contact cu suprafețe solide (prin conducte, prin aparate, peste straturi granulare sau fascicule de țevi), o parte din energia mecanică a fluidului este disipată ireversibil sub formă de energie termică pentru învingerea rezistențelor la curgere pe care acesta le întâmpină în sistem. Forțele care se opun curgerii sunt forțe de frecare. Frecarea generată în straturi limită adiacente frontierelor solide poartă denumirea de **frecare de suprafață** (R_s), în timp ce frecarea generată de desprinderea stratului limită poartă denumirea de **frecare de formă** (R_f). Rezistența totală la curgere (R_T) este dată de ambele tipuri de frecări, ponderea fiecăreia dintre ele fiind dictată de caracteristicile sistemului și de regimul de curgere. În multe cazuri, pierderea de energie suferită de fluidul în curgere este exprimată în termeni de presiuni, de unde și denumirea de **“pierdere (cădere) de presiune”**.

Considerând o porțiune de conductă circulară dreaptă de lungime infinitesimală dl și diametru D , prin care curge un fluid incompresibil, asupra acestuia se exercită două forțe:

- o forță de acțiune dF_A dirijată în sensul curgerii și rezultată din diferența de presiune dP la capetele conductei:

$$dF_A = AdP = \frac{\pi D^2}{4} dP \quad (3.163)$$

- o forță de rezistență dF_R dirijată în sens contrar curgerii, rezultată din frecarea fluidului cu peretele; notând cu τ valoarea tensiunii tangențiale în dreptul peretelui conductei, forța de rezistență pe lungimea dl va fi:

$$dF_R = \pi D \tau dl \quad (3.164)$$

În curgere staționară, cele două forțe sunt egale și se poate scrie:

$$\frac{\pi D^2}{4} dP = \pi D \tau dl \quad (3.165)$$

de unde rezultă valoarea căderii de presiune:

$$dP = 4 \frac{\tau}{D} dl \quad (3.166)$$

Introducând în (3.166) factorul adimensional λ , denumit **coeficient de frecare**, ecuația (3.166) devine:

$$dP = \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2} \rho dl \quad \text{cu:} \quad \lambda = \frac{8\tau}{\rho v^2} \quad (3.167)$$

Integrând ecuația (3.167) cu condițiile la limită:

$$\begin{aligned} l = 0; \quad P &= P_1 \\ l = l; \quad P &= P_2 \end{aligned} \quad (3.168)$$

se obține **ecuația lui Fanning (ecuația Darcy-Weissbach)**, care exprimă căderea de presiune datorată frecării în conducte circulare drepte:

$$P_1 - P_2 = \Delta P = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho \quad [\text{N/m}^2] \quad (3.169)$$

Energia specifică de frecare (energia de frecare raportată la unitatea de masă a fluidului) se deduce din ecuația Bernoulli scrisă în forma simplificată (3.162), rezultând:

$$F = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \quad \text{sau:} \quad f = \frac{F}{g} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (3.170)$$

în care f reprezintă așa-numita “pierdere de sarcină”, respectiv diferența dintre sarcinile dinamice în două secțiuni ale unui tub de curent.

Căderea de presiune a unui fluid în curgere are două componente:

- o componentă pentru curgerea uniformă a curentului de fluid – **căderea de presiune liniară**;
- o componentă pentru zonele în care curgerea fluidului este neuniformă (din cauza modificării vitezei sale ca mărime sau ca direcție) – **căderea de presiune locală**.

Căderea totală de presiune datorată frecării va fi dată de suma celor două căderi de presiune:

$$\Delta P_f = \Delta P_{lin} + \Delta P_{rl} \quad (3.171)$$

Căderile de presiune locale apar în cazul existenței pe traseul de curgere a fluidului a unor **rezistențe hidraulice locale**: curbe, coturi, ramificații, reducții, ventile, diafragme, etc. Căderea de presiune prin rezistențe hidraulice locale se exprimă prin relații de forma:

$$\Delta P_{rl} = \zeta \frac{v^2}{2} \rho \quad [\text{N/m}^2] \quad \text{sau:} \quad h_{rl} = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (3.172)$$

în care ζ reprezintă coeficientul adimensional al căderii locale de presiune, fiind specific tipului de rezistență hidraulică locală și depinzând de regimul de curgere.

O metodă mai puțin exactă de estimare a căderilor de presiune locale constă în înlocuirea rezistențelor hidraulice locale cu o lungime echivalentă, l_e , de conductă dreaptă, care ar produce aceeași cădere de presiune ca și rezistența hidraulică locală considerată. Această lungime echivalentă se exprimă funcție de diametrul interior (D) al conductei drepte:

$$l_e = D \sum n \quad (3.173)$$

Valoarea n depinde de tipul rezistenței hidraulice locale considerate, după cum reiese din tab. 3.3.

Tab. 3.3. Lungimea echivalentă a unor rezistențe hidraulice locale

Rezistența	n
Cot de 45°	15
Cot de 90° (9,5 < d < 63,5 mm)	30
Cot de 90° (76 < d < 152 mm)	40
Cot de 90° (178 < d < 254 mm)	50
Unghi de 90°	60
Intrare în teu colector	60
Ieșire din teu distribuitor	90
Cruce	50
Ventil	60 – 300
Robinet	10 – 15
Vană (complet deschisă)	7
Contoare rotative	200 – 300

Ținând seama de relațiile (3.171), (3.169) și (3.172), căderea totală de presiune la curgerea unui fluid printr-o conductă va fi dată de:

$$\Delta P_f = \left(\sum \lambda \frac{l}{D} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2} \rho \quad [\text{N/m}^2] \quad (3.174)$$

$$h_f = \left(\sum \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}]$$

Coeficienții adimensionali λ și ζ pot fi determinați analitic (în unele situații) sau prin corelații empirice.

3.4.1.1. Coeficientul căderii de presiune prin frecare (λ)

Acest coeficient se poate calcula din relația (3.169) pusă sub formă criterială (la o rugozitate dată a conductei):

$$Eu = C Re^m \Gamma$$

$$Eu = \frac{\Delta P_f}{\rho v^2}; \quad Re = \frac{\rho v D}{\mu}; \quad \Gamma = \frac{l}{D} \quad (3.175)$$

Pentru conductele cu secțiune necirculară, D se înlocuiește cu d_{ech} . Pentru calculul lui λ se poate utiliza diagrama din fig. 3.30. Rugozitatea conductei, e , se apreciază pe baza datelor din tab. 3.4.

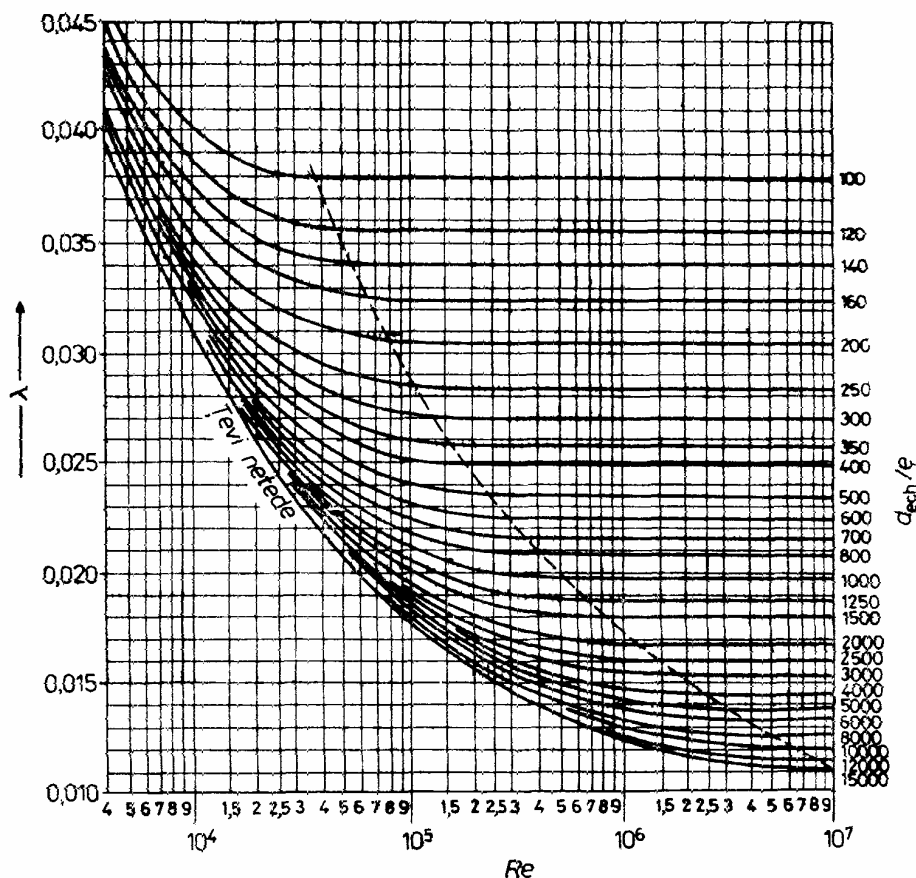


Fig. 3.30. Variația coeficientului de frecare λ în funcție de valoarea criteriului Re și de rugozitatea conductei, d_{ech}/e

În fig. 3.30 este trasată punctat limita domeniului de automodelare, în care coeficientul de frecare λ nu depinde de criteriul Re , ci numai de valoarea raportului d_{ech}/e .

Coeficientul de frecare λ se poate calcula și cu ajutorul relațiilor prezentate în continuare.

- **Regim laminar de curgere ($Re < 2300$)**

În regim laminar λ nu depinde de rugozitatea conductei ci numai de criteriul Reynolds:

FENOMENE DE TRANSFER

Tab. 3.4. Valori medii ale rugozității conductelor

Conducte	e, mm
Țevi din oțel trase și sudate, la coroziune neînsemnată	0,2
Țevi din oțel, vechi și ruginite	> 0,67
Țevi din oțel, impregnate cu ulei de în fierț	0,125
Țevi din fontă pentru apă, care au fost utilizate	1,4
Țevi tehnice netede din aluminiu	0,015 - 0,06
Țevi trase, curate, din alamă, Cu, Pb; țevi din sticlă	0,0015 - 0,01
Țevi din beton, suprafață bună, netezită prin frecare	0,3 - 0,8
Țevi din beton, suprafață grosieră cu asperități	3 - 9
Conducte pentru abur saturat	0,2
Conducte pentru abur, cu funcționare periodică	0,5
Conducte pentru aer comprimat de la compresoare	0,8
Conducte pentru condensat, cu funcționare periodică	1,0

$$\lambda = \frac{\alpha}{Re} \quad (3.176)$$

în care valoarea α este funcție de secțiunea de curgere (tab. 3.5).

Înlocuind (3.176) scrisă pentru conducte circulare ($\alpha = 64$) în ecuația Fanning (3.169) se obține **ecuația Hagen - Poiseuille**:

$$\Delta P = \frac{64\mu}{\rho v D} \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho = 32 \frac{\mu l v}{D^2} \quad (3.177)$$

ecuație care permite, de asemenea, și determinarea viscozității fluidelor în viscozimetrul cu tub capilar:

$$\mu = \frac{\Delta P D^2}{32 l v} \quad (3.178)$$

Tab. 3.5. Valorile coeficientului α pentru diverse secțiuni de curgere

Forma secțiunii	d_{ech}	α
Cerc cu diametrul D	D	64
Pătrat cu latura a	a	57
Triunghi echilateral cu latura a	$0,58a$	53
Inel cu lățimea a	$2a$	96
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b \sim 0$	$2a$	96
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,1$	$1,81a$	85
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,25$	$1,60a$	73
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,5$	$1,30a$	62
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,1$	$1,55a$	78
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,3$	$1,40a$	73
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,5$	$1,30a$	68

• **Regim turbulent de curgere ($Re > 2300$)**

Pentru *curgerea prin conducte cu pereți netezi* (sticlă, plumb, cupru, materiale plastice), au fost propuse numeroase relații de calcul pentru λ , cele mai importante dintre acestea fiind prezentate în tab. 3.6.

Tab. 3.6. Relații pentru calculul coeficientului de frecare λ la curgerea turbulentă a fluidelor prin conducte cu pereți netezi

Relația	Ecuatie de calcul	Domeniu de valabilitate
KOO	$\lambda = 0,0056 + 0,5 Re^{-0,32}$	$3000 < Re < 300000$
McADAMS	$\lambda = 0,184 Re^{-0,2}$	$5000 < Re < 200000$
BLASIUS	$\lambda = 0,3164 Re^{-0,25}$	$3000 < Re < 100000$
KARMAN, PRANDTL, NIKURADSE	$\lambda = 2 \left[\lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \right]^{-2}$	$Re > 3000$
NIKURADSE	$\lambda = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}$	
GENEREAUX	$\lambda = 0,16 Re^{0,16}$	

Pentru *curgerea fluidelor prin conducte cu pereți rușoși*, valoarea coeficientului de frecare λ variază funcție de materialul din care este confecționată conducta. Astfel, relația lui **Koo**:

$$\lambda = 0,014 + 1,056 Re^{-0,42} \quad (3.179)$$

este valabilă pentru conducte din oțel și fontă.

Influența materialului conductei asupra coeficientului λ este evidențiată de relația lui **Hopf** și **Fromm**:

$$\lambda = 0,01 \left(\frac{k}{D} \right)^{0,314} \quad (3.180)$$

în care valorile coeficientului k depind de materialul conductei (tab. 3.7).

Tab. 3.7. Valorile coeficientului k din ecuația (3.180)

Materialul conductei	k
Conducte metalice noi, aproximativ netede, tablă asfaltată	1,5
Conducte noi de fontă, de tablă sau de ciment bine netezit	2,5
Conducte vechi din oțel (ruginite)	5
Conducte din ciment, din fontă cu crustă, din scânduri	7
Canale din cărămidă	10

La proiectarea instalațiilor va trebui să se țină seama de fenomenul de îmbătrânire a conductelor. Calculul căderilor de presiune se va efectua întotdeauna cu coeficienții pentru țevi vechi.

3.4.1.2. Coeficientul căderii de presiune prin rezistențe locale (ζ)

În marea majoritate a cazurilor, coeficientul ζ nu poate fi calculat pe baze teoretice; el se determină experimental, valorile sale fiind funcție de tipul rezistenței locale și de dimensiunile geometrice ale acesteia. În literatură există numeroase date privind valorile coeficienților ζ pentru diverse tipuri de rezistențe hidraulice locale. Cele mai importante dintre acestea sunt redată în tab. 3.8 și fig. 3.31.

Pentru curbe, valoarea coeficientului ζ se poate calcula cu relația:

$$\zeta = \left[0,13 + 0,16 \left(\frac{D}{R} \right)^{3,5} \right] \frac{\varphi}{90} \quad (3.181)$$

în care D este diametrul conductei, R – raza de curbura, φ - unghiul (în grade sexagesimale) dintre tangentele în punctele de la extremitățile curbei.

Tab. 3.8. Valorile coeficientului ζ pentru diverse fittinguri și armături redată în fig. 3.31

Rezistența locală	n (ec. 3.173)	ζ
Cot la 45° (a)	15	0,3
Cot la 90° – rază standard (b)	30 - 40	0,6 – 0,8
Cot de colț la 90° (c)	60	1,2
Intrare în teu colector (d)	60	1,2
Ieșire din teu distribuitor (d)	90	1,8
Asamblări filetate (e)	neglijabil	neglijabil
Ventil normal (f) complet deschis	60 - 300	1,2 – 6,0
Vană (g) complet deschisă	7	0,15
Vană (g) $\frac{3}{4}$ deschisă	40	1
Vană (g) $\frac{1}{2}$ deschisă	200	4
Vană (g) $\frac{1}{4}$ deschisă	800	16

Pentru lărgirea bruscă de secțiune, coeficientul ζ în regim turbulent se calculează cu relația:

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \quad (3.182)$$

în care A_1 reprezintă aria secțiunii înguste, iar A_2 – aria secțiunii lărgite.

Pentru îngustarea bruscă de secțiune, coeficientul ζ depinde atât de raportul ariilor celor două secțiuni (A_1/A_2), cât și de regimul de curgere, așa cum reiese din tab. 3.9.

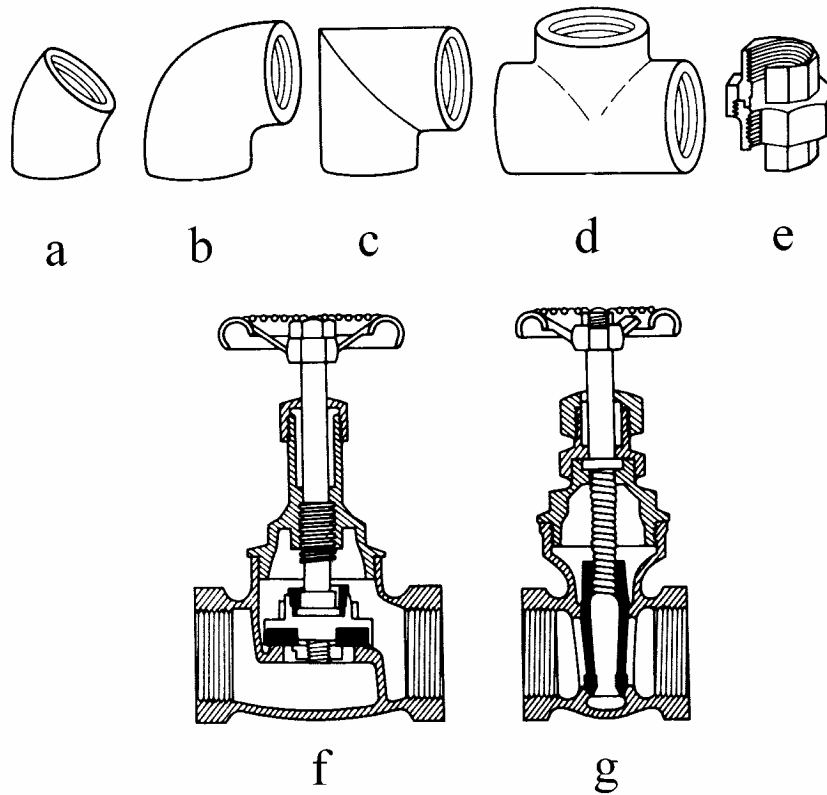


Fig. 3.31. Fitinguri și armături standard uzuale

Tab. 3.9. Valorile coeficientului ζ pentru lărgire bruscă de secțiune

Valoare Reynolds	Raport A_1/A_2					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10
100	1,70	1,40	1,20	1,10	0,90	0,80
1000	2,00	1,60	1,30	1,05	0,90	0,60
3000	1,00	0,70	0,60	0,40	0,30	0,20
> 3500	0,81	0,64	0,50	0,36	0,25	0,16

În cazul lărgirii continue de secțiune (în difuzoare), coeficientul ζ se calculează cu relațiile:

$$\zeta = 0,2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad \text{daca } \alpha < 8^\circ$$

$$\zeta = 3,5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \quad \text{daca } 7,5 < \alpha < 35^\circ$$
(3.183)

în care α reprezintă unghiul la vârf al conului difuzor.

Pentru ieșirea din țevi se consideră $\zeta = 1$, iar pentru intrarea în țevi (dintr-un recipient) valoarea ζ depinde de forma intrării în țeavă (fig. 3.32).

Tab. 3.10. Valorile coeficientului ζ pentru intrarea în țevi

Fig. 3.32	a	b	c	d	e	f
ζ	0,5	0,25	0,06-0,005	0,56	3	$0,5 + 0,3\cos \delta + 0,2\cos^2 \delta$

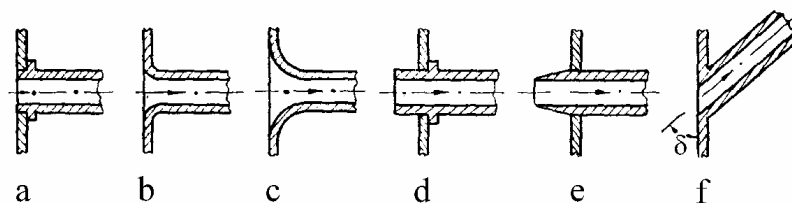


Fig. 3.32. Forma intrării în țeavă

Pentru fluidele nenewtoniene există puține date referitoare la căderea de presiune prin rezistențe hidraulice locale. Datele existente arată că în cazul îngustării (lărgirii) bruște a secțiunii de curgere, sau la intrarea în țevi, valorile căderii de presiune sunt de același ordin de mărime ca și în cazul fluidelor newtoniene.

3.4.1.3. Curgerea fluidelor compresibile

În cazul fluidelor compresibile – gaze și vapori – la aplicarea ecuației Bernoulli trebuie să se țină cont de faptul că densitatea fluidului este funcție de presiune: variația presiunii conduce la variația densității fluidului, la variația volumului său specific și la variația vitezei sale. La curgerea turbulentă pe o lungime infinitesimală dl , ecuația Bernoulli se scrie:

$$\frac{d(v^2)}{2} + v_s dP + \lambda \frac{dl}{D} \frac{v^2}{2} = 0 \quad (3.184)$$

Poziția conductei (orizontală, verticală, oblică) nu contează, întrucât forțele de inerție (gravitaționale) sunt neglijabile în cazul gazelor. Ținând cont că între viteza gazului și volumul său specific există o relație de legătură prin ecuația debitului:

$$v = \frac{m_m v_s}{A} \quad (3.185)$$

în care m_m este debitul masic al fluidului, v_s – volumul specific al fluidului, A – aria secțiunii conductei. Înlocuind în (3.184), împărțind prin v_s^2 și

integrând între punctele 1 și 2 (pentru întreaga lungime l a conductei), se obține:

$$\left(\frac{m_m}{A}\right)^2 \ln \frac{v_{s2}}{v_{s1}} + \int_1^2 \frac{dP}{v_s} + \lambda \frac{l}{2D} \left(\frac{m_m}{A}\right)^2 = 0 \quad (3.186)$$

în care valoarea integralei depinde numai de condițiile de curgere (izoterme, politrope, adiabactice).

