

**UNIVERSITATEA “VASILE ALECSANDRI” din BACĂU**  
**FACULTATEA de INGINERIE**

**Conf. univ. dr. ing. MIHAI PUIU – BERIZINȚU**

***BAZELE ELECTROTEHNICII***  
***Seminar și lucrări practice***

***Editura ALMA MATER***  
**BACĂU, 2013**

***Referenți științifici:***

*Prof. univ. dr. ing.* Gheorghe HAZI

*Prof. univ. dr. ing.* Dan ROTAR

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**PUIU-BERIZINȚU, MIHAI**

**Bazele electrotehnicii: seminar și lucrări practice** / Puiu-Berizintu Mihai,  
Bîrsan Cătălin. - Bacău: Alma Mater\\Bacău\\, 2013

ISBN 978-606-527-313-9

I. Bîrsan, Cătălin

621.3

***Tehnoredactare:***

*Conf. univ. dr. ing.* Puiu-Berizintu Mihai = 80%

*As. univ. dr. ing.* Bîrsan Cătălin = 20%

## *Prefață*

Prezenta ediție a cărții *Bazele electrotehnicii – seminar și lucrări practice* conține aplicații, probleme și lucrări practice de laborator pentru partea de electromagnetism și partea de circuite electrice.

Lucrarea a fost elaborată, în primul rând, pentru uzul studenților de la programele de studii de licență Energetică Industrială și Mecatronică ale Facultății de Inginerie a Universității “Vasile Alecsandri” din Bacău, dar considerăm că este utilă tuturor celor interesați în dobândirea și aprofundarea cunoștințelor teoretice și practice asupra unor aspecte fundamentale din domeniul electrotehnicii.

În această primă ediție lucrarea conține șapte capitole de aplicații și probleme pentru studiul la seminar și un număr de 18 lucrări practice de laborator. Fiecare capitol de aplicații și probleme este precedat de o parte teoretică succintă, importantă pentru fixarea cunoștințelor privind fenomenele și metodele de calcul necesare pentru înțelegerea aplicațiilor și problemelor rezolvate sau propuse.

Obiectivul urmărit în concepția și elaborarea acestei lucrări a constat în tratarea sub aspect teoretic și practic a unor părți importante din teoria circuitelor electrice și a fenomenelor electromagnetice care să asigure aprofundarea cunoștințelor de bază necesare pregătirii de specialitate a inginerilor din toate domeniile electrotehnicii.

Autorul va fi recunoscător pentru eventualele observații și sugestii în vederea îmbunătățirii sau completării actualei ediții a acestei cărți.

*Autorul*



## **CUPRINS**

<i>Prefață</i> .....	3
----------------------	---

### **PARTEA I – SEMINAR BAZELE ELECTROTEHNICII**

#### **1. ELECTROSTATICA**

1.1. Calculul câmpului electrostatic .....	7
1.1.1. Breviar de calcul pentru câmpul electrostatic .....	7
1.1.2. Aplicații și probleme .....	11
1.2. Calculul capacităților electrice .....	17
1.2.1. Breviar de calcul al capacităților electrice .....	17
1.2.2. Aplicații și probleme .....	21
1.3. Calculul câmpului electrostatic cu metoda imaginilor electrice .....	26
1.3.1. Metoda imaginilor electrice .....	26
1.3.2. Relațiile de capacitate ale lui Maxwell .....	29
1.3.3. Capacități în serviciu .....	30
1.3.4. Aplicații și probleme .....	30
1.4. Energia și forțele câmpului electrostatic .....	41
1.4.1. Noțiuni teoretice .....	41
1.4.2. Aplicații și probleme .....	44

#### **2. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR**

2.1. Breviar de calcul pentru câmpul magnetic .....	51
2.2. Aplicații .....	52

#### **3. ELECTRODINAMICA**

3.1. Legea inducției electromagnetice .....	55
3.1.1. Noțiuni teoretice .....	55
3.1.2. Aplicații la legea inducției electromagnetice .....	56
3.2. Inductivitățile circuitelor electrice .....	58
3.2.1. Noțiuni teoretice .....	58
3.2.2. Aplicații pentru calculul inductivităților .....	59
3.3. Circuite magnetice .....	61
3.3.1. Noțiuni teoretice .....	61
3.3.2. Aplicații pentru calculul circuitelor magnetice .....	62
3.4. Energia și forțele câmpului magnetic .....	67
3.4.1. Noțiuni teoretice .....	67
3.4.2. Aplicații .....	68

