FENOMENE DE TRANSFER

MARIMI SI UNITATI DE MASURA
ANALIZA DIMENSIONALA

ANALIZA DIMENSIONALA

- Metoda pentru verificarea relatiilor care descriu fenomene fizice;
- Se bazeaza pe **omogenitatea dimensionala**: termenii unei relatii fizice trebuie sa fie omogeni = sa posede aceleasi unitati de masura si aceleasi puteri ale marimilor fundamentale.

ANALIZA DIMENSIONALA - APLICATII

- Cand se cunosc variabilele ce descriu un fenomen, pe baza lor si a unui sistem de UM se deduc CRITERIILE DE SIMILITUDINE;
- Se verifica omogenitatea dimensionala a ecuatiilor fizice;
- Se calculeaza valoarea marimii sau a factorului numeric la schimbarea UM;
- Se stabilesc relatiile de schimbare a UM sau a marimilor fundamentale.

ENTITATE, MARIME, VALOARE

- ENTITATI – notiuni abstracte pe care se bazeaza rationamentele stiintifice: lungime, temperatura, masa, timp etc.
- O entitate poseda proprietati: **marime**, semn, natura scalara sau vectoriala.
- Valoarea marimii unei entitati se obtine prin masurare = comparare cu valoarea unei marimi de aceeasi natura, numita UM.
- EX: masa unui corp = 2 kg, 0,002 t, 2000 g.

MARIMI PRIMARE (FUNDAMENTALE)

- Sunt in numar redus, si nu pot fi definite in functie de alte marimi primare.
- FENOMENE MECANICE: masa, lungime, timp (M, L, T).
- FENOMENE TERMICE: masa, lungime, timp, temperatura (M, L, T, Θ).
- FENOMENE ELECTRICE: masa, lungime, timp, intensitatea curentului (M, L, T, I).
- FENOMENE ELECTROTERMICE: masa, lungime, timp, temperatura, intensitatea curentului (M, L, T, Θ, I).

MARIMI SECUNDARE (DERIVATE)

- Se definesc in functie de marimile primare.
- Marimile primare sunt SINTETICE
- Marimile secundare sunt de natura ANALITICA, definindu-se prin ecuatii:

$$v = l/t$$

Ecuatia vitezei unui mobil, definita functie de valorile marimilor primare, lungime si timp.

Dimensional se poate scrie: $[v] = L.T^{-1}$

VARIABILE SI CONSTANTE

- Marimi: variabile, constante.
- Constante: caracteristice, universale.
- EXEMPLE:

Constante caracteristice:

- Modulul de elasticitate al unui otel;

Constante universale:

- Viteza luminii in vid;
- Numarul lui Avogadro;
- Acceleratia gravitationala.

UNITATI DE MASURA

- UM – cantitatea dintr-o marime adoptata conventional.
- Masurarea entitatilor primare: compararea marimii cu etalonul UM;
- Masurarea entitatilor secundare: pe baza relatiilor de definitie a acestora.
- Entitatilor primare li se atribuie UM fundamentale.
- Entitatile secundare se masoara cu UM derivate.

UNITATI DE MASURA

- EXEMPLU: **FORTA**
- Conform legii lui NEWTON:

$$F = m \times a = m \times dv/dt =$$

$$= m \times d/dt(dl/dt) = m \times d^2l/dt^2$$

- Dimensional:

$$[F] = M.L.T^{-2}$$

- Unitatea derivata pentru FORTA in SI este newtonul (N):

$$1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}$$

SISTEME DE UNITATI DE MASURA

- Un sistem de UM satisface conditiile:

1. Raportul a 2 marimi de aceeasi natura este independent de sistemul de unitati;
2. Valabilitatea ecuatiilor fizice rationale este independenta de sistemul UM.

- Unitatile derivate care se exprima cu ajutorul unitatilor fundamentale ale unui sistem de UM sunt unitati coerente.

SISTEME DE UNITATI DE MASURA

- **SISTEMUL CGS**

Entitati primare: lungime, masa, timp

Unitati fundamentale: cm, g, s.