În cazul curgerii izoterme volumul specific se poate scrie:

$$v_s = \frac{RT}{P} = \frac{P_1 v_{s1}}{P} \quad (3.187)$$

iar (3.186) devine:

$$\left(\frac{m_m}{A}\right)^2 \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2^2 - P_1^2}{2P_1 v_{s1}} + \lambda \frac{l}{2D} \left(\frac{m_m}{A}\right)^2 \quad (3.188)$$

sau, introducând presiunea medie, P_m și volumul specific mediu, v_m :

$$\left(\frac{m_m}{A}\right)^2 \ln \frac{P_1}{P_2} - \frac{1}{v_m} (P_1 - P_2) + \lambda \frac{l}{D} \left(\frac{m_m}{A}\right)^2 \quad (3.189)$$

Când căderea de presiune $\Delta P = (P_1 - P_2)$ este relativ redusă comparativ cu presiunea P_1 sau P_2 , primul termen este neglijabil, deoarece:

$$\ln \frac{P_1}{P_2} = \ln \frac{P_2 + \Delta P}{P_2} = \ln \left(1 + \frac{\Delta P}{P_2}\right) \approx \frac{\Delta P}{P_2} \quad (3.190)$$

și ecuația (3.189) devine:

$$\Delta P = \lambda \frac{l}{2D} \left(\frac{m_m}{A}\right)^2 v_{sm} = \lambda \frac{l}{2D} (\rho_m v_m)^2 \frac{1}{\rho_m} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v_m^2}{2} \rho_m \quad (3.191)$$

Pentru căderi mici de presiune (sub 10% din presiunea inițială), căderea de presiune se poate calcula cu ecuația de calcul pentru fluide incompresibile, în care se substituie viteza și densitatea fluidului cu valorile lor mediate aritmetic între cele două stări (1) și (2):

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \rho_m = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (3.192)$$

În cazul curgerii adiabactice, starea fluidului este definită de:

$$P v_s^\chi = P_1 v_{s1}^\chi \quad (3.193)$$

iar

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{v_s} = \frac{\chi}{\chi + 1} \frac{P_1}{v_{s1}} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\chi+1}{\chi}} - 1 \right] \quad (3.194)$$

iar indicele adiabatic χ este raportul căldurilor specifice masice:

$$\chi = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.195)$$

Efectuând înlocuirile, ecuația (3.186) devine:

$$\frac{1}{\chi} \left(\frac{m_m}{A} \right)^2 \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{\chi}{\chi + 1} \frac{P_1}{v_{s1}} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\chi+1}{\chi}} - 1 \right] + \lambda \frac{l}{2D} \left(\frac{m_m}{A} \right)^2 = 0 \quad (3.196)$$

În cazul curgerii politrope starea fluidului este descrisă de:

$$P v_s^n = P_1 v_{s1}^n \quad (3.197)$$

în care n reprezintă indicele politrop. Integrala din (3.186) devine:

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{v_s} = \frac{n}{n+1} \frac{P_1}{v_{s1}} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \quad (3.198)$$

iar ecuația (3.186) se scrie:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{m_m}{A} \right)^2 \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{n}{n+1} \frac{P_1}{v_{s1}} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] + \lambda \frac{l}{2D} \left(\frac{m_m}{A} \right)^2 = 0 \quad (3.199)$$

Pentru gaze reale și vapori se folosește ecuația Bernoulli scrisă în forma (3.148) pentru regim staționar:

$$g\Delta h + \frac{\Delta v^2}{2} + \Delta H + W + Q = 0 \quad (3.200)$$

în care variația entalpiei, ΔH , se determină cu ajutorul diagramelor $H - S$ sau $T - S$.

În cazul curgerii neizoterme, temperatura fluidului se modifică atât în lungul conductei, cât și transversal. O astfel de situație se întâlnește des în practică, la schimbătoarele de căldură, de exemplu. Variind temperatura, constantele fizice ale fluidului se modifică. În consecință, căderea de presiune scade prin încălzire și crește prin răcire. Se cunosc două metode empirice pentru calculul căderii de presiune a lichidelor în aceste condiții:

Metoda I

Se determină regimul de curgere al lichidului, calculându-se valoarea Re la temperatura T_m , medie aritmetică a temperaturilor de la extremitățile conductei. Se calculează apoi o temperatură medie, T_M , cu relațiile:

$$\begin{aligned} T_M &= 0,75T_m + 0,25T_p && \text{pentru curgere laminara} \\ T_M &= 0,50T_m + 0,50T_p && \text{pentru curgere turbulenta} \end{aligned} \quad (3.201)$$

în care T_p reprezintă temperatura medie a peretelui.

În cazul curgerii laminare, se recalculează un număr Reynolds, Re' la temperatura T_M și se determină apoi căderea de presiune cu ecuația lui Fanning (3.169), în care se consideră $\lambda = 70/Re'$.

În cazul curgerii turbulente, căderea de presiune se calculează aplicând ecuația (3.169) cu constantele fizice ale lichidului considerat la temperatura T_M .

Metoda II:

Se calculează coeficientul λ ca și în cazul curgerii izoterme, la temperatura medie T_m . Această valoare calculată se împarte la:

$$\begin{aligned} 1,10(\mu_m/\mu_p)^{0,25} & \text{ pentru curgere laminara} \\ 1,02(\mu_m/\mu_p)^{0,14} & \text{ pentru curgere turbulenta} \end{aligned} \quad (3.202)$$

unde μ_m , și μ_p reprezintă respectiv, viscozitatea lichidului la temperatura T_m și viscozitatea lichidului la temperatura T_p . Cu valoarea λ astfel corectată se calculează căderea de presiune folosind ecuația (3.169).

3.4.2. Curgerea prin conducte

3.4.2.1. Curgerea fluidelor newtoniene

La curgerea fluidelor newtoniene prin conducte, viteza fluidului este variabilă în secțiunile de curgere; viteza fluidului variază de la zero la perete până la viteza maximă în axul conductei. În cazul conductelor circulare, din cauza simetriei, vitezele sunt egale în puncte egal depărtate de axul conductei; locul geometric al vitezelor egale este format din cilindri coaxiali cu conducta.

La **curgerea laminară**, vitezele locale v_l se repartizează după un paraboloid de revoluție (fig. 3.33.a). Ecuația distribuției vitezelor locale se obține din ecuațiile Navier – Stokes (3.144) cărora li se aplică următoarele restricții:

- curgerea este laminară în direcția axei x : $v_y = v_z = 0$;
- regimul este staționar: $\partial v_x / \partial t = 0$;
- fluidul este incompresibil: $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0$;
- forțele inerțiale sunt neglijabile: $g_x = g_y = g_z = 0$.

În aceste condiții, ecuațiile (3.144) devin:

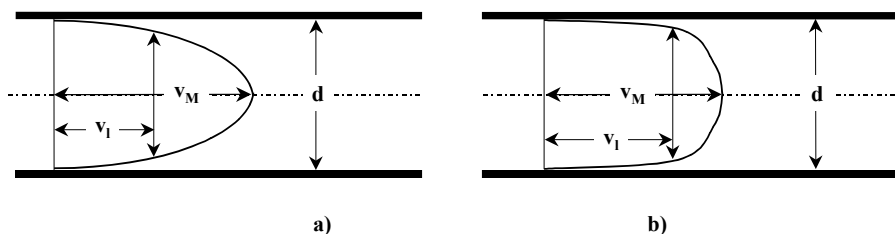


Fig. 3.33. Profilul vitezelor la curgerea prin conducte circulare:
a – regim laminar; b – regim turbulent;

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.203)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Din ecuațiile (3.203.b) și (3.203.c) rezultă că presiunea este constantă în secțiunea transversală a conductei, iar din ecuația (3.203.a) și condiția de fluid incompresibil rezultă că viteza în lungul conductei este constantă. Ca urmare, ecuația (3.203.a) devine:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.204)$$

unde $v = v_x$ este viteza în lungul conductei. Trecând din coordonate rectangulare în coordonate cilindrice și ținând seama de simetria centrală în secțiunea conductei, se obține:

$$\frac{dP}{dx} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \quad (3.205)$$

Prin separare de variabile și dublă integrare se obține în final:

$$v = -C_1 \frac{r^2}{\mu} + C_2 \ln r + C_3 \quad (3.206)$$

Cele trei constante de integrare se determină din condițiile la limită:

- în axul conductei viteza este maximă: la $r = 0$, $dv/dr = 0$;
- în axul conductei viteza este v_M ;
- la peretele conductei viteza este nulă: la $r = R$, $v = 0$.

Ecuația (3.206) devine în final:

$$v_l = \frac{C_1}{\mu} (R^2 - r^2) = v_M \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.207)$$

care este tocmai ecuația paraboloidului vitezelor, v reprezentând viteza locală a fluidului.

Viteza medie a fluidului se poate calcula ca raport între volumul paraboloidului vitezelor și aria secțiunii de curgere:

$$\hat{v} = \frac{V}{A} = \frac{\frac{1}{2} A \cdot v_M}{A} = \frac{1}{2} v_M \quad (3.208)$$

Din (3.207) și (3.208) se obține expresia vitezei locale în funcție de viteza medie a fluidului:

$$v_l = 2\hat{v} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.209)$$

În cazul **curgerii turbulente**, vitezele locale variază atât ca direcție, cât și ca valoare în orice moment. Teoria statistică a turbulenței se bazează pe cunoașterea fluctuațiilor diferitelor mărimi ale curgerii. În curgerea turbulentă, peste direcția principală de mișcare a fluidului se suprapune o mișcare dezordonată, fluctuantă în timp, a macroparticulelor de fluid, mișcare care conduce la o amestecare intensă a straturilor de fluid. Liniile de curent nu mai sunt paralele ca în curgerea laminară; ele se intersectează, apar vârtejuri orientate dezordonat față de direcția principală de curgere. Macroparticulele de fluid au dimensiuni variabile (între 1 mm și diametrul interior al conductei) și durate de viață diferite. Orice mărime care caracterizează curgerea turbulentă într-un punct al fluidului variază în timp ca mărime și ca direcție, oscilând în jurul unei valori medii. Această oscilație poartă denumirea de **fluctuația** sau **pulsația** mărimii. Regimul turbulent staționar este caracterizat prin valoarea constantă în timp a mărimilor medii temporale: $\tilde{v}, \tilde{\rho}, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{\tau}$, etc. O mărime oarecare Ψ , variabilă în timp și spațiu, se poate scrie:

$$\Psi(x, y, z, t) = \tilde{\Psi}(x, y, z, t) + \Psi'(x, y, z, t) \quad (3.210)$$

valoarea instantanee Ψ fiind deci alcătuită din valoarea medie temporală $\tilde{\Psi}$ și din valoarea fluctuației mărimii, Ψ' (fig. 3.34).

Valoarea medie temporală este definită drept:

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{t_l} \int_0^{t_l} \Psi(x, y, z, t) dt \quad (3.211)$$

t_l reprezentând un timp mult mai mare decât durata medie a fluctuațiilor și suficient de mare încât valoarea medie să nu mai depindă de timp. Distribuția fluctuațiilor, $\Psi' = f(t)$ arată că aceasta este numai aparent haotică, ea având practic o repartiție gaussiană, turbulența fiind deci un

fenomen statistic. Se poate demonstra că valoarea medie a fluctuațiilor este nulă, $\tilde{\Psi}' = 0$, în timp ce media temporală a valorilor absolute a fluctuațiilor, $|\tilde{\Psi}'|$ este o mărime diferită de zero.

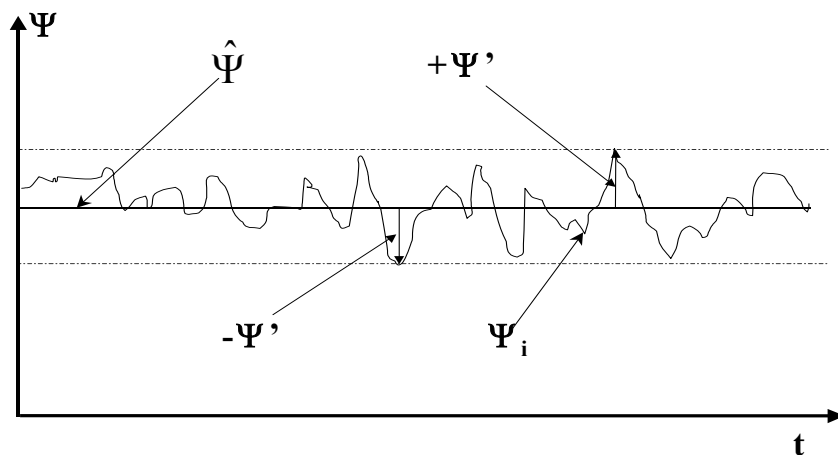


Fig. 3.34. Variația în timp a mărimilor care caracterizează curgerea, în regim turbulent

Funcție de sursa generatoare a modificării vitezei instantanee, deosebim o **turbulență de suprafață (externă sau de perete)**, când modificarea vitezei se datorează contactului fluidului cu contururile solide și o **turbulență liberă (internă)**, când modificarea vitezei se datorează straturilor de fluid care se deplasează cu viteze diferite.

Tensiunile tangențiale care apar suplimentar în masa unui fluid în curgere turbulentă au valori mult mai mari decât ale tensiunilor tangențiale determinate de transferul molecular de impuls. Astfel, la transferul turbulent (convectiv) de impuls apar tensiunile tangențiale:

$$\tau'_{yx} = -\rho v_y' v_x' = -\rho v_y' (\tilde{v}_x + v_x') \quad (3.212)$$

Valoarea medie temporală a tensiunilor tangențiale este:

$$\tilde{\tau}'_{yx} = -\rho (\tilde{v}_y' \tilde{v}_x') = -\rho (\tilde{v}_y' \tilde{v}_x') \quad (3.213)$$

Similar se pot obține și mediile temporale ale tensiunilor tangențiale în cazul mișcării tridimensionale. Starea de eforturi de turbulență se exprimă printr-un tensor simetric, denumit și **tensorul tensiunilor “aparente” turbulente**:

$$\tilde{\tau}'_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}'_{xx} & \tilde{\tau}'_{yx} & \tilde{\tau}'_{zx} \\ \tilde{\tau}'_{xy} & \tilde{\tau}'_{yy} & \tilde{\tau}'_{zy} \\ \tilde{\tau}'_{xz} & \tilde{\tau}'_{yz} & \tilde{\tau}'_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

Tensiunile turbulente determinate de pulsațiile vitezei în mișcare turbulentă se numesc **tensiuni aparente** sau **tensiuni Reynolds**. Ele sunt mult mai mari decât tensiunile tangențiale moleculare în masa fluidului în curgere, excepție făcând zonele din imediata apropiere a pereților solizi (zona stratului limită). Tensiunile totale sunt date de suma tensiunilor moleculare și a celor turbulente:

$$\tau = \tau_m + \tilde{\tau}'_{yx} = \mu \frac{d\tilde{v}_x}{dy} - \rho \tilde{v}_y' \tilde{v}_x' \quad (3.215)$$

Dacă tensiunile tangențiale moleculare se pot exprima analitic funcție de viscozitatea fluidului și de gradientii de viteză, tensiunile turbulente sunt funcție numai de proprietățile fluctuante ale curgerii, neputându-se reda prin relații analitice generale.

Pentru curgerea turbulentă se poate defini o componentă axială medie în timp a vitezei, care se consideră constantă (în cazul curgerii staționare) și egală pentru toate punctele situate pe cilindri coaxiali cu conducta. Expresia vitezei locale într-un punct situat la distanța r de axa conductei este:

$$v_l = v_M \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1,25} \right]^{1/7} \quad (3.216)$$

Viteza medie a fluidului este:

$$\hat{v} = 0,84 v_M \quad (3.217)$$

iar expresia vitezei locale devine:

$$v_l = 1,19 \hat{v} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1,25} \right]^{1/7} \quad (3.218)$$

Repartiția vitezelor în secțiunea conductei (fig. 3.33.b) corespunde unei suprafețe de revoluție mai puțin ascuțite decât paraboloidul vitezelor curgerii laminare. Și la curgerea turbulentă apare stratul limită cu anularea vitezei la perete. Din cauza micșorării vitezei, în stratul limită curgerea este turbulentă.

3.4.2.2. Curgerea fluidelor nenewtoniene

Pentru majoritatea cazurilor întâlnite în practică, comportarea de fluid nenewtonian poate fi descrisă suficient de exact fie prin ecuația reologică Ostwald – de Waele (legea puterii), fie, în cazul fluidelor viscoplastice, prin ecuația reologică a plasticului Bingham.

În cazul fluidelor viscoplastice aflate în curgere laminară și izotermă, tensiunea de forfecare variază radial, de la zero în axul conductei, până la o valoare maximă lângă perete (fig. 3.35).

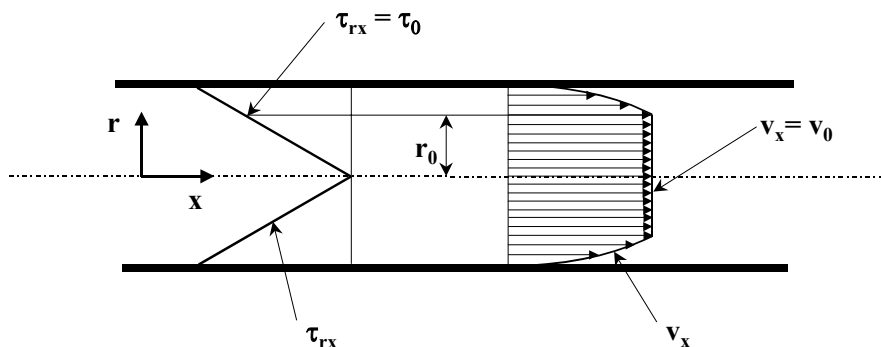


Fig. 3.35. Distribuția tensiunilor de forfecare și a vitezelor la curgerea fluidului Bingham prin conducte circulare

În domeniul $r < r_0$, tensiunea este mai mică decât pragul de curgere τ_0 , între straturile de lichid nu apare forfecare, iar curgerea este de tip piston, cu viteza uniformă v_0 . În domeniul $r > r_0$, tensiunea de forfecare îndeplinește condiția $\tau_{rx} > \tau_0$, are loc o curgere cu forfecare și viteza variază de la v_0 până la valoarea zero lângă perete. Expresia vitezei locale se obține din ecuația simplificată a transferului de impuls în coordonate cilindrice:

$$-\frac{dP}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rx}) = 0 \quad (3.219)$$

și ecuația reologică a plasticului Bingham:

$$\tau_{rx} = \tau_0 + \mu_p \frac{dv_x}{dr} \quad (3.220)$$

Prin integrarea ecuației (3.219) se obține:

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (3.221)$$

Egalând (3.220) cu (3.221) rezultă ecuația:

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{r}{2\mu_p} \left(\frac{dP}{dx} \right) - \frac{\tau_0}{\mu_p} \quad (3.222)$$

valabilă pe domeniul $r > r_0$. Raza pistonului central se obține din (3.221) pentru $r = r_0$:

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{(dP/dx)} \quad (3.223)$$

Viteza de curgere în zona inelară de forfecare rezultă prin integrarea ecuației (3.222):

$$v_l = -\frac{R^2}{4\mu_p} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \frac{R\tau_0}{\mu_p} \left[1 - \frac{r}{R} \right] \quad (3.224)$$

Viteza de deplasare a pistonului central se obține înlocuind în ecuația (3.224) r cu r_0 .

Debitul de fluid este dat de suma:

$$m_v = \pi r_0^2 v_0 + 2\pi \int_{r_0}^R r v_l dr \quad (3.225)$$

în care primul termen reprezintă debitul pistonului central, iar al doilea debitul zonei inelare. Înlocuind în (3.225) vitezele v_l și v_0 , se obține **ecuația lui Buckingham**:

$$m_v = -\frac{\pi R^4}{8\mu_p} \left(\frac{dP}{dx} \right) \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right] \quad (3.226)$$

Dacă în această ecuație se consideră $r_0 = 0$ (la $r_0 = 0$, $\tau_0 = 0$; fluidul are comportare newtoniană), se ajunge la ecuația Poiseulle:

$$m_v = -\frac{\pi R^4}{8\mu_p} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (3.227)$$

Ecuația lui Buckingham poate fi pusă și sub o altă formă. Din ecuația (3.221) se poate scrie:

$$\tau_p = \frac{R}{2} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad \text{și} \quad \tau_0 = \frac{r_0}{2} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (3.228)$$

iar de aici:

$$\frac{r_0}{R} = \frac{\tau_0}{\tau_p} \quad (3.229)$$

Înlocuind în (3.226) se obține:

$$m_v = -\frac{\pi R^3 \tau_p}{4\mu_p} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_p} \right)^4 \right] \quad (3.230)$$

Transpusă în coordonate cilindrice, legea puterii exprimată prin ecuația (3.20) capătă forma:

$$\tau_{rx} = k \left(-\frac{dv_x}{dr} \right)^n \quad (3.231)$$

Ecuația simplificată a transferului de impuls (3.219) se poate scrie, pentru un tub de lungime L :

$$\frac{\Delta P}{L} \int_0^r r dr = \int_{\tau_{(r=0)x}}^{\tau_{rx}} d(r\tau_{rx}) \quad (3.232)$$

Din considerente de simetrie, $\tau_{(r=0)x} = 0$ și după integrare rezultă:

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L} \quad (3.233)$$

Notând tensiunea la peretele tubului ($r = R$) cu τ_p , (3.233) se poate scrie:

$$\tau_p = \frac{R}{2} \frac{\Delta P}{L} \quad (3.234)$$

Din combinarea ecuațiilor (3.233) și (3.234) rezultă o distribuție liniară a tensiunilor de forfecare pe direcție radială:

$$\tau_{rx} = \tau_p \frac{r}{R} \quad (3.235)$$

Combinând ecuațiile (3.231) și (3.235) rezultă:

$$k \left(-\frac{dv_x}{dr} \right)^n = \tau_p \frac{r}{R} \quad (3.236)$$

După extragerea radicalului de ordin n din ambii membri, separarea variabilelor și integrare cu condiția la limită $v(R) = 0$, rezultă:

$$v_x = \frac{nR}{n+1} \left(\frac{\tau_p}{k} \right)^{1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (3.237)$$

Ecuația (3.237) reprezintă profilul vitezelor pentru curgerea laminar-izotermă a fluidelor newtoniene care respectă legea puterii. Viteza maximă a fluidului se obține în axa conductei, la $r = 0$:

$$v_M = \frac{nR}{n+1} \left(\frac{\tau_p}{k} \right)^{1/n} \quad (3.238)$$

Înlocuind (3.238) în (3.237) se obține:

$$v_x = v_M \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right] \quad (3.239)$$

Ecuația (3.239) permite stabilirea profilului vitezelor la curgerea laminară prin conducte circulare drepte pentru mai multe categorii de fluide, funcție de valoarea exponentului n (fig. 3.36):

- $n = 0$ - fluid ideal (fără frecare), viteze egale în secțiunea de curgere (curgere tip piston);
- $n < 1$ - fluid pseudoplastic, profil parabolic aplatizat al vitezelor;
- $n = 1$ - fluid newtonian, profil parabolic al vitezelor;

- $n > 1$ - fluid dilatant, profil parabolic alungit al vitezelor, la limită ($n = \infty$) profilul vitezelor devine triunghiular (creștere liniară a vitezei de la perete către axa conductei).