#### **4. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU**

4.1. Structura circuitelor de curent continuu .....	71
4.2. Transfigurarea circuitelor electrice liniare de curent continuu .....	72
4.3. Analiza rețelelor electrice liniare de curent continuu .....	86
4.3.1. Introducere .....	86
4.3.2. Aplicații și probleme .....	87

4.4. Teoremele circuitelor de curent continuu .....	95
4.4.1. Teoremele generatoarelor echivalente de tensiune și de curent .....	95
4.4.2. Teorema suprapunerii efectelor (superpoziției). Teorema reciprocității .....	96
4.4.3. Aplicații și probleme .....	98
<b>5. MĂRIMI SINUSOIDALE</b>	
5.1. Noțiuni teoretice .....	105
5.1.1. Mărimi periodice, mărimi alternative, mărimi sinusoidale .....	105
5.1.2. Reprezentarea simbolică a mărimilor sinusoidale .....	106
5.1.3. Aplicații și probleme .....	109
<b>6. ANALIZA CIRCUITELE MONOFAZATE LINIARE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL</b>	
6.1. Noțiuni teoretice .....	113
6.2. Aplicații și probleme .....	117
<b>7. CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL</b>	
7.1. Circuite trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni simetrice sinusoidale. Probleme rezolvate .....	121
7.2. Metoda componentelor simetrice. Aplicații și probleme .....	127
7.2.1. Considerații teoretice .....	127
7.2.2. Aplicații și probleme .....	128
<b>8. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU</b>	
8.1. Noțiuni teoretice .....	135
8.2. Probleme rezolvate .....	137
<b>PARTEA A II - A LUCRĂRI PRACTICE DE LABORATOR</b>	
L1. Determinarea caracteristicilor de magnetizare a materialelor feromagnetice .....	141
L2. Caracteristicile bobinei neliniare .....	147
L3. Bobina neliniară comandată. Amplificatorul magnetic. ....	152
L4. Metode de analiză a rețelelor electrice liniare de curent continuu .....	156
L5. Studiul dipolului liniar pasiv alimentat în curent continuu .....	162
L6. Studiul experimental al teoremelor circuitelor liniare de curent continuu .....	165
L7. Studiul cuadripolului liniar pasiv alimentat în curent continuu .....	171
L8. Studiul circuitelor neliniare de curent continuu .....	176
L9. Circuite liniare monofazate în regim permanent sinusoidal .....	183
L10. Analiza rețelelor electrice liniare în regim permanent sinusoidal .....	189
L11. Studiul cuadripolului liniar pasiv în regim permanent sinusoidal .....	196
L12. Studiul circuitelor cu bobine liniare reale conectate în serie și în paralel .....	201
L13. Studiul rezonanței în circuitelor cu bobina neliniară. Fenomenul de ferorezonanță. ....	210
L14. Studiul circuitelor trifazate simetrice și echilibrate în regim permanent sinusoidal .....	215
L15. Circuite trifazate dezechilibrate în regim permanent sinusoidal .....	224
L16. Filtre pentru componente simetrice .....	230
L17. Analiza armonică a semnalelor periodice nesinusoidale .....	238
L18. Studiul regimului tranzitoriu al circuitelor electrice liniare .....	245
<i>Bibliografie</i> .....	251

# 1. ELECTROSTATICA

## 1.1. CALCUL CÂMPULUI ELECTROSTATIC

### 1.1.1. BREVIAR DE CALCUL PENTRU CÂMPUL ELECTROSTATIC

#### ❶ Regimul electrostatic.

Regimurile caracteristice de funcționare ale câmpului electromagnetic sunt: regimul static, regimul staționar, regimul cvasistaționar și regimul nestaționar.

*Regimul static* este caracterizat, pe de o parte, prin particularitatea că toate mărimile sunt constante în timp, adică derivatele lor în raport cu timpul sunt nule, iar pe de altă parte, prin lipsa posibilității de a transforma energia (electrică sau magnetică), în alte forme de energie. Regimul static mai este caracterizat prin starea de imobilitate a corpurilor. Există un regim static pentru câmpul electric – *regimul electrostatic* și un regim static pentru câmpul magnetic – *regimul magnetostatic*.

Câmpul electrostatic este produs de corpuri imobile încărcate cu sarcini electrice sau polarizate electric. Calculul câmpului electrostatic constă în determinarea intensității câmpului electrostatic și a potențialului punctelor din spațiu la o distribuție dată a sarcinilor electrice.