Pentru fen. termice: temperatura (grd).

Unitati derivate:

- Forta: dyna (dyn); 1 dyn = 1 $g.cm.s^{-2}$
- Energia: ergul (erg);

  1 erg = 1 dyn.cm = 1 $g.cm^2.s^{-2}$

- Sistem folosit de catre fizicieni.

SISTEME DE UNITATI DE MASURA

- **SISTEMUL MK_fS**

Entitati primare: lungime, forta, timp

Unitati fundamentale: m, kgf, s.

Pentru fen. termice: temperatura (grd).

Sist. MK_fS utilizeaza 2 UM necoerente:

- Calul putere: 1 CP = 75 kgf.m.s^{-1} = 0,7377 kW
- Kilocaloria termica: 1 kcal = 426,93 kgf.m = 4,1868 kJ

- Sistem folosit de catre ingineri in calcule tehnice.

SISTEME DE UNITATI DE MASURA

- **SISTEMUL ANGLO-SAXON FPS**

Entitati primare: lungime, masa, timp

Unitati fundamentale: foot (ft), pound (lb), second (s).

Pentru fen. termice: temperatura (degree F).

Unitatea de forta: paundal (bal):

$$1 \text{ bal} = 1 \text{ lb.ft.s}^{-2}$$

- Sistem folosit in SUA, Marea Britanie etc.
- Sistemul anglo-saxon tehnic: foot (ft), pound force (lbf), second (s).

SISTEMUL INTERNATIONAL (SI)

- Denumire adoptata la a 11-a Conferinta Generala de Masuri si Greutati (1960).
- Contine TREI clase de unitati:
- unitati fundamentale;
- unitati derivate;
- unitati suplimentare.
- Unitatile fundamentale, independente d.p.d.v. dimensional:

m; kg; s; A; K; mol; cd.

SISTEMUL INTERNATIONAL (SI)

- **METRUL**: lungimea traiectului parcurs in vid de lumina pe o durata de 1/299792458 dintr-o secunda.
- **KILOGRAMUL**: masa prototipului international al kg confectionat din Pt-Ir.
- **SECUNDA**: durata a 9 192 631 770 perioade ale radiatiei care corespunde tranzitiei intre cele doua nivele ale energiei hiperfine ale starii fundamentale a atomului Cs 133.

SISTEMUL INTERNATIONAL (SI)

- **AMPERUL**: intensitatea unui curent electric constant care, mentinut in doua conductoare paralele, rectilinii, cu lungime infinita si cu sectiune circulara neglijabila, asezate in vid la o distanta de 1 metru unul de altul, ar produce intre aceste conductoare o forta de 2.10^{-7} N pe o lungime de 1 m.
- **KELVINUL**: fractiunea 1/273,16 din temperatura termodinamica a punctului triplu al apei.

SISTEMUL INTERNATIONAL (SI)

- **MOLUL**: cantitatea de substanta a unui sistem care contine atatea entitati elementare (atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule) cati atomi exista in 0,012 kg de carbon 12.
- **CANDELA**: intensitatea luminoasa, in directia normalei, a unei suprafete cu aria de 1/600 000 metri patrati a unui corp negru la temperatura de solidificare a Pt la presiunea de 101 325 $N.m^{-2}$.

UNITATI SI

Clasa	Mărimea	Unitatea SI	
		Denumire	Simbol
Fundamentale	Lungime Masă Timp Intensitatea curentului electric Temperatura termodinamică Cantitatea de substanță Intensitatea luminoasă	metru kilogram secundă amper kelvin mol candelă	m kg s A K mol Cd
Derivate	Arie Volum Viteză Accelerație Concentrație Masă volumică (densitate)	metru pătrat metru cub metru pe secundă metru pe secundă la pătrat mol pe metru cub kilogram pe metru cub	m^2 m^3 m/s m/s^2 $mol/\ m^3$ $kg/\ m^3$
Suplimentare	Unghi plan Unghi solid	radian steradian	rad sr