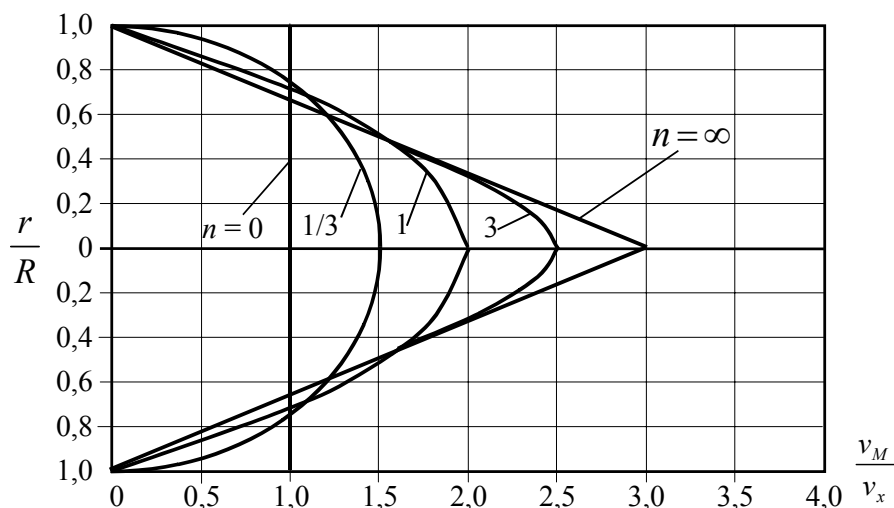


Fig. 3.36. Distribuția vitezelor în conducte circulare la curgerea fluidelor care respectă legea puterii

În ceea ce privește curgerea turbulentă a fluidelor newtoniene, aparatul teoretic este mai puțin elaborat. Toate studiile efectuate în acest domeniu au avut drept scop principal estimarea căderilor de presiune, relațiile obținute fiind însă mult mai puțin riguroase decât cele obținute în cazul curgerii laminare.

3.4.3. Curgerea cu suprafață liberă

Mecanismul curgerii lichidelor cu suprafață liberă este mai complex decât cel al curgerii sub presiune, datorită existenței suprafeței libere. Datorită viscozității lichidelor, distribuția vitezelor în secțiunea de curgere va fi neuniformă. În zona de contact cu conturul solid viteza lichidului va fi nulă, crescând cu creșterea distanței de perete. Deoarece la suprafața de contact cu aerul (sau alt gaz) tensiunea tangențială nu este nulă (dar este mult mai mică decât în cazul contururilor solide, gazul fiind antrenat de lichid), viteza maximă a lichidului nu va fi nici la suprafața liberă și nici în mijlocul curentului, ci la o distanță de $(0,05...0,25)h$ – funcție de condițiile de curgere – de suprafața liberă, h reprezentând adâncimea curentului de lichid în conductă sau canal.

Din punct de vedere al regimului de curgere, curgerea este laminară până la $Re_{sl} \leq 500$, turbulentă pentru $Re_{sl} > 10000$ și intermediară pentru valori Re cuprinse între 500 și 10000. Numărul Reynolds pentru curgerea cu suprafață liberă are expresia:

$$Re_{sl} = \frac{r_h \cdot v \cdot \rho}{\mu} \quad (3.240)$$

în care r_h reprezintă raza hidraulică definită prin ecuația (3.102).

3.4.3.1. Curgerea prin canale

La curgerea prin canale se ține cont de faptul că presiunea este egală (de obicei atmosferică) în tot lungul canalului, iar dacă înclinarea (panta) canalului este uniformă, viteza lichidului este constantă.

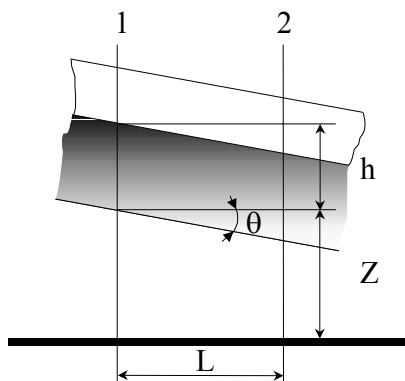


Fig. 3.37. Elemente de calcul ale curgerii prin canale

În curgere izoterm-uniformă, pentru situația redată în fig. 3.37, ecuația Bernoulli are forma:

$$\rho g Z_1 = \rho g Z_2 + \Delta P_f \quad (3.241)$$

deoarece $v_1 = v_2$ și $P_1 = P_2 = P$. Din ecuația (3.241) rezultă că mișcarea uniformă cu suprafață liberă are loc doar dacă $Z_1 > Z_2$ (canalul este înclinat).

Panta canalului va fi:

$$I = \frac{Z_1 - Z_2}{L} \quad (3.242)$$

sau, ținând cont de relația (3.241):

$$I = \frac{Z_1 - Z_2}{L} = \frac{\Delta P_f}{\rho g L} = \frac{h_f}{L} = j \quad (3.243)$$

Întrucât la curgerea turbulentă prin conducte și canale cu alte secțiuni decât circulare, căderea de presiune (ΔP_f) și coeficientul de frecare λ se pot determina cu aceleași relații ca și pentru curgerea prin conducte circulare, cu observația că diametrul interior al conductei circulare se înlocuiește cu diametrul echivalent, d_{ech} sau se exprimă în termeni de rază hidraulică, r_h . În aceste condiții, ecuația lui Fanning capătă forma:

$$I = \frac{h_f}{L} = \frac{\lambda v^2}{2 g d_{ech}} = \frac{\lambda v^2}{8 g r_h} = \frac{v^2}{C^2 r_h} \quad (3.244)$$

unde $C = \sqrt{8g/\lambda}$ este **coeficientul lui Chézy**.

Ecuația (3.244) se poate mai poate scrie sub forma:

$$v = C\sqrt{I \cdot r_h} \quad (3.245)$$

sau în termeni ai debitului volumic:

$$m_v = v \cdot A = A \cdot C\sqrt{I \cdot r_h} \quad (3.246)$$

Coeficientul lui Chézy se poate calcula fie determinând pe λ funcție de regimul de curgere și de rugozitatea pereților canalului, fie cu relații empirice de tipul:

$$C = \frac{1}{n_r} r_h^{1/6} \quad (3.247)$$

în care coeficientul n_r depinde de rugozitatea pereților (tab. 3.11).

Tab. 3.11. Valorile coeficientului n_r din ecuația (3.247)

Natura peretelui canalului	n_r
Fontă curată, nouă	0,012
Tablă bituminată, în exploatare	0,012
Tablă nituită transversal și longitudinal	0015 – 0,019
Suprafețe lăcuite sau emailate	009
Beton netencuit	0013 – 0,016
Beton sclivisit	0,011 – 0,012
Azbociment	0,011
Căramidă	0013
Tuburi de argilă arsă, pentru drenaj	0013
Conducte de canalizare vitrificate	0,014
Stâncă căptușită	0,020 – 0,025
Canale în loess	0,017
Canale cu pereți acoperiți cu argilă	0,022

Deoarece curgerea prin canale se întâlnește cu precădere la transportul tehnologic al apelor uzate, apelor pluviale și menajere, viteza medie liniară trebuie să aibă o valoare mai mare decât viteza minimă de curgere (care corespunde vitezei minime ce împiedică depunerea particulelor solide în suspensie – pentru ape decantate care curg în canale deschise: $v_{min} > 0,4$ m/s) și mai mică decât viteza maximă (care determină erodarea pereților: $v_{max} < 7$ m/s pentru tuburi metalice; < 4 m/s pentru tuburi din beton; $< 1,2$ m/s pentru pereți din cărămidă sau argilă). Corespunzător vitezelor minime, conform ecuației (3.245) rezultă și panta minimă a canalului.

3.4.3.2. Curgerea peliculară

Curgerea unei pelicule subțiri de lichid pe o suprafață plană, verticală sau înclinată, este deosebit de importantă pentru transferul de căldură la condensarea vaporilor pe suprafață.

Abordarea teoretică a acestui tip de curgere este dificilă datorită apariției valurilor pe suprafața liberă. La debite foarte mici ($Re < 20$) filmul de lichid este lipsit de valuri. La creșterea debitului, curgerea rămâne laminară, dar apar valuri pe suprafața liberă. La $Re > 1600$, curgerea devine turbulentă și prezența valurilor se menține.

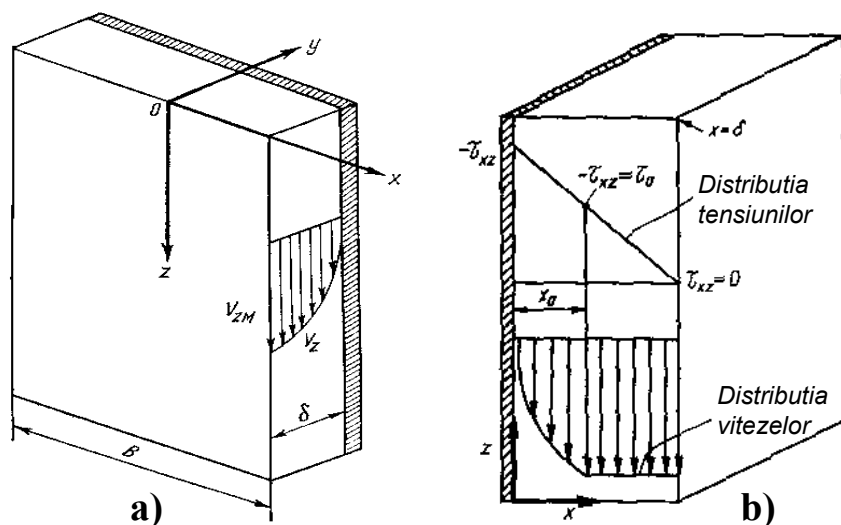


Fig. 3.38. Curgerea în film subțire

a – lichide newtoniene, pseudoplastice, dilatante; b – lichide viscoplastice;

Pentru o zonă din filmul stabilizat, suficient de îndepărtată de capetele peretelui vertical (fig. 3.38.a), componenta z a ecuației de conservare a impulsului se scrie:

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \rho g \quad (3.248)$$

Înlocuind expresia tensiunii tangențiale din modelul Ostwald - de Waele, se obține:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^n = - \frac{\rho g}{\mu_a} \quad (3.249)$$

din care, prin integrare, se obține:

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^n = - \frac{\rho g}{\mu_a} y + C_1 \quad (3.250)$$

Deoarece $\partial v_z / \partial y = 0$ pentru $y = 0$, se obține constanta de integrare $C_1 = 0$. Integrând (3.250) se obține:

$$v_z = - \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \right)^{1/n} \left(\frac{n}{n+1} \right) y^{\frac{n+1}{n}} + C_2 \quad (3.251)$$

din care, pentru $y = \delta$, $v_z = 0$, iar a doua constantă de integrare este:

$$C_2 = \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \right)^{1/n} \left(\frac{n}{n+1} \right) \delta^{\frac{n+1}{n}} \quad (3.252)$$

Înlocuind (3.252) în (3.251) se obține distribuția vitezelor pe grosimea filmului:

$$v_z = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \delta^{n+1} \right)^{1/n} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.253)$$

Viteza maximă a lichidului se obține din (3.253) pentru $y = 0$:

$$v_{zM} = \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \delta^{n+1} \right)^{1/n} \quad (3.254)$$

Expresia vitezei locale funcție de viteza maximă este:

$$v_z = v_{zM} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.255)$$

Debitul volumic de lichid se poate calcula cu relația:

$$m_v = B \int_0^\delta v_z dy \quad (3.256)$$

în care B este lățimea filmului de lichid. După înlocuirea vitezei locale din ecuația (3.253) și integrare, expresia debitului volumic devine:

$$m_v = B \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \right)^{1/n} \delta^{\frac{2n+1}{n}} \quad (3.257)$$

Viteza medie de curgere se poate calcula ca raport între debitul volumic (m_v) și secțiunea de curgere ($B\delta$):

$$\hat{v}_z = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g}{\mu_a} \right)^{1/n} \delta^{\frac{n+1}{n}} \quad (3.258)$$

Viteza medie se poate exprima și în funcție de viteza maximă:

$$\hat{v}_z = v_{zM} \frac{n}{2n+1} \quad (3.259)$$

iar viteza locală poate fi exprimată în funcție de viteza medie:

$$v_z = \hat{v}_z \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (3.260)$$

Evident, pentru curgerea fluidelor newtoniene, în ecuațiile (3.249) - (3.260) se consideră $n = 1$.

În cazul lichidelor viscoplastice, există o zonă de lichid cu deplasare totală (fig. 3.38.b). Ecuația mișcării pe direcția z se poate scrie:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \quad (3.261)$$

Integrând (3.261) în ipoteza că suprafața liberă este lipsită de valuri rezultă:

$$\tau_{xz} = -\rho g(\delta - x) \quad (3.262)$$

în care δ este grosimea filmului. Din ecuație rezultă că tensiunea de forfecare variază liniar, având o valoare maximă la perete și anulându-se la suprafața liberă.

Un lichid cu prag de tensiune τ_0 va curge doar dacă τ_{xz} depășește valoarea critică τ_0 . Când $|\tau_{xz}| \leq \tau_0$ corpul se comportă ca un solid, iar pentru $|\tau_{xz}| > \tau_0$ va curge ca un lichid viscos. Conform ecuației (3.262) condiția de curgere este:

$$\rho g(\delta - x) > \tau_0 \quad (3.263)$$

de unde:

$$x < \delta - \frac{\tau_0}{\rho g} \equiv x_0 \quad (3.264)$$

Domeniul de curgere va fi cuprins între limitele:

$$0 \leq x < \delta - \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (3.265)$$

Pentru valori absolute ale tensiunii tangențiale τ_{xz} mai mici sau cel mult egale cu pragul de curgere, lichidul se deplasează ca un piston. Ecuația (3.262) devine:

$$\rho g(\delta - x) \leq \tau_0 \quad (3.266)$$

iar limitele acestui domeniu vor fi:

$$\delta - \frac{\tau_0}{\rho g} < x \leq \delta \quad (3.267)$$

Combinând (3.265) cu (3.267), rezultă că pentru condiția:

$$\delta \leq \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (3.268)$$

nu mai există zonă de curgere. Grosimea δ a filmului este suficient de mică încât tensiunea de forfecare la perete (τ_{xz}) este mai mică decât pragul de curgere (τ_0). Datorită acestui fapt se explică, de exemplu, fenomenul de

menținere a vopselelor proaspete (lichide viscoplastice) pe suprafețe verticale.

3.4.4. Curgerea prin orificii, ajutaje, baraje, deversoare, preaplinuri

3.4.4.1. Orificii

Prin **orificiu** se înțelege o deschidere practică într-un perete de grosime mică. La trecerea fluidului prin orificiu vâna de fluid este în contact numai cu muchia interioară a orificiului, grosimea peretelui neinfluențând practic curgerea fluidului.

Orificiile pot fi:

- în perete orizontal (fig. 3.39.a), înclinat sau vertical (fig. 3.39.b);
- mici sau mari în perete vertical; orificiile mici au dimensiunea verticală mai mică decât jumătate din sarcina hidraulică a orificiului;
- înecate (fig. 3.39.c) sau neînecate; la orificiile înecate vâna de fluid care iese din orificiu pătrunde într-un vas în care se află un fluid de aceeași natură.

La curgerea fluidului printr-un orificiu se constată “efectul orificiului”: liniile de curent converg înainte de a ajunge la orificiu, vâna de fluid se contractă, convergența continuând pe o anumită distanță și după orificiu. Raportul dintre aria secțiunii minime a vânei de fluid, A_c și aria orificiului, A_o se numește coeficient de contracție C_c :

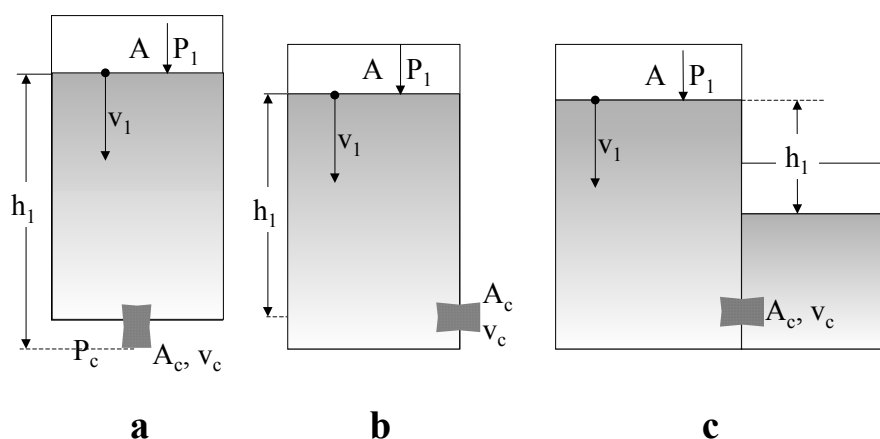


Fig. 3.39. Tipuri de orificii

a – de fund; b – în perete vertical neînecat; c – în perete vertical, înecat

$$C_c = \frac{A_c}{A_o} \quad (3.269)$$

Întrucât la trecerea prin orificiu fluidul întâmpină o rezistență hidraulică (suferă o cădere de presiune, ΔP_f), viteza reală a fluidului în secțiunea minimă, v_{cr} , este mai mare decât viteza teoretică pe care ar avea-o fluidul prin aceeași secțiune, v_c , dacă ar fi considerat ideal. Raportul dintre aceste două viteze se numește coeficient de viteză, C_v :

$$C_v = \frac{v_{cr}}{v_c} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_o}} \quad (3.270)$$

în care α_c este coeficientul de corecție al energiei cinetice (unitar în cazul curgerii turbulente), iar $\zeta_o \sim 0,06$ este coeficientul căderii locale de presiune pentru orificiu.

Ca urmare a reducerii vitezei fluidului se reduce și debitul de fluid, fapt de care se ține seama prin coeficientul de debit, C_d :

$$C_d = \frac{C_c \cdot C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_o}{A} C_c \cdot C_v \right)^2}} \quad (3.271)$$

în care A este aria secțiunii de curgere înainte de orificiu.

Coeficienții C_c , C_v și C_d sunt funcție de valoarea numărului Reynolds pentru orificiu. Uzual pentru $Re_o > 3000$:

$$C_c \approx 0,62 \quad C_v \approx 0,98 \dots 1,0 \quad C_d \approx 0,6 \quad (3.272)$$

Diferența de presiune pe care o determină un dispozitiv de strangulare de tipul orificiului poate servi ca măsură pentru determinarea vitezei sau debitului unui fluid, pe acest principiu fiind realizate debitmetrele diferențiale (cu diafragmă, cu ajutor, cu tub Venturi, etc.).

La curgerea unui fluid printr-un orificiu, neglijându-se căderea de presiune prin orificiu, ecuația Bernoulli capătă forma:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_c}{\rho g} + \frac{v_c^2}{2g} \quad (3.273)$$

Ținând seama de ecuația continuității:

$$A \cdot v_1 = A_c \cdot v_{cr} = C_c \cdot A_o \cdot C_v \cdot v_c \quad (3.274)$$

și efectuând substituția în (3.273) rezultă expresia vitezei fluidului:

$$v_c = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_o}{A} C_c C_v \right)^2}} \quad (3.275)$$

sau:

$$v_{cr} = \frac{C_v \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_o}{A} C_c C_v \right)^2}} \quad (3.276)$$

în care prin h s-a notat sarcina hidrolică a orificiului:

$$h = \frac{P_1 - P_c}{\rho g} \quad (3.277)$$

Debitul de fluid prin orificii va fi dat de relația:

$$m_v = A_c \cdot v_{cr} = C_d \cdot A_o \sqrt{2gh} \quad (3.278)$$

care este binecunoscuta **ecuație a lui Torricelli**.

Ecuatiile (3.276) și (3.278) sunt aplicabile și în cazul curgerii unui lichid printr-un orificiu practicat în fundul sau peretele vertical al unui rezervor, cazuri în care sarcina orificiului va fi:

$$h = h_1 + \frac{P_1 - P_c}{\rho g} = h_1 + \frac{\Delta P}{\rho g} \quad (3.279)$$

în care h_1 are semnificația corespunzătoare notațiilor din fig. 3.38. De asemenea, atunci când $\Delta P < 0,01 P_1$, ecuațiile respective pot fi utilizate - fără a introduce erori prea mari - și pentru calculul vitezei sau al debitului volumic la curgerea fluidelor compresibile.

3.4.4.2. Ajutaje

Ajutajele sau **duzele** au rolul de a dirija jetul de fluid care trece printr-un orificiu (fig. 3.40).