#### ❷ Mărimi caracteristice ale câmpului electrostatic.

**Intensitatea câmpului electrostatic**  $\bar{E}_v$  într-un punct din vid se definește prin raportul dintre forța ce acționează asupra unui corp punctiform imobil încărcat cu sarcină electrică și sarcina corpului când aceasta tinde la zero,

$$\bar{E}_v = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\bar{F}}{q}. \quad (1.1)$$

Unitatea de măsură pentru intensitatea câmpului electric în sistemul internațional de unități de măsură (S.I.) este volt/metru [V/m]. Din această relație rezultă și expresia forței electrostatice – forța ce acționează asupra sarcinii electrice elementare  $q$  în câmp electrostatic,

$$\bar{F} = q\bar{E}. \quad (1.2)$$

**Inducția electrică în vid**  $\bar{D}_v$  se definește prin produsul dintre permitivitatea vidului și intensitatea câmpului electric în vid

$$\bar{D}_v = \epsilon_0 \bar{E}_v, \quad (1.3)$$

unde  $\epsilon_0$  este permitivitatea vidului,  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$  [F/m].

**Polarizația**  $\bar{P}$  caracterizează local starea de polarizare electrică a materialelor dielectrice, fiind definită ca densitate de volum a momentelor electrice dipolare  $\bar{p}$  ale sarcinilor de polarizație,

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta V} \quad [C/m^2] \quad (1.4)$$

și are două componente: polarizația temporară  $\bar{P}_t$  și polarizația permanentă  $\bar{P}_p$ .

**Legea polarizației temporare** stabilește că numai polarizația temporară depinde de intensitatea câmpului electric. Pentru medii dielectrice liniare și izotrope, polarizația temporară  $\bar{P}_t$  este proporțională cu intensitatea câmpului electric  $\bar{E}$ ,

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}, \quad (1.5)$$

unde  $\chi_e$  este *susceptivitatea electrică*, mărime de material adimensională, pozitivă.

**Legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație** în câmp electric:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}, \quad (1.6)$$

Pentru dielectricii liniari, izotropi, fără polarizație permanentă ( $\bar{P} = \bar{P}_t, \bar{P}_p = 0$ ), ținând cont de rel. (1.5), rezultă

$$\bar{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \bar{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \varepsilon \bar{E} \quad (1.7)$$

în care:  $\varepsilon$  este *permitivitatea electrică absolută* sau *constanta dielectrică* a materialului (măsurată în F/m),  $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 = 1 + \chi_e$  este *permitivitatea electrică relativă* ( $\varepsilon_r > 1$ ).

**Repartiții ale sarcinii electrice.** Sarcinile electrice pot fi repartizate pe corpuri sau în volumul corpurilor. Corespunzător se definesc densitățile de sarcină electrică:

- *Densitatea de volum a sarcinii electrice*

$$\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad [C/m^3]; \quad (1.8)$$

- *Densitatea de suprafață (superficială) a sarcinii electrice*

$$\rho_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{dq}{dA} \quad [C/m^2]; \quad (1.9)$$

- *Densitatea de linie (lineică) a sarcinii electrice*

$$\rho_l = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad [C/m]. \quad (1.10)$$

**Fluxul electric** reprezintă fluxul vectorului inducție electrică  $\bar{D}$  printr-o suprafață oarecare, deschisă sau închisă. Astfel fluxul electric printr-o suprafață deschisă  $S_\Gamma$  care se sprijină pe o curbă închisă  $\Gamma$  este

$$\Psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{D} d\bar{A}, \quad (1.11)$$

iar printr-o suprafață închisă  $\Sigma$

$$\Psi_\Sigma = \oint_\Sigma \bar{D} d\bar{A}. \quad (1.12)$$

**Tensiunea electrică**  $U_{AB}$  între două puncte A și B din câmp electrostatic este numeric egală cu lucrul mecanic  $L_{AB}$  efectuat de forțele câmpului pentru deplasarea sarcinii electrice unitare  $q$  între cele două puncte,

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \int_A^B \bar{E} d\bar{s}. \quad (1.13)$$



**Potențialul electric**  $V_P$  al unui punct oarecare  $P$  din câmp electrostatic este dat de tensiunea electrică a punctului respectiv față de un punct de referință  $P_0$  considerat de potențial nul (situat pe pământ sau la infinit),

$$V_P \stackrel{d}{=} U_{PP_0} = \int_P^{P_0} \bar{E} \, d\bar{s}. \quad (1.14)$$

### ③ Metode de calcul a câmpului electrostatic

În electrostatică, problema fundamentală constă în determinarea intensității câmpului și potențialului punctelor din spațiu în care se exercită acțiunea câmpului electric, dacă se cunosc distribuțiile de sarcini pe conductoare și poziția relativă a conductoarelor. În literatură sînt tratate numeroase metode de calcul, multe dintre ele bazate pe metode matematice complexe și de nivel înalt cum sunt: metodele variaționale, metoda diferențelor finite, metoda funcțiilor de variabilă complexă, metoda funcțiilor Green, metoda inversiunii geometrice (transformata Kelvin), metoda transformării conforme, metode grafice și grafo-analitice, etc. În continuare ne limităm la cîteva metode de calcul direct a câmpului electrostatic.