UNITATI SI DERIVATE CU DENUMIRI SPECIALE

Mărimea	Unitatea SI			
	Denumire	Simbol	Expresia în unități speciale	Expresia în unități fundamentale
Forță	newton	N	–	$kg \cdot m/s^2$
Frecvență	hertz	Hz	–	$1/s$
Presiune, tensiune mecanică	pascal	Pa	N/m^2	$kg/m \cdot s^2$
Energie, lucru mecanic, cantitate de căldură	joule	J	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
Putere, flux energetic	watt	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
Temperatură Celsius	grad Celsius	°C	–	K
Vâscozitate dinamică	pascal · secundă	$Pa \cdot s$	–	$kg/m \cdot s$
Tensiune superficială	newton pe metru	N/m	–	kg/s^2
Flux termic specific	watt pe metru pătrat	W/m^2	–	kg/s^3
Căldură latentă	joule pe kilogram	J/kg	–	m^2/s^2
Căldură specifică	joule pe kilogram · Kelvin	$J/kg \cdot K$	–	$m^2/s^2 \cdot K$
Conductivitate termică	watt pe metru · Kelvin	$W/m \cdot K$	–	$kg \cdot m/s^3 \cdot K$

PREFIXE SI SIMBOLURI SI

Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul	Factorul de multiplicare	Prefixul	Simbolul
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecta	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	da	10^{-18}	atto	a

FACTORI DE TRANSFORMARE FPS → SI

Sistemul de unități		Factor de multiplicare
Anglo-saxon	SI	
inch (in)	metru, m	$2,54 \cdot 10^{-2}$
foot (ft)	metru, m	$3,048 \cdot 10^{-1}$
pound force (lbf)	newton, N	4,448
kilopond (1 kgf)	newton, N	9,807
lbf/in^2	$N/m^2 \equiv (Pa)$	$6,89 \cdot 10^3$
British thermal unit (Btu)	$J \equiv (Nm)$	$1,055 \cdot 10^3$
Horse-power	watts $\equiv$ (J/s)	$7,457 \cdot 10^2$
Btu/ft^2hr °F	W/m^2 K	5,678
Btu/ft · hr °F	W/m K	1,731

FENOMENE DE TRANSFER

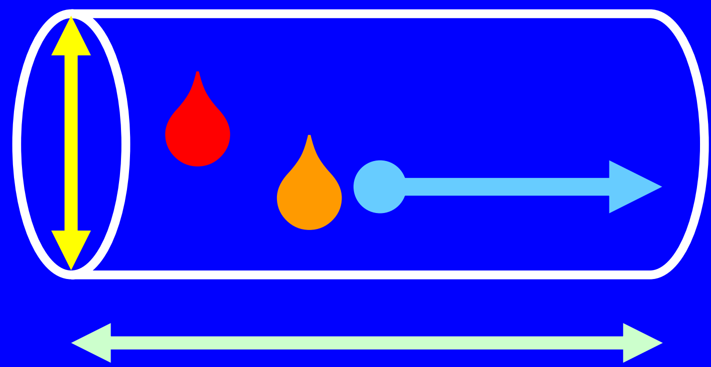
ANALIZA DIMENSIONALA

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

- **Exemplu**:

  S-a constatat experimental ca diferenta (caderea) de presiune ΔP intre extremitatile unei conducte prin care curge un fluid este o functie de:

- **Diametrul conductei, d;**
- **Lungimea conductei, l;**
- **Viteza fluidului, v;**
- **Densitatea fluidului, ρ;**
- **Viscozitatea fluidului, μ.**



STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

$$\boxed{\Delta P = f_1\left(d, l, v, \rho, \mu\right)} \qquad (2.1)$$

Forma funcției este necunoscută dar întrucât orice funcție poate fi dezvoltată într-o serie de puteri, funcția poate fi privită ca suma unui număr de termeni, fiecare constând din produsul puterilor variabilelor luate în considerare.