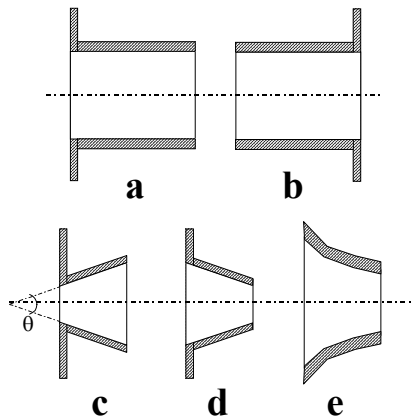


Fig. 3.40. Tipuri de ajutaje
a – cilindric exterior; b – cilindric interior; c – tronconic divergent;
d – tronconic convergent; e – conoidal

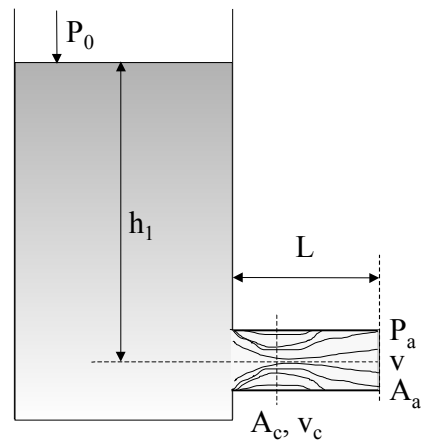


Fig. 3.41. Ajutaj cilindric exterior

În cazul unui ajutoraj cilindric exterior (fig. 3.41) prevăzut la un orificiu practicat în peretele vertical al unui rezervor, ajutorajul va funcționa cu toată secțiunea sa după distanța $L = 3d_a$, d_a fiind diametrul ajutorajului.

Ecuția lui Bernoulli capătă forma:

$$\frac{P_a}{\rho g} + h_1 = \frac{P_a}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \zeta_a \frac{v^2}{2g} \quad (3.280)$$

unde $\zeta_a = 0,5$ este coeficientul de rezistență locală la curgerea prin ajutoraj.

În aceste condiții:

$$h_1 = 1,5 \frac{v^2}{2g} \quad (3.281)$$

$$v = 0,81 \sqrt{2gh_1} \quad (3.282)$$

$$m_v = A_o \cdot v = C_d \cdot A_a \sqrt{2gh_1} \quad (3.283)$$

unde A_a este aria secțiunii ajutorajului, iar $C_d = 0,81...0,85$ este coeficientul de debit la curgerea prin ajutoraj. Comparând coeficientul de debit al ajutorajului (0,81...0,85) cu coeficientul de debit al orificiului (0,60), se poate constata că debitul de lichid la curgerea printr-un orificiu prevăzut cu ajutoraj este mai mare.

În cazul unui ajutoraj cilindric interior (fig. 3.40.b), în regim turbulent de curgere, coeficientul de debit are valori cuprinse între 0,50...0,54 dacă $L < 3d_a$, respectiv de 0,71 dacă $L > 3d_a$.

În cazul unui ajutoraj tronconic convergent (fig. 3.40.c), coeficientul de debit este funcție de unghiul θ . Valoarea maximă (0,946) a coeficientului se obține pentru $\theta = 13^\circ 24'$.

3.4.4.3. Baraje

Barajul este un obstacol transversal pe direcția de curgere a lichidului dintr-un canal. Curgerea lichidelor prin baraje se poate asemăna cu curgerea printr-un orificiu a cărui înălțime nu este în întregime plină cu lichid.

Viteza lichidului la ieșirea dintr-un orificiu situat la distanța h de nivelul lichidului (și când deasupra lichidului și în afara orificiului este aceeași presiune) se calculează cu ecuația lui Torricelli în forma:

$$v = C \sqrt{2gh} \quad (3.284)$$

Aplicând această ecuație unui strat orizontal de grosime dh care se găsește la adâncimea h față de nivelul suprafeței libere a lichidului, considerată la o distanță destul de mare de baraj pentru a nu fi influențată de acesta, se obține pentru debitul din stratul orizontal considerat expresia:

$$dm_v = v \cdot L \cdot dh = C\sqrt{2gh} \cdot L \cdot dh \quad (3.285)$$

unde L este lungimea crestei barajului (fig. 3.42.a).

Integrând pe toată grosimea h a stratului de lichid se obține:

$$m_v = C \cdot L \sqrt{2g} \int_0^h h^{1/2} dh = \frac{2}{3} C \cdot L \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \quad (3.286)$$

Cu valoarea medie $C = 0,626$, se ajunge la ecuația:

$$m_v = 1,84L \cdot h^{3/2} \quad (3.287)$$

Alte forme de baraje, precum și ecuațiile de calcul pentru debit sunt redată în fig. 3.42 și în tab. 3.12.

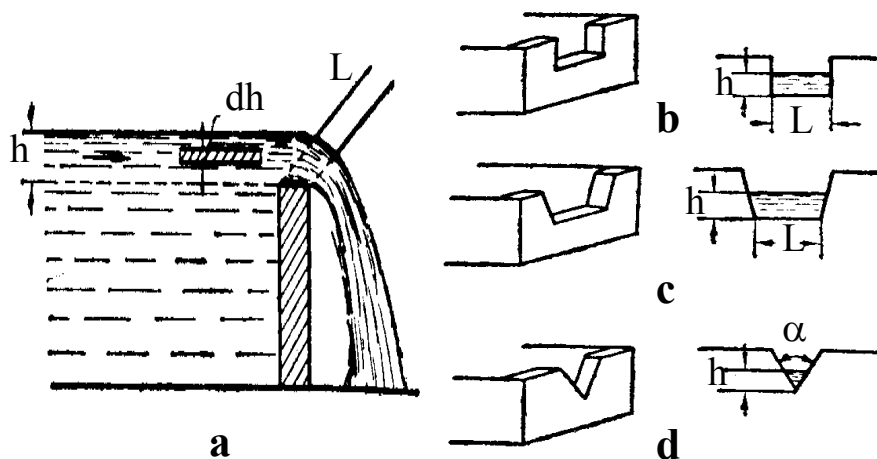


Fig. 3.42. Tipuri de baraje

a – orizontal; b – dreptunghiular; c – trapezoidal; d - triunghiular

Tab. 3.12. Calculul debitului prin baraje

Forma barajului	Expresia debitului	Observații
Orizontală (a)	$m_v = 1,84Lh^{1,5}$	Dacă L este suficient de mare pentru a putea neglija efectele de margine
Rectangulară (b)	$m_v = 1,84(L - 0,2h)h^{1,5}$	
Trapezoidală (c)	$m_v = 1,84Lh^{1,5}$	Panta pereților egală cu 4:1
Triunghiulară (d)	$m_v = 1,34[\text{tg}(\alpha/2)]^{0,996} h^{2,47}$	Pentru măsurarea debitelor care variază în limite largi
Curbă	$m_v = Ch$	Aplicabil dacă se verifică relația: $Lh^{0,5} = \text{constant}$

3.4.4.4. Deversoare

Deversorul sau **preaplinul** este o conductă - de obicei cu secțiune circulară - având marginea superioară într-un plan orizontal peste care deversează un lichid, fără a umple în întregime secțiunea deversorului (fig. 3.43). Astfel de dispozitive se întâlnesc frecvent în interiorul coloanelor cu talere, asigurând trecerea descendentă a lichidului de pe un taler pe altul.

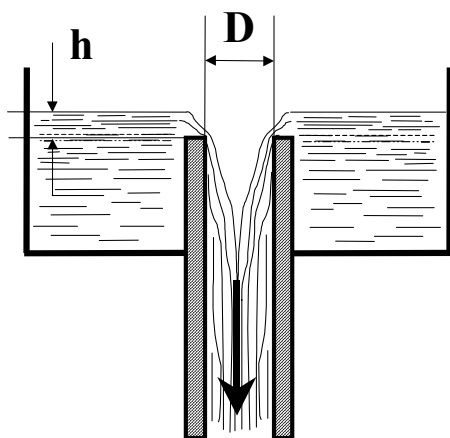


Fig. 3.43. Deversor

O relație frecvent întâlnită în calculul hidraulic al coloanelor de separare este:

$$h_d = 0,667k_d \left(\frac{m_v}{\pi D} \right)^{2/3} \quad (3.290)$$

în care $k_d = 1,0 \dots 1,2$ este un factor de corecție care ține seama de efectul de comprimare al pereților coloanei.

Pentru deversoare circulare cu diametrul D , debitul se poate determina cu relația lui **Gourley**:

$$m_v = 1,47 L h^{1,4} \quad (3.288)$$

aplicabilă dacă $h < 0,2D$. L reprezintă perimetrul interior al marginii deversorului.

Pentru deversoare circulare sau dreptunghiulare, la care are loc o comprimare laterală, debitul se poate calcula cu relația:

$$m_v = 1,773 L h_d^{2/3} \quad (3.289)$$

în care $L = \pi D$ este perimetrul deversorului, iar h_d este înălțimea

3.5. CURGEREA ÎN SISTEME ETEROGENE

Multe operații unitare întâlnite în industria alimentară sau în biotehnologii au loc în sisteme eterogene gaz-lichid, gaz-solid, lichid-lichid, lichid-solid, gaz-lichid-solid. În majoritatea cazurilor, aceste sisteme se găsesc în mișcare, comportându-se fie ca un sistem pseudo-omogen, fie ca o fază dispersă care curge printr-o fază continuă. Se pot menționa ca exemple: hidrotransportul și spălarea legumelor și fructelor, transportul pneumatic al cerealelor și făinurilor, uscarea produselor pulverulente și granulare în strat fluidizat, curgerea lichidelor peste un fascicol de țevi în schimbătoarele de căldură, sedimentarea particulelor solide într-un lichid în procesele de

sedimentare și filtrare, curgerea gazelor prin straturi granulare stropite cu lichide în procesele de absorbție, curgerea picăturilor unui lichid într-un alt lichid nemiscibil în procesele de extracție lichid-lichid și enumerarea poate continua. Curgerea în sisteme eterogene este deosebit de importantă pentru toate procesele fundamentale de transfer: de impuls, de căldură, de masă.

3.5.1. Curgerea bifazică sub presiune

Acest tip de curgere (lichid-gaz sau lichid-vapori) este frecvent întâlnit cu precădere în conductele de transport a gazelor condensabile, în evaporatoare, condensatoare, rețineri, coloane de absorbție, etc.

Dat fiind faptul că procesul curgerii bifazice este deosebit de complex, descrierea sa necesită minimum 12 variabile, respectiv minimum 9 criterii de similitudine determinate, tratarea riguros matematică fiind practic imposibilă, studiile experimentale efectuate s-au limitat doar la curgerea sistemelor lichid-gaz prin conducte, în regim staționar și izoterm.

La curgerea simultană a două faze fluide nemiscibile printr-o conductă, distribuția fluidelor (fig. 3.44) va fi funcție de orientarea conductei, debitele fluidelor, viteza de modificare a mișcării unui fluid, etc.

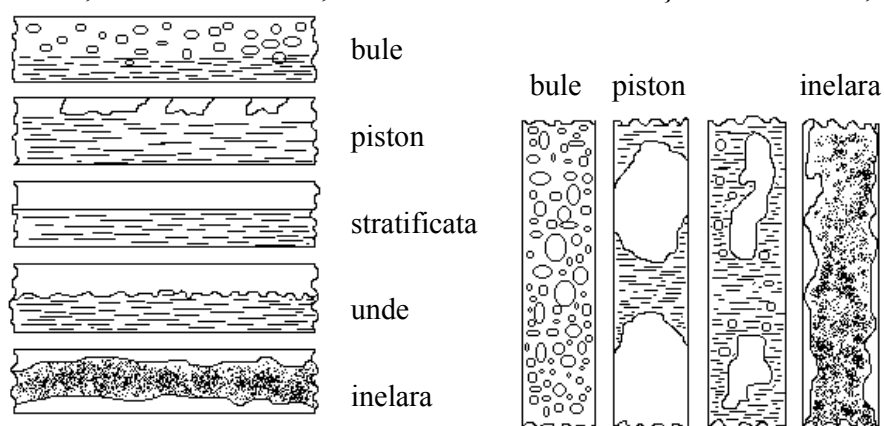


Fig. 3.44. Tipuri de curgere bifazică prin conducte orizontale și verticale

Pentru aproximarea tipului de curgere se pot folosi diagramele din fig. 3.45 sau datele din tab. 3.13 (date valabile pentru lichide cu vâscozitate până la 0,1 kg/(m.s) și gaze având densitatea aproximativ egală cu cea a aerului).

Parametrii care intervin în corelările grafice din fig. 3.45 se determină cu relațiile:

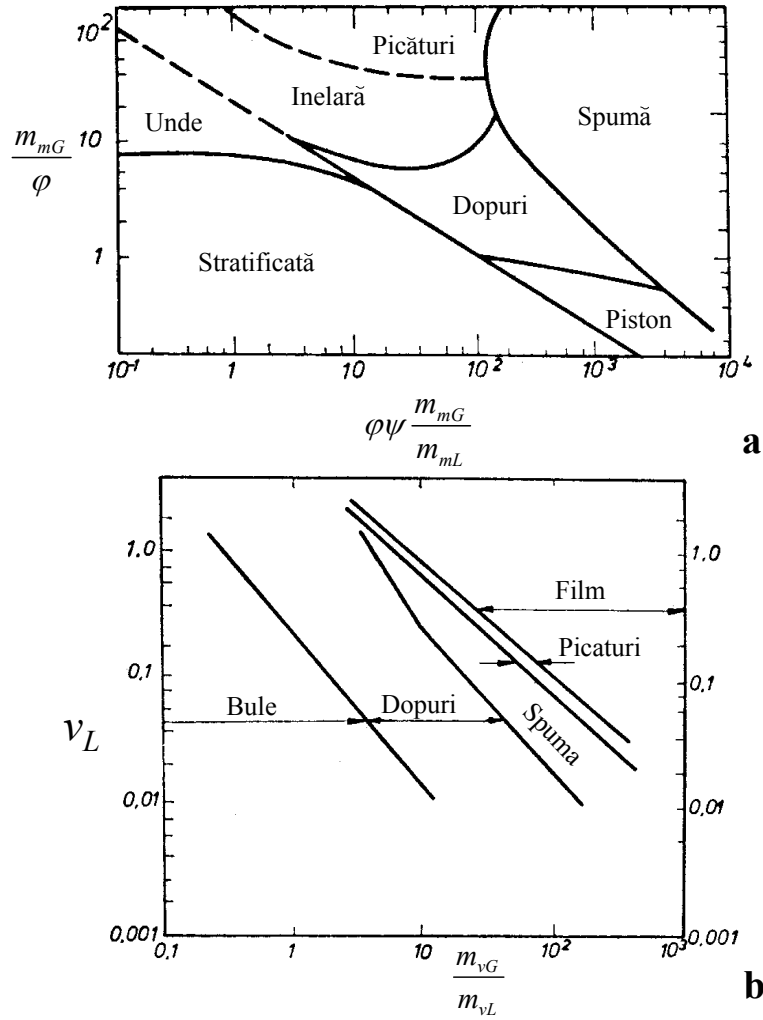


Fig. 3.45. Limitele domeniilor la curgerea bifazică
a – orizontală; b – ascendent - verticală

$$m_{mL} = \frac{m_{vL} \cdot \rho_L}{A} = \frac{4m_{vL} \cdot \rho_L}{\pi D^2} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}] \quad (3.291)$$

$$m_{mG} = \frac{m_{vG}^0 \cdot \rho_G^0}{A} = \frac{4m_{vG}^0 \cdot \rho_G^0}{\pi D^2} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}] \quad (3.292)$$

$$\varphi = \left[\frac{\rho_G}{1,2} \cdot \frac{\rho_L}{998} \right]^{1/2} \quad (3.293)$$

$$\psi = \frac{0,073}{\sigma_L} \left[10^3 \mu_L \left(\frac{998}{\rho_L} \right)^2 \right]^{1/3} \quad (3.294)$$

în care:

ρ_L și ρ_G - densitățile lichidului și gazului, în condițiile de operare, kg.m^{-3} ;

ρ_G^0 - densitatea gazului la 273 K și 0,1 MPa, kg.m^{-3} ;

μ_L - viscozitatea lichidului, $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$;

σ_L - tensiunea superficială a lichidului, N.m^{-1} ;

m_{vL} - debitul volumic de lichid, $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$;

m_{vG}^0 - debitul volumic de gaz, în condiții normale, $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$.

Tab. 3.13. Tipuri de curgere bifazică

Tipul curgerii	Poziția conductei	
	orizontală	verticală ascendentă
Cu bule (tip spumă)	$v_l = 1,5 \dots 5,0 \text{ m/s}$ $v_g = 0,3 \dots 3,5 \text{ m/s}$	$v_g \leq 0,6 \text{ m/s}$
Tip piston sau dop	$v_l < 0,6 \text{ m/s}$ $v_g < 1,0 \text{ m/s}$	$v_g = 0,6 \dots 9,0 \text{ m/s}$
Stratificată	$v_l < 0,15 \text{ m/s}$ $v_g = 0,6 \dots 9,0 \text{ m/s}$	-
Inelară (în film)	$v_g > 6,0 \text{ m/s}$	$v_l < 0,6 \text{ m/s}$ $v_g > 9,0 \text{ m/s}$
Ceață	$v_g > 60 \text{ m/s}$	$v_g > 20 \text{ m/s}$

Vitezele medii liniare ale lichidului și gazului (v_L și v_G) sunt calculate pentru întreaga arie a secțiunii conductei, iar parametrii φ și ψ sunt factori de corecție pentru presiune și temperatură cu care datele de bază – stabilite pentru sistemul apă-aer la 293 K și 0,1 MPa – pot fi adaptate la condițiile de operare pentru alte fluide.

Data fiind complexitatea curgerii bifazice, nu există corelări analitice care să permită calculul căderii de presiune. În cazul curgerii bifazice prin conducte orizontale, căderea totală de presiune este mai mare decât suma algebrică a căderilor de presiune estimate pentru curgerea separată a fiecărei faze, în special datorită consumurilor suplimentare de energie determinate de prezența interfeței și de variația poziției acesteia în lungul conductei.

3.5.2. Curgerea peste corpuri solide

Cu excepția situațiilor în care curgerea fluidului este turbulentă (caz în care trebuie să se țină seama de intensitatea turbulenței), la determinarea rezistenței la înaintare se ține seama de viteza relativă dintre faze; nu contează care dintre faze este faza staționară. Rezistența la înaintare fiind o funcție complexă de mai multe variabile (proprietățile fluidului și regimul de curgere, natura și mărimea forțelor exterioare care acționează asupra sistemului, forma, dimensiunile, concentrația, orientarea și traiectoria particulelor solide), nu poate fi determinată analitic decât în cazuri simple sau simplificate, în celelalte situații fiind necesară utilizarea unor corelații empirice sau semiempirice.

3.5.2.1. Curgerea unui fluid peste corpuri solide imersate

Un fluid care curge în jurul unui corp solid imersat întâmpină din partea acestuia o rezistență, rezistență datorată tensiunilor tangențiale la perete (rezistența de suprafață, R_s) și presiunii pe care fluidul o exercită asupra conturului solid (rezistența de formă, R_f). Rezistența totală este determinată de suma acestor componente integrată pe toată suprafața corpului.

Se consideră o particulă sferică de diametru d_p imersată într-un fluid newtonian aflat în curgere laminară izotermă (fig. 3.46). Condiția de curgere laminară este $Re_p < 0,1$, numărul Reynolds pentru particulă fiind:

$$Re_p = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot d_p}{\mu} \quad (3.295)$$

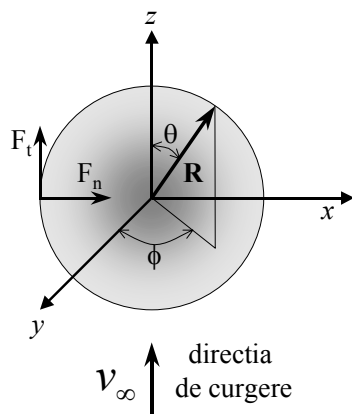


Fig. 3.46. Curgerea în jurul unei particule sferice solide

în care v_∞ reprezintă viteza uniformă de mișcare a fluidului la o distanță suficient de mare de particulă pentru a nu fi influențată de aceasta, iar ρ și μ reprezintă densitatea, respectiv viscozitatea fluidului.

În fiecare punct al sferei există o presiune normală la suprafață. Forța rezultantă, ce acționează în direcția z , direcția în care are loc curgerea, se determină dacă se integrează pe întreaga suprafață a sferei produsul dintre presiune și o suprafață elementară. În final se obține:

$$F_n = \frac{3}{4} \pi R^3 \rho g + 2\pi \mu R v_\infty \quad (3.296)$$

în care primul termen din membrul drept reprezintă forța ascensională, F_a , iar al doilea termen reprezintă rezistența de formă, R_f . În fiecare punct există o forță ce acționează tangențial, cauzată de tensiunea de forfecare. Componenta z a acestei forțe rezultă prin integrarea pe întreaga suprafață a sferei, a produsului dintre tensiunea tangențială și o suprafață elementară, ea reprezentând rezistența datorită frecării:

$$F_t = R_s = 4\pi \mu R v_\infty \quad (3.297)$$

Forța totală ce acționează asupra sferei va fi:

$$\begin{aligned} F &= F_n + F_t = F_a + R_f + R_s = \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 2\pi \mu R v_\infty + 4\pi \mu R v_\infty = \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi \mu R v_\infty \end{aligned} \quad (3.298)$$

Forța totală este formată din doi termeni: primul se datorează forței ascensionale care se manifestă asupra sferei independent de condițiile de curgere ale fluidului, iar cel de-al doilea, rezistența la înaintare, trebuie asociat numai cu fluidul în curgere. Pentru fluide statice, acest termen este nul. Forța dată de cel de-al doilea termen este cunoscută sub denumirea de **legea lui Stokes**:

$$R_t = R_s + R_f = 6\pi \mu R v_\infty = 3\pi \mu d_p v_\infty \quad (3.299)$$

Datele experimentale au confirmat valabilitatea legii lui Stokes până la valori $Re_p \leq 2$. Ecuația (3.299) se poate scrie și sub forma:

$$R_t = \xi \pi R^2 \frac{v_\infty^2}{2} \rho = 6\pi \mu R v_\infty \quad (3.300)$$

de unde se exprimă factorul de formă ξ :

$$\xi = \frac{24\mu}{d_p \rho v_\infty} = \frac{24}{Re_p} \quad (3.301)$$

În diagrama din fig. 3.47 este redată dependența factorului de formă ξ de numărul Re_p pentru particule de diverse forme. În domeniul de curgere **Stokes** ($Re_p \leq 2$) este valabilă relația (3.301). Pentru domeniul de curgere intermediar **Allen** ($2 < Re_p < 1000$) datele experimentale se pot corela prin ecuația:

$$\xi = 18,5 (Re_p)^{-0,6} \quad (3.302)$$

iar pentru domeniul de curgere **Newton** ($10^3 < Re_p < 10^5$) factorul de frecare este constant, pentru particule sferice având valoarea:

$$\xi = 0,44 \quad (3.303)$$

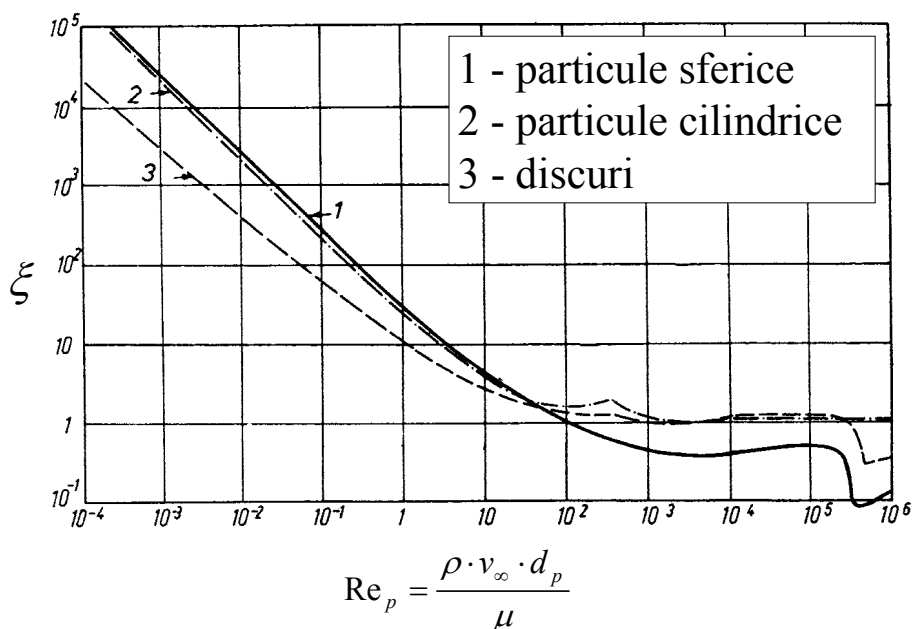


Fig. 3.47. Dependența coeficientului de rezistență ξ de numărul Re_p

3.5.2.2. Mișcarea particulelor solide printr-un fluid

În cadrul proceselor de prelucrare din biotehnologii și din industria alimentară se întâlnesc numeroase cazuri când granule, picături sau bule de gaz se deplasează în masa unui fluid. Astfel de curgeri stau la baza proceselor de separare a suspensiilor solid-lichid și solid-gaz, a extracției lichid-lichid, a absorbției, a umidificării gazelor, etc.

Pentru stabilirea unor relații cantitative în cazul mișcării unor particule printr-un fluid, se introduc următoarele ipoteze simplificatoare: particula are formă sferică, mișcarea sa este uniformă, unidirecțională și individuală (neinfluențată de prezența altor particule sau a pereților solizi care mărginesc sistemul), fluidul este staționar.

Pentru ca particula să se deplaseze printr-un fluid staționar este necesar ca să existe o diferență între densitatea particulei, ρ_p și densitatea fluidului, ρ_f , iar asupra particulei să acționeze o forță externă (gravitațională, centrifugală, etc.).

Dacă forța externă este forța gravitațională, asupra particulei vor acționa următoarele forțe (fig. 3.48):

- forța externă (gravitațională):

$$G = m_p g = V_p \rho_p g = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_p g \quad (3.304)$$

- forța de plutire (forța arhimedică):

$$F_a = m_f g = V_p \rho_f g = \frac{\pi d_p^3}{6} \rho_f g \quad (3.305)$$

- forța de rezistență a mediului la înaintarea particulei:

$$R_s = \xi \frac{v_0^2}{2} \rho_f A = \xi \frac{v_0^2}{2} \rho_f \frac{\pi d_p^2}{4} \quad (3.306)$$

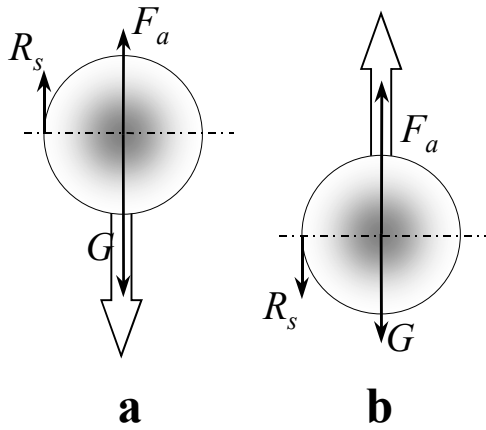


Fig. 3.48. Forțe care acționează asupra unei particule sferice care se deplasează printr-un fluid
a) $G > F_a$; b) $G < F_a$.

în care m_p , ρ_p , V_p , d_p reprezintă respectiv: masa particulei, densitatea particulei, volumul particulei, diametrul particulei; m_f este masa de fluid dislocuită de particulă, ρ_f este densitatea fluidului, A este aria proiecției corpului pe un plan normal pe direcția mișcării, v_0 este viteza terminală, ξ este factorul de formă, iar g este accelerația gravitațională.

Forța de rezistență a mediului, R_s , este orientată întotdeauna în sens contrar rezultantei dintre forța gravitațională și forța ascensională.

În cazul particulelor având $\rho_p > \rho_f$ mișcarea este în sensul forței gravitaționale (fig. 3.48.a), în timp ce în cazul particulelor cu $\rho_p < \rho_f$ deplasarea este în sensul forței ascensionale (fig. 3.48.b).

În absența forței R_s , particula s-ar mișca uniform accelerat. Această forță este funcție de viteza mișcării particulei. Ea crește până când rezistența mediului egalează greutatea corpului, adică:

$$G - F_a = R_s \quad (3.307)$$

La îndeplinirea condiției (3.307), particula se deplasează uniform, cu viteză constantă. Această viteză este tocmai v_t , viteză denumită **viteză terminală** (viteză critică, viteză de sedimentare, viteză de plutire, viteză de planare). Din (3.304) – (3.307) rezultă expresia vitezei terminale:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{\xi} \frac{(\rho_p - \rho_f) d_p}{\rho_f}} \quad (3.308)$$

sau expresia coeficientului de rezistență a mediului:

$$\xi = \frac{4}{3} \frac{g d_p}{v_0^2} \left(\frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \right) \quad (3.309)$$

Ecuatiile (3.308) și (3.309) sunt valabile atât în cazul deplasării uniforme a particulelor sferice prin fluide newtoniene cât și în cazul deplasării lor prin fluide nenewtoniene.

În cazul deplasării particulelor prin fluide newtoniene, pentru calculul coeficientului de rezistență ξ sunt valabile relațiile (3.301 - 3.303).

Determinarea vitezei terminale cu relația (3.308) se poate face numai prin aproximări succesive, întrucât v_0 este funcție de ξ care la rândul său este funcție de Re_p , adică de v_0 . Pentru calculul direct al vitezei terminale se poate utiliza **criteriul Arhimede** modificat:

$$Ar = \frac{d_p^3 \rho_f^2 g}{\mu_f^2} \cdot \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \quad (3.310)$$

Dacă în (3.308) se înlocuiește v_0 cu raportul care rezultă din relația de definire a lui Re_p , se explicitează pentru ξ și se ține seama de (3.310), se obține în final:

$$\xi = \frac{4}{3} \frac{Ar}{(Re_p)^2} \quad (3.311)$$

Pentru fiecare domeniu de curgere, relația (3.311) împreună cu relațiile caracteristice (3.301) – (3.303) permit stabilirea următoarelor funcții:

- pentru domeniul Stokes ($Ar \leq 36$):

$$Re_p = \frac{Ar}{18} \quad (3.312)$$

- pentru domeniul Allen ($36 < Ar < 8,4 \cdot 10^4$):

$$Re_p = \left(\frac{Ar}{13,9} \right)^{0,715} \quad (3.313)$$

- pentru domeniul Newton ($8,4 \cdot 10^4 < Ar < 7,4 \cdot 10^9$):

$$Re_p = 1,71 \sqrt{Ar} \quad (3.314)$$

Așa cum s-a menționat, relațiile prezentate sunt valabile pentru particule sferice individuale a căror mișcare nu este influențată de alte particule sau de pereții recipientului. În alte condiții, este necesară introducerea unor corecții.

În cazul particulelor de altă formă decât cea sferică, este necesară cunoașterea mărimii, formei geometrice și orientării particulelor în raport cu direcția de mișcare.

În fig. 3.47 sunt redată curbele care redau dependența $\xi = f(\text{Re}_p)$ și pentru particule sub formă de discuri și cilindri, particule orientate cu axa cilindrului (fața discului) normal pe direcția de curgere.

Abaterea de la forma sferică a particulelor poate fi estimată prin intermediul **factorului de sfericitate** (φ), definit prin:

$$\varphi = \left(\frac{d_{pv}}{d_{ps}} \right)^2 \quad (3.315)$$

unde d_{pv} reprezintă diametrul unei sfere având același volum cu particula considerată, iar d_{ps} reprezintă diametrul unei sfere având aceeași suprafață exterioară cu particula considerată. După cum reiese din fig. 3.49, cu cât particula are o sfericitate mai redusă ($\varphi \ll 1$), cu atât coeficientul de rezistență ξ este mai mare.

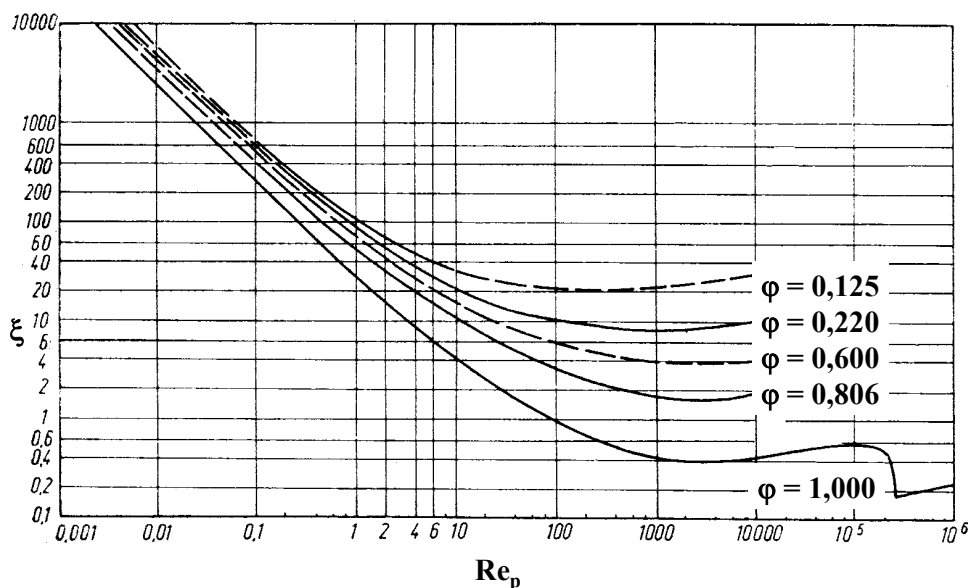


Fig. 3.49. Influența factorului de sfericitate φ asupra coeficientului de rezistență a mediului, ξ

În cazul particulelor a căror mișcare este influențată de prezența altor particule, se manifestă un efect de frânare asupra particulei considerate, fapt care conduce la micșorarea vitezei acesteia, respectiv la creșterea coeficientului de frecare. Efectul este cu atât mai intens cu cât

concentrația fazei solide în sistem este mai ridicată, așa cum reiese din fig. 3.50. Viteza terminală reală a particulelor va fi dată de relația:

$$(v_t)_{real} = \alpha_1 (v_t)_{calc} \quad (3.316)$$

unde α_1 este un factor de corecție care este funcție de fracția volumică a fazei solide în sistem ($x_{[s]}$), iar $(v_t)_{calc}$ este viteza terminală calculată pentru o particulă individuală, neinfluențată de alte particule.

În cazul în care diametrul particulelor este relativ mare în raport cu diametrul recipientului în care se află sistemul fluid – particule, pereții recipientului manifestă un efect suplimentar de frânare a mișcării particulelor, efect de care se ține seama prin intermediul factorului de corecție α_2 :

$$(v_t)_{real} = \alpha_2 (v_t)_{calc} \quad (3.317)$$

Pentru domeniul Stokes, dependența lui α_2 de raportul dintre diametrul particulelor (d_p) și diametrul recipientului, (D_r) este redată în tabelul 3.14.

Tab. 3.14. Valorile factorului de corecție α_2

d_p/D_r	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400
α_2	1,000	0,792	0,596	0,422	0,279
d_p/D_r	0,500	0,600	0,700	0,800	
α_2	0,170	0,0945	0,0468	0,0203	

În domeniul Newton, valoarea lui α_2 se poate calcula cu relația:

$$\alpha_2 = 1 - \left(\frac{d_p}{D_r} \right)^{1,5} \quad (3.318)$$

În cazul deplasării particulelor prin fluide nenewtoniene, coeficientul de rezistență ξ poate fi estimat cu ajutorul corelațiilor Slattery-Bird. Aceste corelații au fost stabilite pentru fluide pseudoplastice care pot fi reprezentate prin modelul Ellis:

$$\tau_{yx} = \frac{1}{a + b \cdot \tau_{yx}^{m-1}} \cdot \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (3.319)$$

în care a și b sunt constante dimensionale exprimate în $[m^2/(N.s)]$, iar m este o constantă adimensională. Modelul Ellis sugerează o comportare newtoniană pentru $m > 1$ și tensiuni de forfecare mici, sau pentru $m < 1$ și tensiuni de forfecare mari. De asemenea, el se poate reduce la fluidul lui Newton ($b = 0$), respectiv la “legea puterii” ($a = 0$).

Corelațiile Slattery-Bird sunt de forma:

$$\xi = f(Re_E, E, m) \quad (3.320)$$

$$Re_E = d_p \cdot v_t^{2m-1} \cdot \rho^m \cdot b \quad (3.321)$$

$$E = \frac{a^{2m-1} \cdot \rho^{m-1} \cdot d_p^{2(m-1)}}{b} \quad (3.322)$$

Ecuția (3.320) poate fi scrisă sub forma:

$$\lg \xi = -2,1013(m-1) - 2,0303(m-1)^2 + \lg \xi \cdot [1 + 1,0342(m-1) + 3,5017(m-1) \left(\frac{1}{E+1} \right) - 3,7789(m-1) \left(\frac{1}{E+1} \right)^2 + 1,0502(m-1)^2] \quad (3.323)$$

prin corelarea empirică a datelor experimentale.

- Pentru $Re_E < 0,1$, coeficientul de rezistență ξ are forma:

$$\xi = \frac{24}{Re_E} \quad (3.324)$$

care se reduce la legea lui Stokes pentru $m = 1$ și $E = 0$.

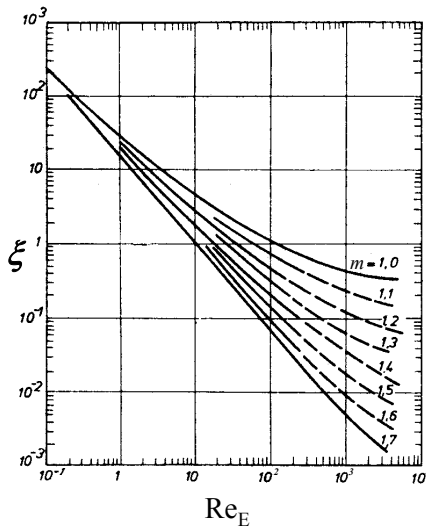


Fig. 3.51. Coeficientul de rezistență ξ funcție de Re_E și m

- Pentru $Re_E > 0,1$, coeficientul ξ se corelează cu Re_E pentru diferite valori ale lui m în conformitate cu curbele redată în figura 3.51. Curba pentru $m = 1$ corespunde mișcării particulelor sferice în fluide newtoniene.

Viteza terminală a unei particule sferice într-un fluid pseudoplastice se poate calcula cu relația (3.308), iar coeficientul de rezistență a mediului cu relația (3.309).

Ecuțiile (3.320 – 3.324) și corelarea grafică din fig. 3.51 pot fi adaptate și pentru fluide

FENOMENE DE TRANSFER

pseudoplastice reprezentate prin legea puterii, dacă se efectuează substituțiile:

$$\begin{aligned}E &= 0 \\m &= 1/n \\b &= (1/k_p)^{1/n}\end{aligned}\tag{3.325}$$

În cazul în care particulele sedimentează (sub influența unui câmp de forțe gravitaționale), într-un fluid aflat de asemenea în mișcare, în altă direcție decât direcția de deplasare a particulei, viteza terminală calculată reprezintă viteza relativă de mișcare dintre cele două faze. Viteza terminală reală se calculează în aceste condiții cu relația:

$$(v_t)_{real} = (v_t)_{calc} - v_v\tag{3.326}$$

în care v_v reprezintă componenta verticală a vitezei de deplasare a fluidului.

3.5.3. Curgerea prin straturi granulare și umpluturi

În cadrul unor operații unitare întâlnite atât în industria alimentară cât și în biotehnologii, fluidele străbat straturi formate din particule solide: granule, corpuri de umplere, pulberi. Straturile pot fi străbătute de un singur fluid (filtrare, adsorbție, schimb ionic), sau de două fluide diferite curgând în contracurent (extracție, absorbție, rectificare).

În majoritatea cazurilor stratul granular este imobil (**strat fix**), dar există cazuri în care stratul granular se deplasează și el. Acesta este cazul proceselor realizate în **strat mobil**.

În unele cazuri, viteza fluidului este suficient de mare pentru ca impulsul transferat de la fluid la particulele solide să egaleze sau să depășească greutatea efectivă a particulelor, caz în care stratul de particule expandează, apărând **stratul fluidizat**.

Dacă viteza fluidului depășește anumite limite, particulele de solid sunt antrenate de fluid, având loc **transportul pneumatic**.

3.5.3.1. Umpluturi și corpuri de umplere

Eficiența unui proces este condiționată de asigurarea unui bun contact între fazele participante. Unul dintre mijloacele cele mai răspândite pentru asigurarea unui bun contact între două faze fluide îl reprezintă trecerea celor două faze în contracurent, prin coloane cu umplutură. Straturile de umplutură servesc și altor scopuri: reținerea pulberilor din gaze și aer, îmbunătățirea transferului termic, cataliza, etc.

O bună umplutură trebuie să îndeplinească următoarele condiții: suprafață specifică mare, volum mare de goluri, bună rezistență mecanică și chimică.

Materialele de umplere pot fi grupate în: (1) - materiale de formă neregulată, (2) - corpuri de umplere cu formă definită, (3) - grătare, (4) - împletituri metalice sau din fibre.

Materialele de formă neregulată folosite ca umplutură sunt: bucăți de cocs, cuarț, andezit, cărămidă, pietre, etc. Au în general dimensiuni de 25 – 100 mm. Prezintă avantajul disponibilității și al unor costuri scăzute, sunt rezistente din punct de vedere mecanic și chimic. Au dezavantajul unei suprafețe specifice mici, a unui volum liber mic și a unei rezistențe hidraulice ridicate. Au, din aceste motive, o eficacitate scăzută și de aceea sunt utilizate arareori.

Corpurile de umplere cu formă definită sunt cel mai des utilizate în echiparea coloanelor cu umplutură. Aceste corpuri (fig. 3.52) - confecționate din materiale metalice, ceramică, porțelan, mase plastice, fibre de sticlă, etc. – se pretează cel mai bine la realizarea proceselor de transfer interfazic. Există, pentru fiecare proces, o dimensiune optimă a corpurilor de umplere: corpurile mici au o suprafață specifică mare, dar și o rezistență hidraulică crescută, și viceversa. În cazul corpurilor ceramice, spăturile rezultate pot mări considerabil rezistența hidraulică a stratului de umplutură.

Forma corpurilor de umplere a rezultat din condiția așezării lor neregulate în strat (fig. 3.53.a). Uneori, corpurile de umplere mari sunt așezate individual, ordonat (fig. 3.53.b).

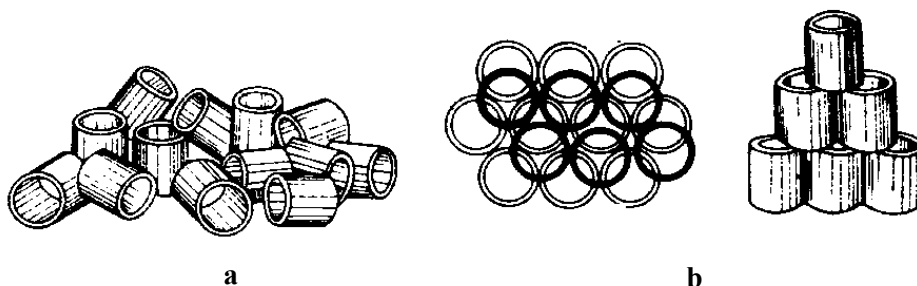


Fig. 3.53. Inele Raschig așezate în vrac (a) și ordonat (b)

Principalele caracteristici ale unor corpuri de umplere așezate ordonat și în vrac sunt prezentate în tab. 3.15 - 3.17.