Cea mai simplă formă a unei astfel de relații va fi aceea în care se ia în considerare numai primul termen al seriei de puteri:

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

$$\Delta P = \text{const} \cdot d^{n_1} \cdot l^{n_2} \cdot v^{n_3} \cdot \rho^{n_4} \cdot \mu^{n_5} \qquad (2.2)$$

Pentru ca ecuația (2.2) să fie dimensional consistentă este necesar ca termenul din membrul drept să aibă aceleaşi dimensiuni ca şi termenul din membrul stâng, deci va trebui să aibă dimensiunile unei presiuni.

Fiecare variabilă din ecuația (2.2) poate fi exprimată în termeni de masă (M) lungime (L) şi timp (T). Dimensional:

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

$\Delta P \equiv M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ $d \equiv L$ $l \equiv L$ $v \equiv L \cdot T^{-1}$

$\rho \equiv M \cdot L^{-3}$ $\mu \equiv M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$

$$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \equiv L^{n_1} \cdot L^{n_2} \cdot \left(L \cdot T^{-1}\right)^{n_3} \cdot \left(M \cdot L^{-3}\right)^{n_4} \cdot \left(M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}\right)^{n_5}$$

Condiția consistenței dimensionale trebuie să fie îndeplinită şi de către fiecare din variabilele fundamentale masă, lungime timp:

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

- **Pentru M:** $+1 = n_4 + n_5$
- **Pentru L:** $-1 = n_1 + n_2 + n_3 - 3n_4 - n_5$
- **Pentru T:** $-2 = -n_3 - n_5$

Sistemul de 3 ecuații cu 5 necunoscute (n_1 ...n_5) poate fi rezolvat în funcție de oricare 2 din cele 5 necunoscute. Rezolvând în funcție de n_2 şi n_5 se obține:

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

- din ecuația în M: $$n_4 = 1 - n_5$$
- din ecuația în T: $$n_3 = 2 - n_5$$

Substituind expresiile lui n_3 şi n_4 în ecuația în L se obține:

$$-1 = n_1 + n_2 + \left(2 - n_5\right) - 3\left(1 - n_5\right) - n_5$$

sau:

$$0 = n_1 + n_2 + n_5$$

sau:

$$n_1 = -n_2 - n_5$$

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

Revenind şi efectuând acum substituirile în ecuaţia (2.2) rezultă:

$$\Delta P = \text{const} \cdot d^{-n_2 - n_5} \cdot l^{n_2} \cdot v^{2-n_5} \cdot \rho^{1-n_5} \cdot \mu^{n_5}$$

sau:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2} = \text{const} \cdot \left(\frac{l}{d} \right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho v d} \right)^{n_5} \qquad (2.3)$$

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

- Întrucât n_2 şi n_5 sunt constante arbitrare ecuaţia (2.3) poate fi satisfăcută numai dacă termenii **$\Delta P/(\rho v^2)$**, **l/d** şi **$\mu/(\rho v d)$** sunt adimensionali.
- Pentru verificare se recomandă să se evalueze dimensiunile fiecăruia dintre grupurile de mai sus şi să se constate adimensionalitatea acestora.
- Grupul **$v d \rho/\mu$**, cunoscut ca **numărul Reynolds**, este unul dintre cele mai frecvente în studiul curgerii fluidelor. Pe baza sa se poate aprecia tipul de curgere într-un spaţiu de geometrie dată.

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

În termeni mai generali, ecuația (2.3) poate fi scrisă:

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho v^2} = f_2\left(\frac{l}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}\right)} \qquad (2.4)$$

STABILIREA FORMEI GENERALE A ECUATIILOR CU AJUTORUL ANALIZEI DIMENSIONALE

Comparând ecuațiile (2.1) şi (2.4) se constată că o relație între 6 variabile a fost redusă la o relație între doar 3 grupuri adimensionale:

$$\boxed{\Delta P = f_1(d, l, v, \rho, \mu)} \qquad (2.1)$$

$$\boxed{\frac{\Delta P}{\rho v^2} = f_2\left(\frac{l}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}\right)} \qquad (2.4)$$

TEOREMA Π (Buckingham)

- O relatie fizica in care intervin **m** marimi si constante dimensionale poate fi exprimata ca o relatie intre **i = m – n** grupuri adimensionale, unde **n** reprezinta numarul de unitati fundamentale ale sistemului de unitati de masura utilizat.