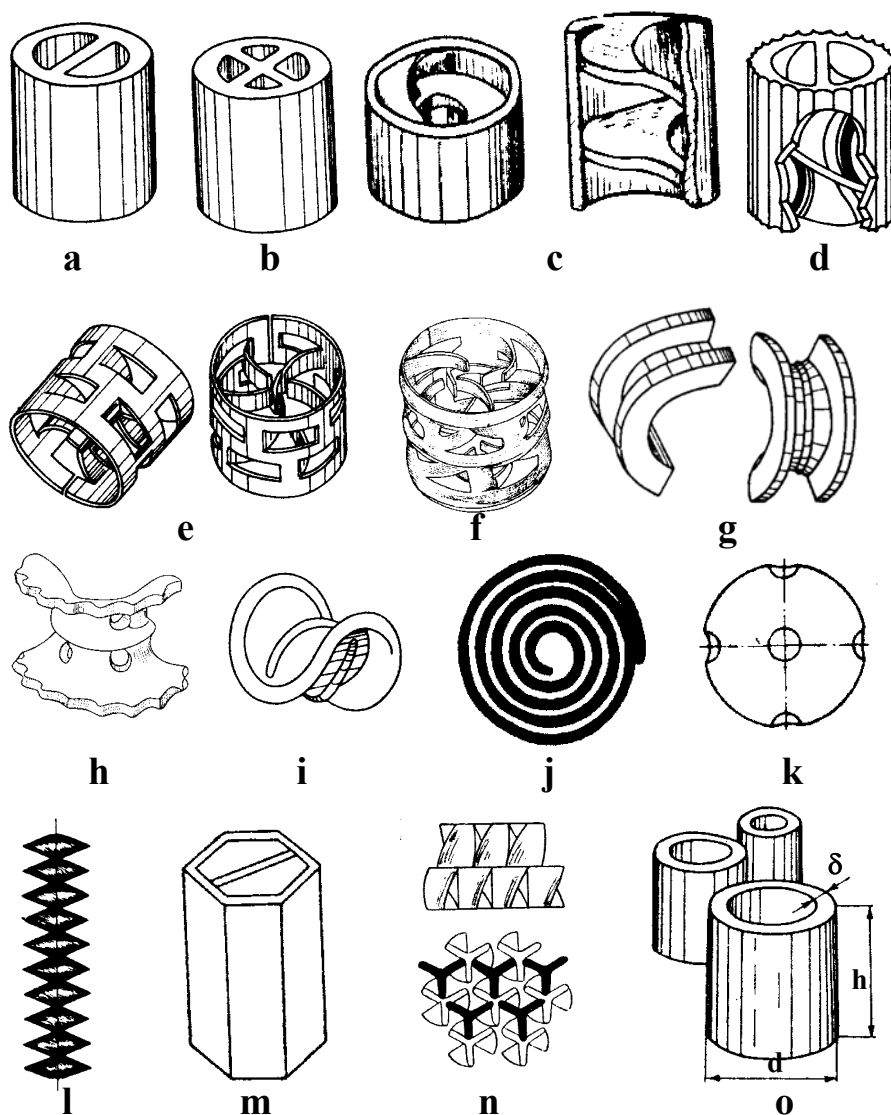


Fig. 3.52. Corpuri de umplere cu formă definită
 a – inele Lessing; b – inele cu pereți despărțitori; c – inele cu suprafață elicoidală interioară; d – inele striate longitudinal și cu spirală interioară; e – inele Pall; f – inele Hy-Pak; g – șei Intalox; h – șei Super-Intalox; i – șei Berl; j – spirale din sârmă; k – sfere goale cu orificii; l – corpuri Stedmann; m – prisme cu spirale elicoidale interioare; n – umplutură elicoidală; o – inele Raschig.

Tab. 3.15. Caracteristicile unor inele așezate în vrac

Corpuri de umplere	σ [m ² /m ³]	V_1 [m ³ /m ³]	d_{ech} [m]	număr buc./m ³	ρ_u [kg/m ³]
<i><u>Inele Raschig ceramice</u></i>					
10 x 10 x 1,5	440	0,70	0,006	700 000	700
15 x 15 x 2	330	0,70	0,009	220 000	690
25 x 25 x 3	200	0,74	0,015	50 200	530
35 x 35 x 4	140	0,78	0,022	18 000	530
50 x 50 x 5	90	0,785	0,035	6 000	530
<i><u>Inele Raschig din oțel</u></i>					
8 x 8 x 0,3	630	0,90	-	-	750
10 x 10 x 0,5	500	0,88	0,007	700 000	960
15 x 15 x 0,5	350	0,92	0,012	240 000	660
25 x 25 x 0,8	220	0,92	0,017	55 000	640
50 x 50 x 1	110	0,95	0,035	7 000	430
<i><u>Inele Pall ceramice</u></i>					
25 x 25 x 3	220	0,74	0,014	46 000	610
35 x 35 x 4	165	0,76	0,018	18 500	540
50 x 50 x 5	120	0,78	0,026	5 800	520
60 x 60 x 6	96	0,79	0,033	3 350	520
<i><u>Inele Pall din oțel</u></i>					
15 x 15 x 0,4	380	0,90	0,010	230 000	525
25 x 25 x 0,6	235	0,90	0,015	52 000	490
35 x 35 x 0,8	170	0,90	0,021	18 200	455
50 x 50 x 1	108	0,90	0,033	6 400	415
<i><u>Inele Lessing ceramice</u></i>					
15 x 15 x 2	360	0,71	-	192 000	710
25 x 25 x 3	225	0,68	-	48 000	780
35 x 35 x 4	155	0,68	-	14 300	690
50 x 50 x 5	110	0,69	-	6 000	690
<i><u>Inele Lessing din oțel</u></i>					
10 x 10 x 0,5	650	0,86	-	910 000	1 140
25 x 25 x 0,7	260	0,91	-	48 000	690
35 x 35 x 0,9	175	0,92	-	14 300	610
50 x 50 x 1,2	125	0,93	-	6 000	580

FENOMENE DE TRANSFER

Tab. 3.16. Caracteristicile unor inele așezate ordonat

Corpuri de umplere	σ [m ² /m ³]	V_l [m ³ /m ³]	d_{ech} [m]	număr buc./m ³	ρ_u [kg/m ³]
<u>Inele Raschig ceramice</u>					
50 x 50 x 5	110	0,735	0,027	8 500	650
75 x 75 x 8	69	0,75	-	1 900	560
80 x 80 x 8	80	0,72	0,036	2 200	670
100 x 100 x 10	60	0,72	0,048	1 050	670
150 x 150 x 18	40	0,68	-	280	770
<u>Inele Raschig din oțel</u>					
75 x 75 x 1,6	72	0,94	-	1 900	450
<u>Inele Pall ceramice</u>					
75 x 75 x 9,5	75	0,80	-	1 900	480
100 x 100 x 7,5	55	0,82	-	800	410
<u>Inele Lessing ceramice</u>					
75 x 75 x 8	79	0,71	-	1 900	690
100 x 100 x 10	59	0,70	-	800	720
150 x 150 x 18	52	0,60	-	280	1000
<u>Inele Lessing din oțel</u>					
75 x 75 x 1,6	85	0,95	-	1 900	400

Tab. 3.17. Caracteristicile unor șei așezate în vrac

Corpuri de umplere	σ [m ² /m ³]	V_l [m ³ /m ³]	d_{ech} [m]	număr buc./m ³	ρ_u [kg/m ³]
<u>Șei Berl ceramice</u>					
12,5 mm	460	0,68	0,006	570 000	720
25 mm	260	0,69	0,011	78 000	670
35 mm	165	0,70	0,017	30 500	670
<u>Șei Intalox ceramice</u>					
12,5 mm	625	0,78	0,005	730 000	545
19 mm	335	0,77	0,009	229 000	560
25 mm	255	0,775	0,012	84 000	545
38 mm	195	0,81	0,017	25 000	480
50 mm	118	0,79	0,027	9 350	530

Pentru evitarea formării de canale preferențiale prin stratul de umplutură și pentru contracararea tendinței lichidului de a se deplasa către pereții coloanei (maldistribuție), deci pentru uniformizarea curgerii și pentru utilizarea la capacitate maximă a suprafeței specifice a umpluturii, este necesară luarea unor măsuri cum ar fi: turnarea îngrijită și uniformă a umpluturii în strat, repartizarea uniformă a fazei lichide pe secțiunea

coloanei, fracționarea stratului în porțiuni cu înălțimi reduse între care se intercalează dispozitive pentru colectarea și redistribuirea fazei lichide.

Pentru o mai bună repartizare a lichidului în secțiunea transversală a coloanei, se recomandă ca diametrul nominal al corpurilor de umplere să fie de minimum opt ori mai mic decât diametrul coloanei.

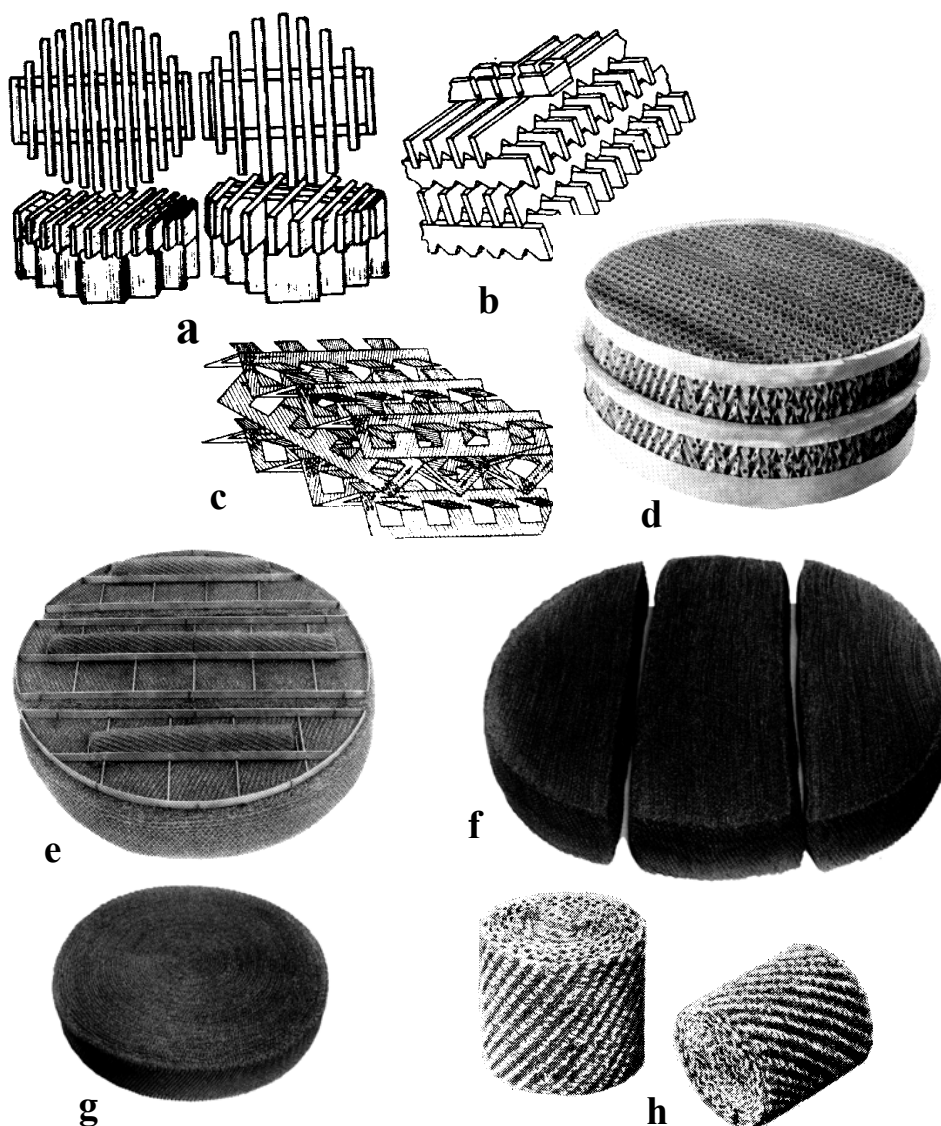


Fig. 3.54. Grătare, site, împletituri

a , b - grătare; c - site Perform; d - site Sulzer; e - împletituri Mist-Master;
f - împletituri Hyperfil; g - împletituri Goodloe; h - împletituri demister.

Grătarele suprapuse (fig. 3.54, a-b), executate din lemn, materiale ceramice, materiale plastice sau metalice, se caracterizează printr-o suprafață specifică mare și o rezistență hidraulică mai scăzută decât a inelelor. Ele asigură mișcarea dirijată a lichidului și permite mărirea vitezei gazului sau vaporilor; nu se înfundă și se montează și se demontează ușor.

Umpluturile sub formă de **site profilate** din tablă ștanțată (fig. 3.54, c-d), se assemblează în pachete, cu ajutorul unor tiranți. Se formează o structură spațială de celule așezate ordonat. Aceste umpluturi prezintă o eficacitate sporită, permițând viteze ale gazului de 2,5 – 3,5 m/s, la o cădere de presiune de numai 500 – 700 Pa pe înălțimea de 1 m de umplutură.

Umpluturile sub formă de **împletituri**, de dată relativ recentă, sunt utilizate pe scară tot mai largă datorită avantajelor pe care le prezintă.

Umpluturile de tip Goodloe, Hyperfil și demister (fig. 3.54, f-h) sunt realizate dintr-o împletitură de sârmă cu diametrul de 0,1 – 0,3 mm, sau din împletituri mono- sau multifilare de polimeri sau fibre de sticlă, cu diametrul de 0,05 – 0,5 mm. Firele sunt astfel împletite încât să formeze un tub, prin aplatizarea căruia se obține o bandă dublă de cca. 150 mm lățime. Banda se pliază apoi fie sub formă de spirală, fie sub forma unor segmente de cerc. Aceste umpluturi se caracterizează printr-o suprafață specifică foarte mare (1000 - 3000 m²/m³) și printr-un volum liber mare (0,9 - 0,99%). Datorită volumului liber mare, căderea de presiune prin aceste umpluturi este foarte redusă. Se utilizează în special pentru reținerea picăturilor fine de lichid (cu $d \geq 1 \mu\text{m}$) antrenate de gaze.

3.5.3.2. Proprietățile sistemelor granulare

Curgerea fluidelor prin straturi granulare depinde în mare parte de proprietățile ansamblului de granule (corpuri de umplere) care formează stratul. Întrucât corpurile de umplere care echipează un aparat au, de regulă, dimensiuni constante, sistemul granular reprezentat de ansamblul de corpuri de umplere poate fi considerat monodispers. Cazul sistemelor polidisperse (ansambluri de granule de mărimi diferite) va fi discutat în spațiul consacrat proceselor de mărunțire. Dintre proprietățile cele mai importante ale ansamblurilor granulare se pot menționa: sfericitatea, suprafața specifică, porozitatea stratului, densitatea stratului, modul de “împachetare” al granulelor.

Sfericitatea sau **factorul de formă** este definit drept raportul dintre aria unei sfere având volumul egal cu volumul granulei și aria suprafeței granulei. Notând cu d_{pv} diametrul unei sfere având același volum cu granula considerată, și cu d_{ps} diametrul unei sfere având aceeași suprafață cu granula considerată, expresia factorului de formă se poate scrie:

$$\varphi = \frac{S_{sfera}}{S_{granula}} = \frac{\pi d_{pv}^2}{\pi d_{ps}^2} = \left(\frac{d_{pv}}{d_{ps}} \right)^2 \quad (3.325)$$

ecuație identică cu (3.315). Întrucât sfera are aria cea mai mică în raport cu alte corpuri geometrice de același volum, factorul de formă este întotdeauna o mărime subunitară.

Această caracteristică permite extrapolarea datelor obținute pentru particule sferice și la particule de alte forme geometrice.

Sfericitatea unor corpuri geometrice regulate și a unor corpuri de umplere este redată în tab. 3.18 și 3.19.

Tab. 3.18. Sfericitatea unor corpuri de umplere

Corpuri de umplere	Diametrul nominal [mm]	Sfericitate, φ
Inele Raschig ceramice	9,9	0,420
	25,0	0,272
	35,0	0,262
	50,0	0,260
Inele Raschig din sticlă	4,9	0,420
	5,8	0,411
	6,9	0,370
	9,9	0,294
	12,0	0,254
Șei Berl din gresie	9,9	0,329
	12,0	0,342
	15,0	0,296
	25,0	0,317
	35,0	0,297
	50,0	0,314
Șei metalice	3,30	0,140
	3,35	0,140

Suprafața specifică a particulelor, σ , se definește ca fiind aria externă a particulelor raportată la unitatea de volum de particule [m^2/m^3]. Se mai poate defini o suprafață specifică σ' raportată la unitatea de masă de particule [m^2/kg], respectiv o suprafață specifică σ_u raportată la unitatea de volum de strat [m^2/m^3].

Tab. 3.19. Sfericitatea unor granule de forme geometrice regulate

Forma granulei	Dimensiuni	Sfericitate, ϕ
Sferă (d)	-	1,0000
Cilindru (H, d)	H/d = 1	0,8738
	H/d = 10	0,5792
	H/d = 0,1 (disc)	0,4706
Prismă pătratică (H, l)	H/l = 1 (cub)	0,8060
	H/l = 10	0,5346
	H/l = 0,1 (placă)	0,4343

În cazul particulelor sferice monodisperse de diametru d_p :

$$\sigma = \frac{S_p}{V_p} = \frac{\pi d_p^2}{\frac{\pi d_p^3}{6}} = \frac{6}{d_p} \quad (3.326)$$

Când particulele nu sunt sferice, diametrul particulei din (3.326) se înlocuiește cu un diametru echivalent, d_{pv} sau d_{ps} [vezi ec. (3.325)]. Această substituție nu poate fi aplicată particulelor având forme asimetrice sau extrem de neregulate (șei, ace, inele, etc.).

Porozitatea stratului (fracție de goluri, volum liber specific) se definește ca fiind raportul dintre volumul golurilor dintre granule și volumul total al stratului:

$$\varepsilon = \frac{V - V_p}{V} = 1 - \frac{V_p}{V} = \frac{V_l}{V} \quad (3.327)$$

unde V reprezintă volumul total al stratului, V_p este volumul particulelor din strat, iar V_l reprezintă volumul liber sau volumul golurilor intergranulare.

Porozitatea este o funcție de mai mulți parametri (forma și dimensiunile particulelor, starea suprafeței, dimensiunile recipientului în care se găsesc, modul lor de așezare, etc.), fiind necesară determinarea experimentală a acestei mărimi pentru fiecare caz în parte.

Densitatea sistemului granular poate fi calculată în funcție de densitatea granulelor, ρ_s , a fluidului, ρ_f și de porozitatea stratului, ε :

$$\rho_{strat} = (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s + \varepsilon \cdot \rho_f \quad (3.328)$$

Pentru sisteme disperse gazoase, $\rho_s \gg \rho_f$ și (3.328) devine:

$$\rho_{strat} = (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s \quad (3.329)$$

Modul de împachetare a granulelor depinde de modul de formare a stratului: prin așezare manuală, prin turnare liberă, prin tasare forțată. Ca urmare, straturile pot fi mai afânate sau mai compacte. În cazul particulelor sferice monodisperse, **aranjamentul cel mai afânat** se obține când sferele sunt așezate în nodurile unei rețele cubice, de latură d , astfel încât sferele să

atingă șase sfere alăturate: patru în planul intermediar, și câte una în planul inferior și cel superior (fig. 3.55,a).

Fracția de goluri rezultă scăzând volumul V_s al sferei din volumul V_c al cubului elementar al rețelei și raportând diferența la volumul cubului:

$$\varepsilon = \frac{V_c - V_s}{V_c} = \frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^3} = 1 - \frac{\pi}{6} = 0,4764$$

Aranjamentul cel mai compact rezultă din așezarea sferelor astfel încât fiecare sferă să atingă 12 sfere vecine: se așază un strat cu centrele sferelor într-o rețea hexagonală plană, astfel încât fiecare sferă să atingă șase sfere vecine; în planele vecine, fiecare sferă atinge câte trei sfere din planul imediat superior, respectiv inferior (fig. 3.55,b).

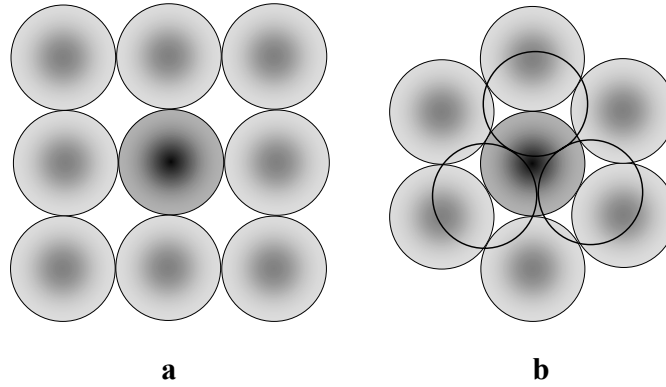


Fig. 3.55. Moduri de împachetare a unor particule sferice monodisperse
a – aranjamentul cel mai afânat; b – aranjamentul cel mai compact

Fracția de goluri se calculează determinând numărul de sfere dintr-un cub cu latura egală cu unitatea de lungime, admițând că sferele sunt suficient de mici pentru a putea neglija lipsurile de la capetele rețelei.

$$\varepsilon = \frac{V_c - nV_s}{V_c} = 1 - n \frac{\pi d^3}{6} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{d^3} \cdot \frac{\pi d^3}{6} = 1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0,2595$$

Se poate constata că, în ambele cazuri, fracția de goluri ε este independentă de diametrul particulelor sferice.

Viteza fictivă reprezintă raportul dintre debitul volumic al fluidului ce curge prin secțiunea liberă a umpluturii și aria secțiunii utilajului lipsit de umplură:

$$v_f = \frac{m_V}{A} = \frac{4m_V}{\pi D^2} \quad (3.330)$$

Reținerea sau **saturația** unui strat granular de umplutură, S , reprezintă raportul dintre volumul fluidului umectant (lichid) din golurile stratului și volumul total de goluri. Se definește o **reținere dinamică**, atunci când stratul este străbătut continuu de fluidul umectant în prezența sau în absența unui fluid neumectant și o **reținere statică**, atunci când trecerea fluidului a încetat și o parte din fluidul umectant s-a scurs.

Saturația fixă, S_f , este fracția de goluri în care fluidul umectant este staționar (nu ia parte la curgere). Valoarea maximă a acesteia poartă denumirea de saturație fixă maximă sau **saturație reziduală**, S_r .

Saturația efectivă, S_e , reprezintă raportul dintre fracția de goluri ocupată de fluidul umectant în curgere și fracția de goluri ocupată de ambele fluide în curgere.