TEOREMA Π (Buckingham)

- O ecuatie fizica de tipul:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

se reduce la o ecuatie de tipul:

$$F_2(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i) = 0$$

unde fiecare grup (numar) adimensional π depinde de maximum $(n + 1)$ marimi si constante dimensionale.

Nr. grupurilor $\pi = m - n$

TEOREMA Π - algoritm

1. Se insiruiesc toate marimile fizice si constantele **dimensionale** care – din diverse consideratii – se apreciaza ca influenteaza fenomenul studiat;
2. Se scrie formula dimensionala a fiecarei marimi fizice si constante dimensionale considerate la (1);
3. Se aleg cele **n** marimi fundamentale, a.i. totalitatea marimilor si constantelor alese sa contina cel putin o data toate marimile fundamentale ale problemei;

TEOREMA Π - algoritm

4. Se formeaza grupurile π_1, π_2, ..., π_i, constand fiecare din produsul celor **n** marimi alese la (3), plus cate una din celelalte marimi si constante;
5. Se asociaza cate un **exponent** arbitrar fiecarei marimi si constante dimensionale din fiecare grup π;
6. Se determina valoarea acestor exponenti, punand conditia ca fiecare grup π sa fie adimensional.

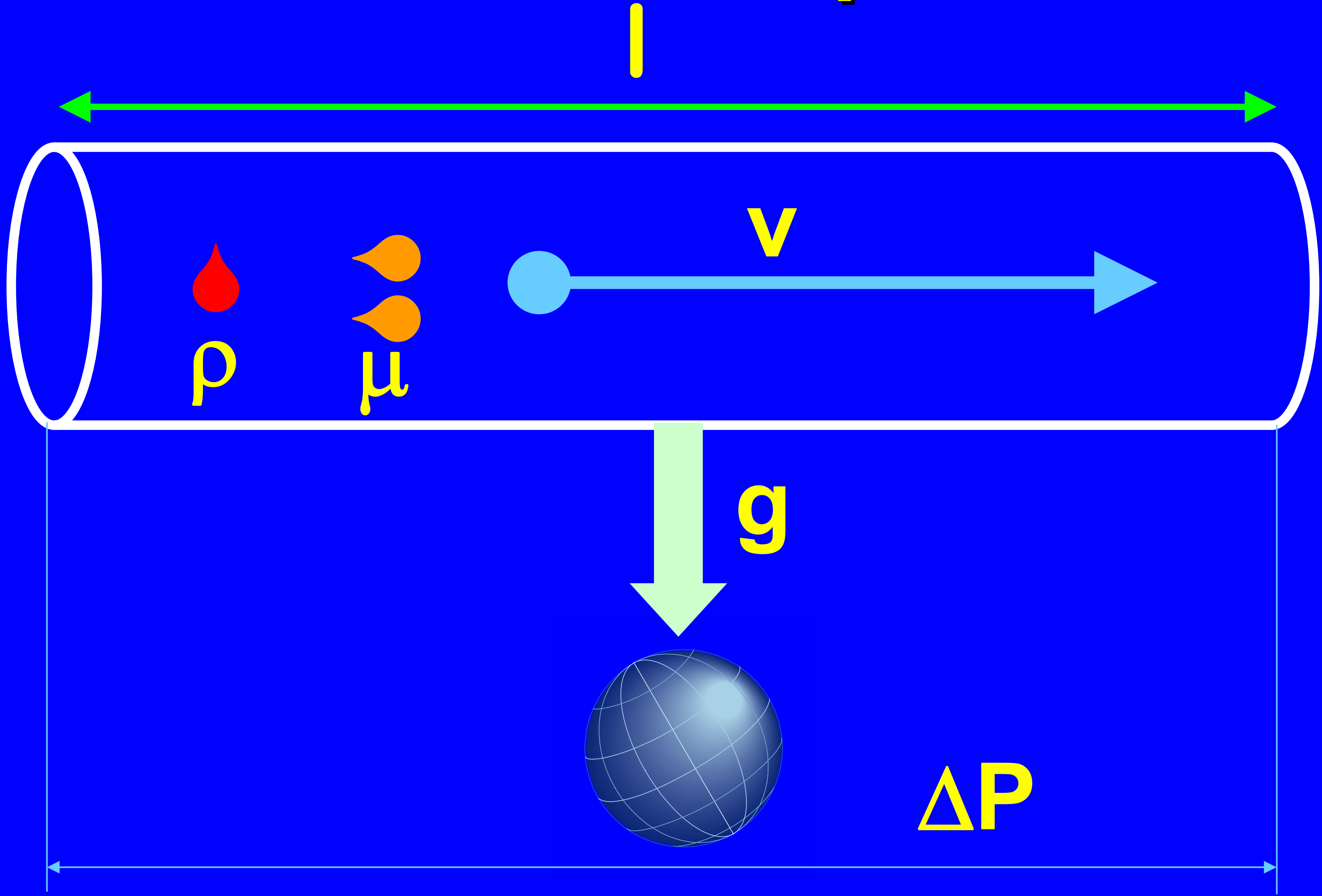
TEOREMA Π - aplicatie

- Folosind teorema **Π**, *sa se gaseasca grupurile* adimensionale care intervin in curgerea izoterma a fluidelor.

Mărimi care influențează curgerea fluidelor

Mărime	Simbol	Formulă dimensională
lungime	l	L
viteza de curgere	v	LT^{-1}
densitatea fluidului	ρ	ML^{-3}
viscozitatea fluidului	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
căderea de presiune	ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
accelerația gravitațională	g	LT^{-2}

TEOREMA Π - aplicatie



TEOREMA Π - aplicatie

- m = 6; n = 3 (M, L, T) ➔ i = m – n = 6 – 3 = 3 grupuri adimensionale π;
- Relatia cautata va avea forma:

$$F_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = constant$$

- Se aleg drept marimi comune l, v si ρ.
- Astfel:

$$\pi_1 = l^{a_1} \cdot v^{b_1} \cdot \rho^{c_1} \cdot g^{d_1}$$

$$\pi_2 = l^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot (\Delta P)^{d_2}$$

$$\pi_3 = l^{a_3} \cdot v^{b_3} \cdot \rho^{c_3} \cdot \mu^{d_3}$$

TEOREMA Π - aplicatie

- Dimensional:

$$\left[\pi_1\right] = L^{a_1} \cdot \left(LT^{-1}\right)^{b_1} \cdot \left(ML^{-3}\right)^{c_1} \cdot \left(LT^{-2}\right)^{d_1} = M^{c_1} \cdot L^{\left(a_1+b_1-3c_1+d_1\right)} \cdot T^{\left(-b_1-2d_1\right)}$$

Pentru ca π_1 sa fie adimensional, este necesar ca exponentii marimilor fundamentale, M, L, T sa fie nuli, adica:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 - 3c_1 + d_1 = 0 \\ -b_1 - 2d_1 = 0 \end{cases}$$

Sistemul de 3 ecuatii cu 4 necunoscute se rezolva in raport cu d_1 considerat arbitrar unitar.

TEOREMA Π - aplicatie

- Prin rezolvarea sistemului →
  $a_1 = 1;\ b_1 = -2;\ c_1 = 0;\ d_1 = 1$
  Inlocuind aceste valori in $\pi_1 = l^{a_1} \cdot v^{b_1} \cdot \rho^{c_1} \cdot g^{d_1}$

→ $$\pi_1 = l^1 \cdot v^{-2} \cdot \rho^0 \cdot g^1 = \frac{l \cdot g}{v^2} = \mathrm{Fr}$$

$$\frac{l \cdot g}{v^2} = \mathrm{Fr}\ \text{ - criteriul lui FROUDE}$$

TEOREMA Π - aplicatie

- Similar,

$$\pi_2 = l^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot (\Delta P)^{d_2}$$

$$[\pi_2] = M^{(c_2+d_2)} \cdot L^{(a_2+b_2-3c_2-d_2)} \cdot T^{(-b_2-2d_2)}$$

$$\begin{cases} c_2 + d_2 = 0 \\ a_2 + b_2 - 3c_2 - d_2 = 0 \\ -b_2 - 2d_2 = 0 \end{cases}$$