3.5.3.3. Straturi granulare străbătute de un singur fluid

Există mai multe posibilități de a determina căderea de presiune la curgerea unui fluid printr-un strat de granule, și anume:

- Se consideră că stratul granular este o sumă de corpuri solide imersate în fluid, căderea de presiune determinându-se prin însumarea rezistențelor create de fiecare particulă solidă;
- Se consideră că golurile intergranulare formează o serie de tuburi capilare având lungimea egală cu lungimea stratului, căderea de presiune fiind determinată prin însumarea căderilor de presiune din fiecare capilar;
- Se consideră că fenomenul curgerii are loc printr-o conductă necirculară, de volum egal cu volumul golurilor intergranulare, în calcule utilizându-se raza hidraulică, r_h .

Se consideră un strat de umplutură având diametrul D și înălțimea H , format din granule uniforme, de diametru mic în comparație cu diametrul stratului, în care nu există curgere preferențială. Stratul este străbătut de un singur fluid neumectant. Pentru curgerea laminară în tuburi cu secțiune circulară, din ecuația Hagen - Poiseuille (3.177) se explicitează viteza medie:

$$\bar{v} = \frac{\Delta P}{H} \cdot \frac{d^2}{32\mu} \quad (3.331)$$

Întrucât stratul de umplutură este format din tuburi cu secțiune foarte complicată și variabilă în direcția de curgere, viteza medie variază datorită modificărilor de secțiune. Se definește o viteză medie $\hat{v}$ în direcția de curgere, iar diametrul d se înlocuiește cu diametrul echivalent, d_{ech} . În aceste condiții, (3.331) devine:

$$\hat{v} = \frac{\Delta P}{H} \cdot \frac{d_{ech}^2}{32\mu} \quad (3.332)$$

Diametrul echivalent se poate exprima funcție de porozitatea stratului:

$$d_{ech} = \frac{4\varepsilon}{\sigma_u} \quad (3.333)$$

iar viteza medie $\hat{v}$ se poate înlocui funcție de viteza fictivă:

$$v_f = \hat{v} \cdot \varepsilon \quad (3.334)$$

Cu aceste înlocuiri, ecuația (3.332) devine:

$$v_f = \frac{\Delta P}{H} \cdot \frac{\varepsilon^3}{2\mu\sigma_u^2} \quad (3.335)$$

Ținând cont și de relația care leagă σ de σ_u :

$$\sigma_u = \sigma(1 - \varepsilon) \quad (3.336)$$

și de relația care leagă σ de d_p (3.326), atunci (3.335) devine:

$$v_f = \frac{\Delta P}{H} \cdot \frac{d_p^2}{72\mu} \cdot \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.337)$$

Admițând un diametru echivalent mediu, la o cădere de presiune dată, se obține o viteză de curgere mai mare decât cea reală. De asemenea, datorită tortuozității, fasciculele de tuburi capilare formate între granulele stratului sunt mai lungi decât înălțimea totală a stratului, H . Ca urmare, membrul drept al ecuației (3.337) trebuie corectat cu un factor subunitar, a cărui valoare, dedusă din date experimentale, este de 12/25. Efectuând această corecție, (3.337) devine:

$$v_f = \frac{\Delta P}{H} \cdot \frac{d_p^2}{150\mu} \cdot \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.338)$$

Ecuația este cunoscută drept ecuația **Karman - Koseny**, valabilă în cazul curgerii laminare și pentru valori $\varepsilon < 0,5$, respectiv dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{d_p \rho v_f}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon} < 10 \quad (3.339)$$

Ecuația (3.338) poate fi rearanjată în concordanță cu ecuația lui Fanning, obținându-se următoarea expresie a coeficientului de frecare λ :

$$\lambda = \frac{300}{\frac{d_p \rho v_f}{\mu}} \cdot \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (3.340)$$

O ecuație similară se poate obține și în cazul curgerii turbulente prin straturi de umplutură. Se pleacă de la coeficientul de frecare λ la curgerea prin tuburi circulare, considerându-se că la valori mari ale turbulenței acest coeficient este funcție doar de rugozitate. Admițând că rugozitatea umpluturii este aceeași în strat, valoarea lui λ rămâne constantă. Ecuația (3.331) se scrie sub forma:

$$\Delta P = \lambda \frac{H}{d} \cdot \frac{\hat{v}^2}{2} \rho \quad (3.341)$$

în care se efectuează următoarele substituții:

$$d = d_{ech}; \quad \hat{v} = \frac{v_f}{\varepsilon}; \quad d_{ech} = \frac{4\varepsilon}{\sigma_u}; \quad \sigma_u = \sigma(1-\varepsilon); \quad \sigma = \frac{6}{d_p}$$

și se obține:

$$\Delta P = \frac{3}{2} \lambda \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{H}{d_p} \cdot \frac{v_f^2}{2} \rho \quad (3.342)$$

Din date experimentale s-a constatat că $3/2\lambda = 3,5$, astfel încât:

$$\Delta P = 3,5 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{H}{d_p} \cdot \frac{v_f^2}{2} \rho \quad (3.343)$$

Ecuația (3.343) este ecuația **Burke - Plummer**, valabilă pentru:

$$\frac{d_p \rho v_f}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon} > 1000 \quad (3.344)$$

Coeficientul de frecare din ecuația (3.343) este:

$$\lambda = 3,5 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \quad (3.345)$$

Dacă se însumează ecuația Karman – Koseny (3.338) explicitată în ΔP cu ecuația Burke – Plummer (3.343), se obține ecuația lui **Ergun**:

$$\Delta P = 150 \mu \frac{H}{d_p^2} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot v_f + 1,75 \frac{H}{d_p} \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \rho \cdot v_f^2 \quad (3.346)$$

Ecuația (3.346) poate fi pusă și sub forma (fig. 3.56):

$$f_s = \frac{\Delta P \cdot d_p}{H \cdot \rho \cdot v_f^2} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon} = \frac{150}{\text{Re}_s} + 1,75 \quad (3.347)$$

în care f_s reprezintă un factor de frecare, iar numărul Reynolds modificat are expresia:

$$\text{Re}_s = \frac{D_{ech} \cdot \hat{v} \cdot \rho}{\mu} = \frac{4r_h \cdot \hat{v} \cdot \rho}{\mu} = \frac{4}{6} \cdot \frac{d_p \cdot v_f \cdot \rho}{\mu(1-\varepsilon)} \quad (3.348)$$

La numere Reynolds mici ($\text{Re}_s < 5$) valoarea 1,75 din ecuația (3.347) este mică în raport cu termenul care conține pe Re_s , ceea ce implică faptul

că în acest caz forțele de viscozitate sunt cele care controlează curgerea (forțele inerțiale se pot neglija), astfel încât (3.347) devine:

$$f_s = \frac{150}{Re_s} \quad (3.349)$$

echivalentă cu ecuația Karman – Koseny.

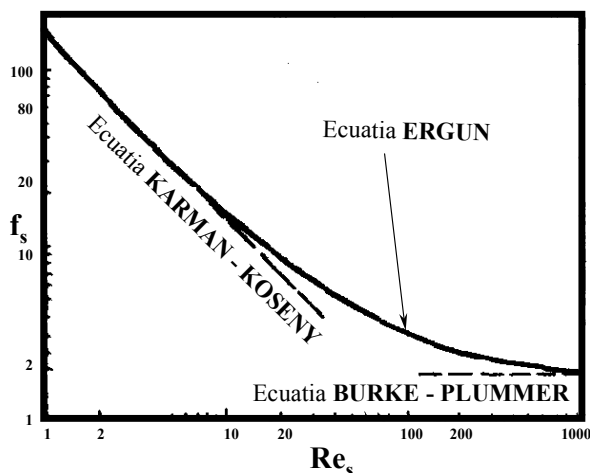


Fig. 3.56. Variația factorului de frecare f_s funcție de numărul Re_s

La numere Reynolds mari ($Re_s > 2000$), primul termen din membrul drept al relației (3.347) devine neglijabil, ceea ce semnifică faptul că în aceste condiții forțele inerțiale controlează curgerea (forțele de viscozitate sunt neglijabile), iar 3.347 se reduce la:

$$f_s = 1,75 \quad (3.350)$$

echivalentă cu ecuația Burke – Plummer.

Ecuția Ergun permite calculul căderii de presiune la curgerea fluidelor prin straturi granulare formate din particule sferice. Dacă particulele nu au aceleași dimensiuni, în calcul se utilizează un diametru mediu, iar dacă particulele nu sunt sferice, mărimea d_p se înlocuiește cu produsul $\phi \cdot d_p$, ϕ reprezentând factorul de sfericitate. Ecuția (3.347) se verifică experimental, cu o eroare medie de $\pm 2\%$, până la $Re_s \leq 8000$ la curgerea unui lichid printr-un strat granular format din particule sferice sau aproape sferice, cu porozitatea stratului între 0,3 – 0,7. Ecuția Ergun poate fi utilizată și în cazul curgerii gazelor prin straturi granulare, dar numai dacă pierderea de presiune a gazului este de sub 10% din valoarea presiunii inițiale. În aceste condiții, viteza fictivă a gazului se înlocuiește cu valoarea

FENOMENE DE TRANSFER

sa medie, calculată ca medie aritmetică între viteza fictivă a gazului la intrare și viteza fictivă a gazului la ieșire din strat.

În cazul straturilor formate din particule solide a căror formă este mult diferită de cea sferică: cilindri, inele, șei, etc., ecuația lui Ergun nu dă rezultate satisfăcătoare. Pentru curgerea printre aceste tipuri de corpuri de umplere se recomandă calculul căderii de presiune cu relația **Brownell**:

$$\Delta P = f_s' \cdot F_1 \cdot \frac{H}{d_{ps}} \cdot \frac{\rho \cdot v_f^2}{2} \quad (3.351)$$

în care:

- f_s' - factor de frecare estimat funcție de numărul Re_s' (fig. 3.57);
- F_1 - coeficient dependent de porozitatea stratului (ε) și de sfericitatea particulelor (ϕ) (fig. 3.58);
- d_{ps} - diametrul echivalent al particulelor, respectiv diametrul unei sfere având suprafața exterioară egală cu cea a particulei.

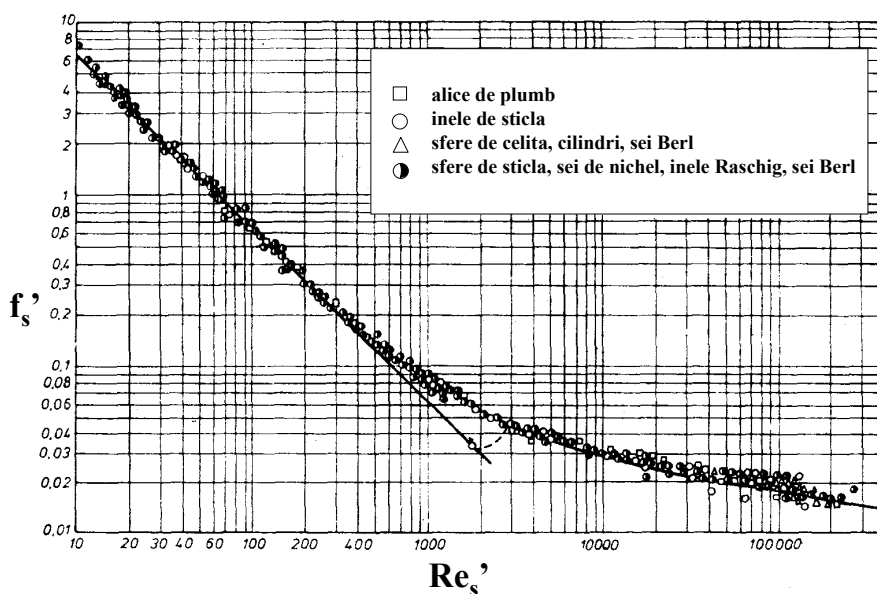


Fig. 3.57. Valorile coeficientului f_s' funcție de numărul Re_s'

Numărul Reynolds modificat pentru aceste condiții, în funcție de care se estimează valoarea factorului de frecare f_s' , se determină cu relația:

$$Re_s' = \frac{d_{ps} \cdot F_2 \cdot \rho \cdot v_f}{\mu} \quad (3.352)$$

în care F_2 este un factor care se determină funcție de porozitatea stratului (ε) și de sfericitatea particulelor (ϕ), conform diagramei din fig. 3.59.

Alte ecuații care pot fi utilizată pentru calculul căderii de presiune la curgerea fluidelor necompresibile prin straturi granulare sunt:

- Ecuația **Leva**:

$$\Delta P = \lambda_m \frac{H}{d_p} \cdot \frac{v_f^2}{2} \rho \frac{(1-\varepsilon)^{3-n}}{\varepsilon^3 \varphi^{3-n}} \quad (3.353)$$

în care λ_m este coeficientul de frecare modificat, a cărui valoare în funcție de criteriul Re_m rezultă din diagrama redată în fig. 3.60.

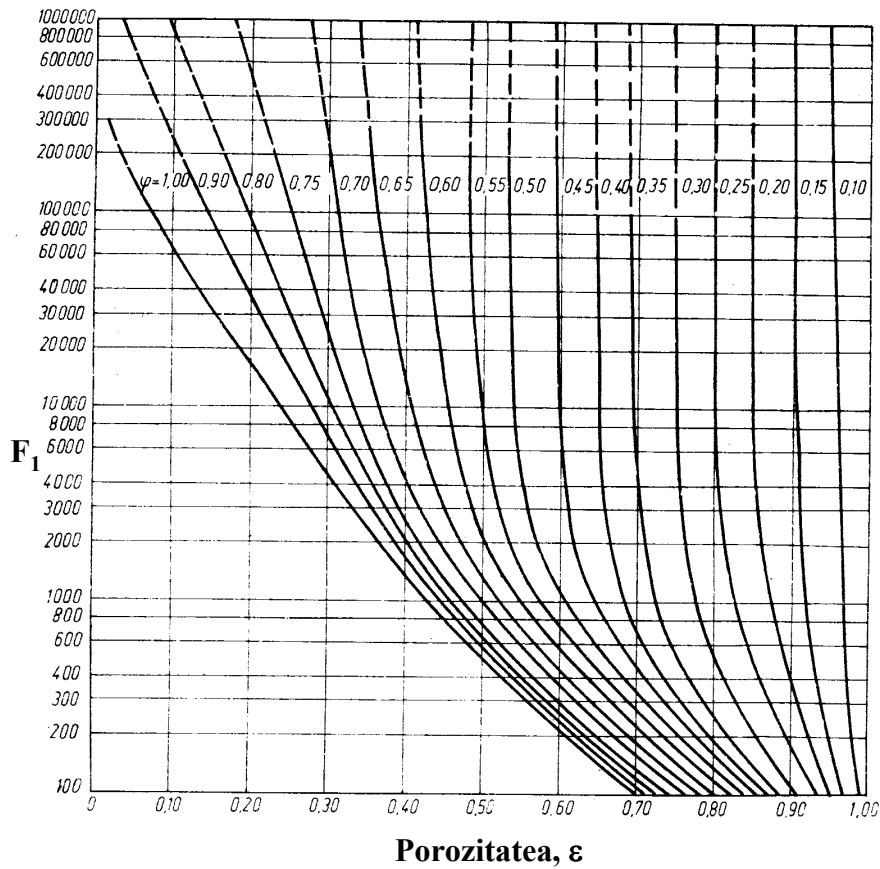


Fig. 3.58. Diagramă pentru estimarea coeficientului F_1

- Ecuația lui **Rose**:

$$\Delta P = \Lambda \frac{H}{d_p} v_f^2 \rho \quad (3.354)$$

în care coeficientul adimensional Λ este funcție de valoarea criteriului Re :

$$\Lambda = \frac{1000}{\text{Re}} + \frac{125}{\sqrt{\text{Re}}} + 14 \quad (3.355)$$

numărul Reynolds având expresia:

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v_f \cdot d_p}{\mu} \quad (3.356)$$

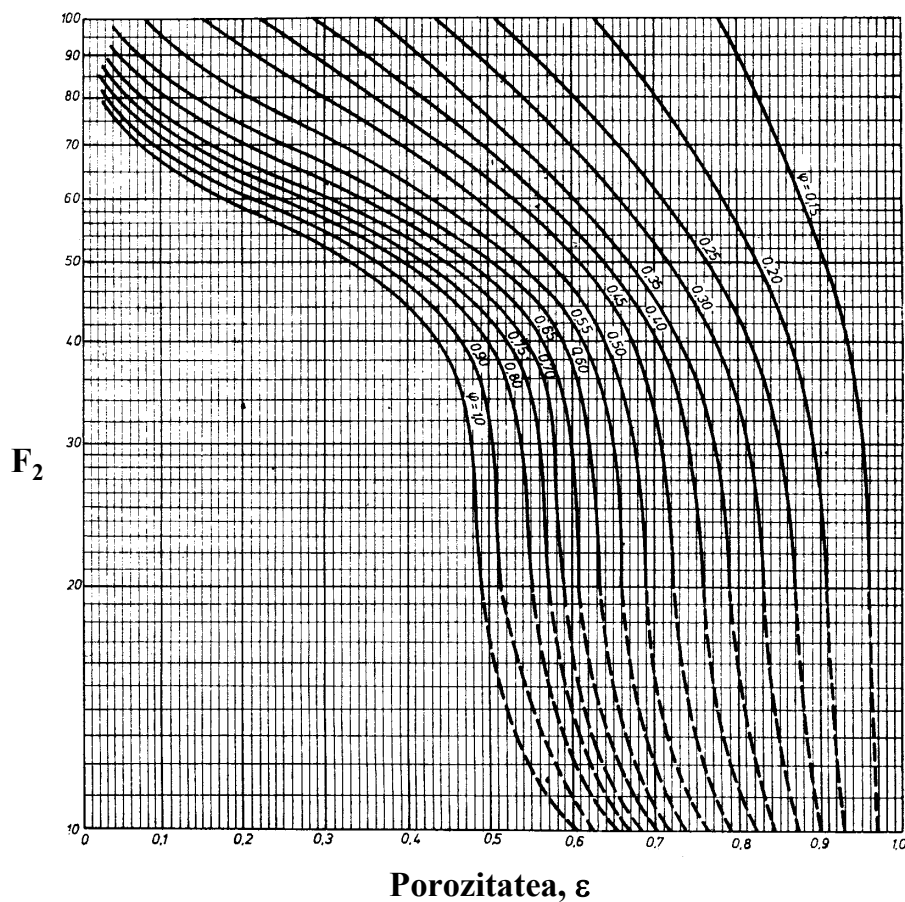


Fig. 3.59. Diagramă pentru estimarea coeficientului F_2

Pentru curgerea fluidelor compresibile prin straturi formate din inele Raschig se poate utiliza ecuația **Javoronkov – Aerov**:

$$\Delta P = \lambda \frac{H}{d_\varepsilon} \cdot \frac{v_f^2}{2} \rho \varepsilon \quad (3.357)$$

în care $d_\varepsilon = 4\varepsilon / \sigma$ reprezintă diametrul echivalent al golurilor. Valoarea coeficientului de frecare λ este funcție de numărul Re :

$$Re'' = \frac{\rho \cdot v_f \cdot d_\varepsilon}{\mu} \quad (3.358)$$

și anume:

Pentru curgerea laminară ($Re'' < 40$): $\lambda = \frac{140}{Re''}$

Pentru curgerea turbulentă ($Re'' > 40$): $\lambda = \frac{16}{(Re'')^{0.2}}$

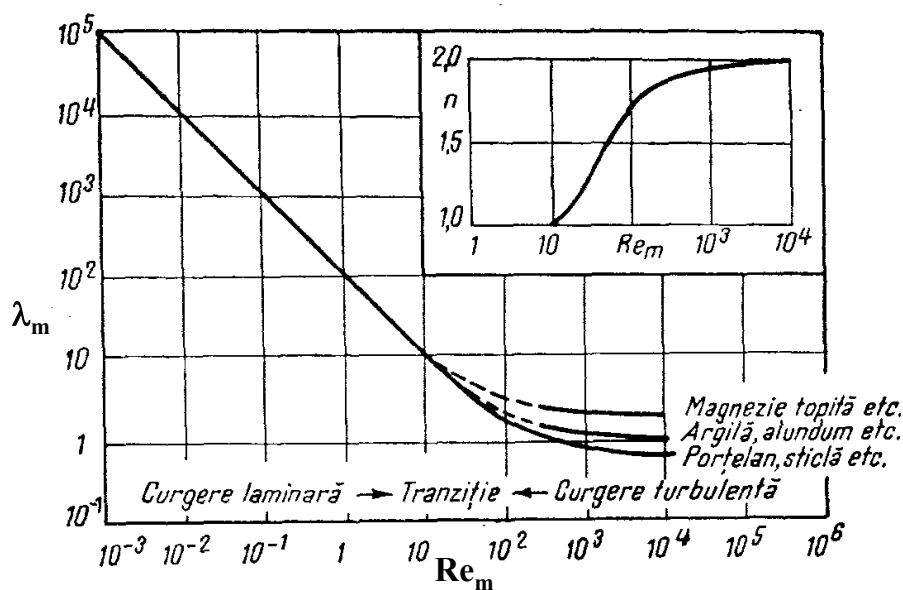


Fig. 3.60. Diagramă pentru determinarea coeficientului de frecare λ_m din ecuația Leva (3.353)

3.5.3.4. Straturi granulare străbătute de două fluide

Într-o serie de procese (absorbție, rectificare, extracție, etc.) două fluide curg simultan printr-un strat de umplură care are rolul de a mări suprafața de contact dintre faze, conducând astfel la intensificarea proceselor de transfer de masă și căldură. Cele două fluide pot circula în echi- sau contracurent, ele putând fi: un lichid și un gaz (absorbție), un lichid și vapori (rectificare), două lichide nemiscibile având densități diferite (extracție lichid – lichid).

Curgerea simultană în contracurent a două fluide printr-un strat de umplură se deosebește de curgerea unui singur fluid prin strat prin faptul că fiecare fluid ocupă o fracțiune din golurile stratului granular. Lichidul,

FENOMENE DE TRANSFER

care udă mai bine umplutura, va curge predominant sub formă peliculară, acoperind întreaga suprafață a umpluturii și ocupând integral unele din golurile mai mici ale umpluturii. Această fază (lichidul umectant) este considerată **faza continuă** a sistemului. Gazul, vaporii sau celălalt lichid ocupă locul rămas liber din golurile umpluturii. Această fază este considerată **faza dispersă** a sistemului. În golurile de volum mic, din cauza tensiunii superficiale a lichidului care închide intrările și ieșirile, gazul stagnează. Prezența fazei continue în strat va conduce la micșorarea porozității în strat și deci la creșterea căderii de presiune prin strat, în comparație cu valoarea acesteia la curgerea unui singur fluid.