Impunand $d_2 = 1$ ➔ $a_2 = 0$; $b_2 = -2$; $c_2 = -1$

TEOREMA Π - aplicatie

- Ecuatia $\pi_2 = l^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot \rho^{c_2} \cdot \left(\Delta P\right)^{d_2}$ devine:

$$\pi_2 = l^0 \cdot v^{-2} \cdot \rho^{-1} \cdot \left(\Delta P\right) = \frac{\Delta P}{\rho \cdot v^2} = \mathrm{Eu}$$

$$\frac{\Delta P}{\rho \cdot v^2} = \mathrm{Eu}\text{ - criteriul lui EULER}$$

TEOREMA Π - aplicatie

- In mod analog,

$$\pi_3 = l^{a_3} \cdot v^{b_3} \cdot \rho^{c_3} \cdot \mu^{d_3}$$

$$[\pi_3] = M^{(c_3+d_3)} \cdot L^{(a_3+b_3-3c_3-d_3)} \cdot T^{(-b_3-d_3)}$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 - 3c_3 - d_3 = 0 \\ -b_3 - d_3 = 0 \\ -c_3 + d_3 = 0 \end{cases}$$

TEOREMA Π - aplicatie

- Cu $d_3 = 1$ rezulta: $a_3 = -1$; $b_3 = -1$; $c_3 = -1$

si:

$$\pi_3 = l^{-1} \cdot v^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \mu = \left(\frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu} \right)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

$$\frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu} = \mathrm{Re}\text{ - criteriul REYNOLDS}$$

TEOREMA Π - aplicatie

- Forma generala a functiei care descrie curgerea fluidelor se reduce de la:

$$F(l,\ v,\ \rho,\ g,\ \mu,\ \Delta P) = 0$$

la expresia:

$$F(Fr,\ Eu,\ Re) = ct.$$

care se poate scrie si:

$$Eu = p \times Re^{q} \times Fr^{r}$$

in care constantele **p**, **q**, **r** se determina experimental pentru fiecare caz in parte

TEOREMA Π - aplicatie

- Importanta teoremei Π:
- O functie de 6 variabile **(l, v, ρ, g, μ, ΔP)** s-a redus la o functie de numai 3 grupuri adimensionale **(Fr, Eu, Re)**.
- Grupurile adimensionale π poarta denumirea de CRITERII DE SIMILITUDINE.
- Cateva criterii de similitudine intalnite in mod frecvent:

CRITERII DE SIMILITUDINE

Criteriul	Expresie	Criteriul	Expresie
Reynolds	$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\mu}$	Nusselt	$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda}$
Froude	$\mathrm{Fr} = \frac{g l}{v^2}$	Grashof	$\mathrm{Gr} = \frac{g l^3}{v^3} \cdot \beta \cdot \Delta T$
Euler	$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho v^2}$	Sherwood	$\mathrm{Sh} = \frac{k l}{D}$
Weber	$\mathrm{We} = \frac{\rho_d v^2 l}{\sigma}$	Schmidt	$\mathrm{Sc} = \frac{\mu}{\rho D}$
Arhimede	$\mathrm{Ar} = \frac{d^3 (\rho_p - \rho_m) \rho_m g}{\mu_m^3}$	Stanton (termic)	$\mathrm{St}_{\mathrm{termic}} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}}$
Prandtl	$\mathrm{Pr} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	Stanton (difuzional)	$\mathrm{St}_{\mathrm{difuzional}} = \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Sc}}$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Ecuatia diferentiala a unui fenomen poate fi utilizata pentru deducerea ecuatiei criteriale a fenomenului respectiv;
- Metoda este utila atunci cand:

- Rezolvarea ec. diferentiale este imposibila;
- Rezolvarea ec. diferentiale necesita simplificari care pot conduce la erori grosolane.