Curgerea fazei continue se calculează cu ecuațiile prezentate în secțiunea 3.5.3.3., cu observația că aceasta are loc în spațiul corespunzător saturației efective. Pentru aceasta, viteza fictivă v_f se înlocuiește cu raportul v_f/S_e^y . Exponentul y este funcție de mărimea granulelor din strat (tab. 3.20).

Tab. 3.20. Valorile exponentului y al saturației efective, S_e

d_p [mm]	y	d_p [mm]	y
0,05	3,30	5	1,78
0,10	3,00	10	1,66
0,20	2,73	20	1,56
0,50	2,40	50	1,47
1,00	2,16	100	1,41
2,00	1,97		

Curgerea fazei disperse se calculează la fel ca în cazul în care stratul este străbătut de un singur fluid, cu observația că se utilizează o porozitate a stratului și o sfericitate a particulelor modificate de prezența lichidului umectant.

Porozitatea efectivă (ε') în cazul prezenței lichidului umectant se exprimă în funcție de porozitatea stratului uscat (ε), saturația (S) și saturația reziduală (S_r) a umpluturii:

$$\varepsilon' = \frac{1-S}{1-S_r} \cdot \varepsilon \quad (3.359)$$

Sfericitatea modificată de prezența lichidului umectant se deduce din date experimentale, funcție de saturația efectivă (tab. 3.21).

Tab. 3.21. Factorul de sfericitate modificat (ϕ') la valori $S_e = 1/3$

Corpuri de umplere	ϕ'
particule de dimensiuni mici (sub 5mm)	0,82
șei Berl (6 mm)	0,73
șei Berl (12 mm)	0,53
inele Raschig (16 mm)	0,60

O corelare generală pentru estimarea căderii de presiune la curgerea ascendentă a unui fluid printr-un strat de umplutură, în contracurent cu un lichid descendent, în condiții de viteză sub punctul de înecare o reprezintă ecuația lui **Kafarov**:

$$\frac{\frac{\Delta P_{ud}}{H}}{\frac{\Delta P_{usc}}{H}} = 1 + A_1 \cdot \left[\left(\frac{m_{mL}}{m_{mG}} \right)^{1,8} \cdot \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right) \cdot \left(\frac{\mu_L}{\mu_G} \right)^{0,2} \right]^q \quad (3.360)$$

în care:

ΔP_{ud} - căderea de presiune totală a fazei gazoase la curgerea în contracurent cu faza lichidă prin stratul de umplutură;

ΔP_{usc} - căderea de presiune la trecerea prin strat a unui singur fluid, calculabilă cu ecuația (3.357);

m_{mL} - debitul masic de lichid prin coloană, kg/s;

m_{mGL} - debitul masic de gaz prin coloană, kg/s;

ρ_L - densitatea fazei lichide în condițiile de operare, kg/m³;

ρ_G - densitatea fazei gazoase în condițiile de operare, kg/m³;

μ_L - viscozitatea dinamică a fazei lichide în condițiile de operare, Pa.s;

μ_G - viscozitatea dinamică a fazei gazoase în condițiile de operare, Pa.s;

A_1 - coeficient care depinde de raportul dintre viteza fictivă a gazului prin strat, v_{fi} , și viteza fictivă corespunzătoare punctului de înec, v_{fi} , adimensional (fig. 3.61);

q - exponent caracteristic procesului (0,225 la absorbție, 0,190 la rectificare).

Viteza fictivă corespunzătoare punctului de înec, v_{fi} rezultă din:

$$\lg \left[\frac{v_{fi}^2 \cdot \sigma \cdot \rho_G \cdot (10^3 \mu_L)^{0,16}}{g \cdot \varepsilon^3 (\rho_L - \rho_G)} \right] = B_1 - 1,75 \left(\frac{m_{mL}}{m_{mG}} \right)^{1/4} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \right)^{1/8} \quad (3.361)$$

în care B_1 este un coeficient caracteristic procesului, având valoarea -0,125 pentru rectificare, respectiv +0,022 pentru absorbție. Viteza fictivă optimă a gazului prin stratul de umplutură se recomandă să fie de 75 – 90 % din viteza fictivă de înec.

Variația căderii de presiune în coloanele cu umplutură este redată în fig. 3.62.

Dreapta **A** corespunde trecerii gazului printr-o coloană neudată. Căderea de presiune variază cu puterea 1,8 – 2,0 a vitezei gazului.

Dreapta **B** se referă la o coloană bine udată, din care lichidul a fost lăsat să se scurgă. Căderea de presiune variază după aceeași lege ca și în cazul anterior (dreptele **A** și **B** sunt paralele), dar căderea de presiune este mai mare datorită faptului că lichidul rămas în umplutură (retenția statică) micșorează secțiunea canalelor prin care trece gazul).

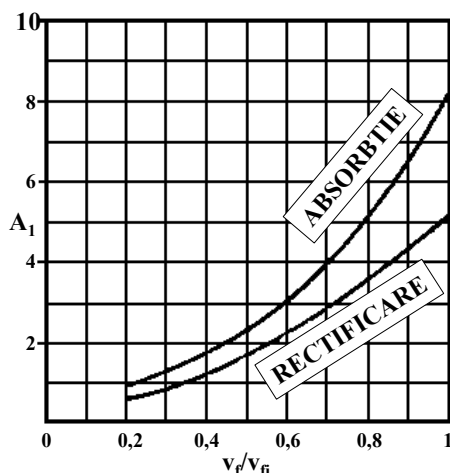


Fig. 3.61. Coeficientul A_1 din ecuația (3.360)

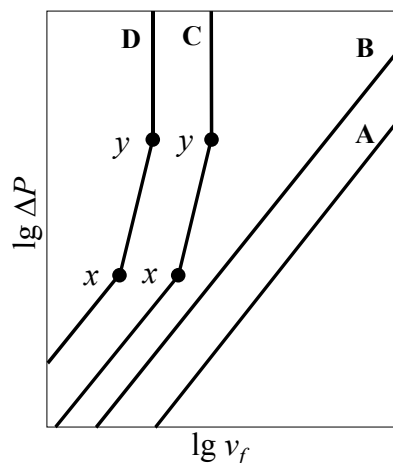


Fig. 3.62. Pierdere de presiune în coloane cu umplutură

Curbele **C** și **D** redau variația căderii de presiune prin coloane cu umplutură în care circulă în contracurent un lichid și un gaz, la diferite debite de lichid (curba **C** la debit mai mic, curba **D** la debit mai mare). Aceste curbe sunt formate din câte trei segmente de dreaptă a căror pantă se modifică în punctele x și y , denumite respectiv **punct de încărcare** și **punct de înecare** (de **inversie a fazelor**). Primul segment, sub punctul de încărcare x este aproximativ paralel cu dreptele **A** și **B**, indicând că există porțiuni libere de lichid în lungul canalelor. Segmentul dintre punctele x și y are panta mai mare, fapt explicat prin creșterea mai rapidă a căderii de presiune, datorită barbotării gazului prin lichidul din canale. Ultimul segment, deasupra punctului de înecare y , este paralel cu ordonata: presiunea crește brusc, lichidul fiind oprit să mai curgă, uneori fiind ridicat spre partea superioară a aparatului de către curentul de gaz. Acesta este fenomenul cunoscut sub denumirea de **înecarea coloanei**.

3.5.4. Curgerea peste fascicule de țevi

Acest tip de curgere este frecvent întâlnit la curgerea fluidelor prin spațiul intertubular (mantaua) al schimbătoarelor de căldură cu fascicul tubular. O astfel de curgere poate fi considerată o combinație între curgerea prin conducte și curgerea peste corpuri imersate. Mecanismul curgerii este complex, asupra fenomenului intervenind o serie de variabile suplimentare: forma și mărimea țevelor, mărimea spațiului intertubular, configurația

țevilor. Mecanismul se complică și mai mult dacă se ia în considerație curgerea bifazică (în cazul condensării vaporilor în manta, de ex.).

Curgerea peste un fascicul de țevi se poate asimila cu:

- Însușirea efectelor obținute la curgerea peste un singur cilindru. Prezența cilindrilor adiacenți va afecta însă grosimea stratului limită și distribuția vitezelor în stratul limită, ceea ce va influența valoarea rezistenței hidraulice. Lungimea caracteristică va fi diametrul exterior al țevilor.
- Însușirea efectelor obținute la curgerea prin orificii rectangulare formate de spațiul dintre țevi. Lungimea caracteristică va fi distanța dintre țevi.
- Curgerea printr-o conductă necirculară de rază hidraulică r_h , definită prin raportul dintre volumul liber din aparat și aria suprafeței expuse. Lungimea caracteristică va fi diametrul echivalent $D_{ech} = 4r_h$.

În cazul curgerii fluidului transversal peste un fascicul de țevi, căderea de presiune se poate calcula cu ajutorul ecuațiilor următoare.

- Pentru fascicule de țevi nedecalate (fig. 3.63,a):

$$Eu = b(3 + 4,5m) \cdot \left(\frac{s_1}{d}\right)^{-0,23} \cdot Re^{-0,26} \quad (3.362)$$

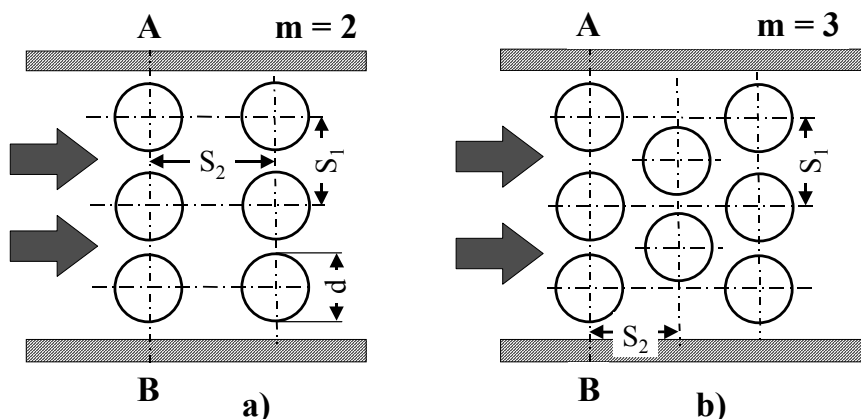


Fig. 3.63. Schema aranjării țevilor într-un fascicul:
a – nedecalat; b – decalat

- Pentru fascicule de țevi decalate (fig. 3.63,b):

$$\text{ - pentru } \frac{s_1}{d} < \frac{s_2}{d} : \quad Eu = b \cdot (2 + 3,3m) \cdot Re^{-0,28} \quad (3.363)$$

$$\text{ - pentru } \frac{s_1}{d} > \frac{s_2}{d} : \quad Eu = b \cdot (2,7 + 1,7m) \cdot Re^{-0,28} \quad (3.364)$$

unde:

FENOMENE DE TRANSFER

- b - coeficient de corecție care depinde de unghiul de atac ϕ (unghiul dintre axa țevii și direcția de mișcare a curentului de fluid – fig. 3.64), adimensional (tab. 3.22);
- m - numărul de rânduri de țevi din fascicul în direcția curgerii;
- d - diametrul exterior al țevelor, m;
- s_1 - pasul transversal al țevelor, m;
- s_2 - pasul longitudinal al țevelor, m.

Căderea de presiune rezultă din explicitarea criteriului Euler:

$$\Delta P = Eu \cdot \rho \cdot v^2 \quad (3.365)$$

Viteza curentului de fluid (v) se calculează pentru secțiunea cea mai îngustă a fasciculului (secțiunea AB); valorile constantelor fizice ale fluidului se iau pentru temperatura medie a fluidului, iar lungimea caracteristică din expresia criteriului Reynolds este diametrul exterior al țevelor.

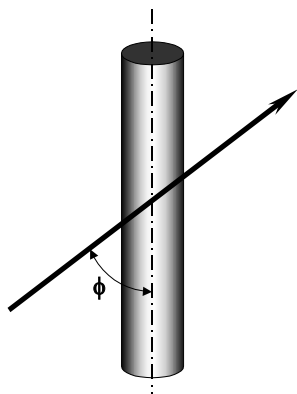


Fig. 3.64. Unghiul de atac

Tab. 3.22. Coeficientul de corecție b din ecuațiile (3.362) – (3.364) pentru diverse valori ale unghiului de atac ϕ

ϕ [°]	b	ϕ [°]	b
90	1,00	50	0,69
80	1,00	40	0,53
70	0,95	30	0,38
60	0,83	10	0,15

Pentru calculul căderii de presiune prin spațiul intratubular sau intertubular al schimbătoarelor de căldură fără șicane, se poate utiliza și ecuația:

$$\Delta P = \lambda \frac{nL}{D_{ech}} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \rho + \sum \zeta \frac{v^2}{2} \cdot \rho \quad (3.366)$$

în care n reprezintă numărul de treceri al fluidului prin aparat, iar L este lungimea unei treceri (m). Coeficienții ζ sunt redați în tab. 3.23.

În prezența pereților despărțitori (șicanelor) în spațiul intertubular, coeficientul de rezistență locală se poate calcula și cu relația:

$$\zeta = \frac{3m}{Re^{0,2}} \quad (3.367)$$

în care m reprezintă numărul de rânduri de țevi în direcția curgerii.

Tab. 3.23. Coeficienți de rezistență locală ζ la curgerea fluidelor prin schimbătoare de căldură cu fascicul tubular

Rezistența hidraulică locală	ζ
<u>Spațiul din țevi (intratubular)</u>	
Intrare sau ieșire din cameră	1,5
Întoarcere de 180° între treceri sau secțiuni	2,5
Intrare sau ieșire în sau din țevi	1,0
<u>Spațiul dintre țevi (intertubular)</u>	
Intrarea în spațiul dintre țevi sau ieșirea din el	1,5
Întoarcere de 180° peste un perete despărțitor	1,5
Întoarcere de 90° în spațiul dintre țevi	1,0

O altă relație utilizată în calculul căderii de presiune la curgerea transversală a unui fluid peste un fascicul de țevi este:

$$\Delta P = 2m \cdot \zeta \cdot \rho \cdot v_{\max}^2 \left(\frac{\mu_p}{\mu} \right)^{0,14} \quad (3.368)$$

în care, pe lângă notațiile cunoscute, mai apar:

$v_{\max}$ viteza maximă a fluidului în secțiunea minimă de curgere (secțiunea AB din fig. 3.63);

μ viscozitatea fluidului la temperatura medie a acestuia;

μ_p viscozitatea fluidului la temperatura peretelui țevii;

Coeficientul pierderii de presiune ζ , poate fi calculat cu următoarele relații empirice, valabile pentru $Re > 1000$:

- pentru țevi așezate nedecalat:

$$\xi = \left\{ 0,044 + \frac{0,08 \frac{s_2}{d}}{\left[\frac{(s_1 - d)}{d} \right]^{0,43+1,13d/s_2}} \right\} \cdot Re_{\max}^{-0,15} \quad (3.369)$$

- pentru țevi așezate decalat:

$$\zeta = \left\{ 0,25 + \frac{0,118}{\left[\frac{(s_1 - d)}{d} \right]^{1,08}} \right\} \cdot Re_{\max}^{-0,16} \quad (3.370)$$

în care $Re_{\max}$ este calculat cu viteza maximă a fluidului, $v_{\max}$. Celelalte notații corespund celor din fig. 3.63.

În domeniul $100 < Re < 50\,000$, coeficientul ζ mai poate fi calculat cu ecuațiile empirice simplificate:

- pentru țevi așezate nedecalat:

$$\zeta = 0,33 \operatorname{Re}_{\max}^{-1/5} \quad (3.371)$$

- pentru țevi așezate decalat:

$$\zeta = 0,75 \operatorname{Re}_{\max}^{-1/5} \quad (3.372)$$

3.6. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU APROFUNDARE

1. Bratu, A.E., **Operații unitare în ingineria chimică**, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1984;
2. Coulson, J.M și Richardson, J.F., **Chemical Engineering**, vol. I, Pergamon Press, Oxford, 1993;
3. Florea, J., ș.a., **Dinamica fluidelor polifazice și aplicațiile ei tehnice**, Ed. Tehnică, București, 1987;
4. Jinescu, G., **Procese hidrodinamice și utilaje specifice în industria chimică**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983;
5. Pavlov, K.F., Romankov, P.G. și Noskov, A.A., **Procese și aparate în ingineria chimică – exerciții și probleme**, Ed. Tehnică, București, 1981;
6. Pop, I., **Teoria stratului limită nestăionar**, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1983;
7. Rășenescu, I., **Operații și utilaje în industria alimentară**, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1971;
8. Reynolds, A.J., **Curgeri turbulente în tehnică**, Ed. Tehnică, București, 1982;
9. Roman, R.V. și Gavrilăscu, M., **Fenomene de transfer în bioprocese**, Ed. Dosoitei, Iași, 1997;
10. Soare, S., **Procese hidrodinamice**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979;
11. Tudose, R.Z., ș.a., **Procese, operații, utilaje în industria chimică**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1977;
12. Tudose, R.Z., ș.a., **Reologia compușilor macromoleculari**, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1982.

4. BIBLIOGRAFIE GENERALĂ

1. Alexandru, R. – **Fenomene de transfer: tabele, diagrame și nomograme generale**, Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, 1995;
2. Banu, C. (coord.) - **Manualul inginerului de industrie alimentară**, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1998;
3. Berinde, T. și Berinde, M. – **Bilanțuri energetice în procese industriale**, Ed. Tehnică, București, 1985;
4. Berinde, T., Ionașcu, T., Resiga, R., Ritzinger, E., Ruja, N. și Varvari, I. – **Întocmirea și analiza bilanțurilor energetice în industrie**, Ed. Tehnică, București, 1976;
5. Bratu, E.A. - **Operații unitare în ingineria chimică**, vol. I-III, Ed. Tehnică, București, 1984-85;
6. Coulson, J.M. și Richardson, J.F. - **Chemical Engineering**, vol. I - II, Pergamon Press, Oxford, UK, 1993;
7. Doran, P.M. – **Bioprocess Engineering Principles**, Academic Press, London, 1995;
8. Floarea, O., Jinescu, G., Balaban, C., Vasilescu, P. și Dima, R. – **Operații și utilaje în industria chimică – probleme**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980;
9. Florea, J., Robescu, D., Petrovici, T. și Stamatoiu, D. – **Dinamica fluidelor polifazice și aplicațiile ei tehnice**, Ed. Tehnică, București, 1987;
10. Florea, J., Seteanu, I., Zidaru, Gh. și Panaitescu, V. – **Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice – probleme**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982;
11. Franks, R.G.E. - **Modelarea și simularea în ingineria chimică**, Ed. Tehnică, București, 1979;
12. Grassmann, P. – **Physikalische Grundlagen der Verfahrenstechnik**, Otto Sale Verlag und Verlag Sauerlander, Frankfurt/Main, 1983;
13. Iliescu, Gh.M. – **Constante termofizice ale principalelor produse alimentare**, Ed. Tehnică, București, 1971;
14. Iliescu, Gh. și Vasile, C. – **Caracteristici termofizice ale produselor alimentare**, Ed. Tehnică, București, 1982;
15. Jâșcanu V., ș.a. - **Fenomene de transfer, operații și aparate în industria alimentară - îndrumar de laborator**, Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, 1985;
16. Jinescu, G. - **Procese hidrodinamice și utilaje specifice în industria chimică**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983;

17. Marinoiu, V., Strătuță, C., Petcu, A., Pătrășcioiu, C. și Marinescu, C. – **Metode numerice aplicate în ingineria chimică**, Ed. Tehnică, București, 1986;
18. Nicolae, D., Lungu, R. și Cismaru, C. – **Măsurarea parametrilor fluidelor – echipamente și sisteme**, Ed. Scrisul Romanesc, Craiova 1986;
19. Pavlov, K.F., Romankov, P.G. și Noskov, A.A. – **Procese și aparate în ingineria chimică – exerciții și probleme**, Ed. Tehnică, București, 1981;
20. Petrescu, S. și Mămăligă, I. – **Ingineria proceselor chimice**, vol. I, Ed. Cermi, Iasi, 1997;
21. Pop, I. – **Teoria stratului limită nestaționar**, Ed. Științifică și Enciclopedică, București 1983;
22. Popa, B. și Carabogdan, I.Gh. (coord.) – **Manualul inginerului termotehnician**, vol. I-III, Ed. Tehnică, București, 1986;
23. Rășenescu, I. – **Operații și utilaje în industria alimentară**, vol. I, II, Ed. Tehnică, București, 1971;
24. Rășenescu I. - **Operații și utilaje în industria alimentară**, fasc. I - III, Universitatea “Dunărea de Jos” Galați, 1978, 1979, 1982;
25. Reynolds, A.J. – **Curgeri turbulente în tehnică**, Ed. Tehnică, București, 1982;
26. Roman, P. și Grigorescu, N.V.M. – **Hidrotransport**, Ed. Tehnică, București, 1989;
27. Roman, R.V. și Gavrilăscu, M. – **Fenomene de transfer în bioprocese**, Ed. Dosoitei, Iași, 1997;
28. Rose, L.M. – **Chemical Reactor Design in Practice**, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1981;
29. Soare, S. – **Hidrodinamica fluidizării și transportul pneumatic**, Universitatea “Petroil și Gaze” Ploiești, 1978;
30. Soare, S. - **Procese hidrodinamice**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1979;
31. Stancu, Al. și Mămăligă, I. – **Industria chimică – operații și utilaje de bază**, Ed. Gh. Asachi, Iași, 1997;
32. Tudose, R.Z., ș.a. - **Procese, operații, utilaje în industria chimică**, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1977;
33. Tudose, R.Z., ș.a. - **Reologia compușilor macromoleculari**, vol. I-III, Ed. Tehnică, București, 1982, 1984, 1987;
34. Vasilescu, A.A. – **Analiza dimensională și teoria similitudinii**, Editura Academiei, București, 1969;
35. Zlokarnik, M. – **Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering**, Springer Verlag, Berlin, 1991.