- Prezinta avantajul ca pune in evidenta semnificatia fizica a grupurilor adimensionale.

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Se considera ecuatiile diferentiale Navier – Stokes care descriu curgerea izoterma a unui fluid cu comportare newtoniana. Ecuatia pentru componenta pe directia “x” a miscarii are forma:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] - \rho g_x + \frac{\partial P}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] = 0$$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Ecuatia prezentata este omogena, fiecare termen al sau avand dimensiunile $F/V = (m \times a)/l^3$.
- Daca din ecuatie se omit semnele diferentiale si constantele numerice (1/3, -1), se obtine **ecuatia diferentiala generalizata**:

$$\left[\frac{\rho v}{t}\right] + \left[\frac{\rho v^2}{l}\right] - [\rho g] + \left[\frac{\Delta P}{l}\right] - \left[\frac{\mu v}{l^2}\right] = 0$$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho\left[v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]-\rho g_x+\frac{\partial P}{\partial x}-$$

$$-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]-\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]=0$$

$$\left[\frac{\rho v}{t}\right]+\left[\frac{\rho v^2}{l}\right]+[\rho g]+\left[\frac{\Delta P}{l}\right]+\left[\frac{\mu v}{l^2}\right]=0$$

I II III IV V, VI

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Termenii I si II sunt echivalenti:

$$\mathrm{I} = \left[\frac{\rho v}{t} \cdot \frac{v}{v}\right] = \left[\frac{\rho v^2}{t \cdot \frac{l}{t}}\right] = \left[\frac{\rho v^2}{l}\right] = \mathrm{II}$$

ca urmare, ecuatia diferentiala generalizata se poate scrie sub forma:

$$\left[\frac{\rho v^2}{l}\right] + [\rho g] + \left[\frac{\Delta P}{l}\right] + \left[\frac{\mu v}{l^2}\right] = 0$$

II III IV V

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

$$\left[\frac{\rho v^2}{l}\right]+\left[\rho g\right]+\left[\frac{\Delta P}{l}\right]+\left[\frac{\mu v}{l^2}\right]=0$$

Fortele de viscozitate

Fortele de presiune

Fortele gravitationale

Fortele inertiale

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Din ultima forma a ecuatiei diferentiale generalizate se pot obtine 3 grupuri adimensionale (criterii de similitudine) independente:
- Numarul **REYNOLDS** – rap. dintre fortele inertiale si cele de viscozitate:

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{V}} = \frac{\rho v^2 / l}{\mu v / l^2} = \frac{\rho v l}{\mu} = \mathrm{Re}$$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Din ultima forma a ecuatiei diferentiale generalizate se pot obtine 3 grupuri adimensionale (criterii de similitudine) independente:
- Numarul **FROUDE** – rap. dintre fortele inertiale si cele gravitationale:

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}} = \frac{\rho v^2 / l}{\rho g} = \frac{v^2}{l \cdot g} = \mathrm{Fr}$$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

- Din ultima forma a ecuatiei diferentiale generalizate se pot obtine 3 grupuri adimensionale (criterii de similitudine) independente:
- Numarul **EULER** (coeficientul de presiune) – rap. dintre fortele de presiune si cele inertiale:

$$\frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{II}} = \frac{\Delta P / l}{\rho v^2 / l} = \frac{\Delta P}{\rho v^2} = \mathrm{Eu}$$

DEDUCEREA ECUATIILOR CRITERIALE DIN ECUATIILE DIFERENTIALE ALE FENOMENELOR

Ecuatia diferentiala Navier - Stokes:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho\left[v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]-\rho g_x+\frac{\partial P}{\partial x}-$$

$$-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]-\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]=0$$

se scrie sub forma criteriala:

$$f\left(\mathrm{Re},\,\mathrm{Fr},\,\mathrm{Eu}\right)=\mathrm{const.}$$

identica cu aceea obtinuta prin metoda **analizei dimensionale**.