#### **Metoda superpoziției (suprapunerii efectelor).**

Se pleacă de la expresiile intensității câmpului electrostatic și potențialului produs de o sarcină punctiformă  $q$  într-un punct  $P$  din spațiu (în vid sau aer) la distanța  $R$  de sarcină,

$$\bar{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \bar{R}, \quad \text{respectiv} \quad V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}. \quad (1.15)$$

În cazul a  $n$  sarcini punctiforme, aplicând principiul superpoziției, rezultă:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k} \bar{R}_k, \quad \text{respectiv} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k}. \quad (1.16)$$

Dacă sarcina electrică este repartizată pe un domeniu  $\mathcal{D}$  oarecare (volum  $V$ , suprafață  $S$  sau pe un fir subțire  $l$ ) cu densitatea corespunzătoare  $\rho_D$  ( $\rho_V$ ,  $\rho_S$ ,  $\rho_l$ ), sarcina elementară  $dq = \rho_D d\mathcal{D}$  va determina într-un punct la distanța  $R$  câmpul și potențialul

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^3} \bar{R} \quad \text{respectiv,} \quad dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R}. \quad (1.17)$$

Intensitatea câmpului și potențialul se determină în final prin integrare pe domeniul respectiv. În cazul general, când avem sarcini distribuite în volumul corpurilor cu densitatea  $\rho_V$ , pe suprafața corpurilor cu densitatea  $\rho_S$ , pe corpuri filiforme cu densitatea  $\rho_l$ , cât și  $n$  sarcini punctiforme  $q_k$ , relațiile de calcul pentru intensitatea câmpului și potențialului într-un punct la mare distanță de sarcinile care ocupă un domeniu finit sunt:

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_V \frac{\rho_V \bar{R}}{R^3} dV + \int_S \frac{\rho_S \bar{R}}{R^3} dA + \int_l \frac{\rho_l \bar{R}}{R^3} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k^3} \bar{R}_k \right) \quad (1.18)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_V \frac{\rho_V}{R} dV + \int_S \frac{\rho_S}{R} dA + \int_l \frac{\rho_l}{R} dl + \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k} \right). \quad (1.19)$$

### Calculul câmpului folosind legea fluxului electric (teorema lui Gauss).

Metoda se utilizează pentru câmpuri care prezintă simetrie. Se determină întâi intensitatea câmpului utilizând relația dată de teorema lui Gauss (legea fluxului electric în vid)

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \, d\vec{s} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon}, \quad (1.20)$$

în care  $q_{\Sigma}$  este sarcina electrică din interiorul suprafeței închise  $\Sigma$  și apoi se calculează potențialul electric cu relația de definiție.

### Metoda bazată pe teorema potențialului electrostatic.

Se calculează mai întâi potențialul electric cu relația de definiție sau aplicând principiul superpoziției și apoi se calculează intensitatea câmpului electric cu relația

$$\vec{E} = -\text{grad } V. \quad (1.21)$$

Metoda nu se aplică decât pentru distribuții de sarcină pe corpuri cu dimensiuni finite pentru care se poate considera că potențialul punctelor de la infinit este nul,  $V_{\infty} = 0$ .

### Metoda rezolvării ecuațiilor lui Laplace și Poisson.

Se pleacă de la forma locală a legii fluxului electric,  $\text{div } \vec{D} = \rho_v$ , respectiv

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v. \quad (1.22)$$

Pentru medii dielectrice liniare, izotrope, fără polarizație permanentă este valabilă relația  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  astfel că ecuația (1.22) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_v}{\epsilon}. \quad (1.23)$$

Utilizând relațiile date de gradientul de potențial,  $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ , se obține *ecuația Poisson scalară* pentru câmpul electrostatic

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad (1.24)$$

sau simbolic

$$\Delta V = -\frac{\rho_v}{\epsilon}, \quad (1.25)$$

unde s-a notat cu  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  operatorul Laplace.

În domeniile în care lipsesc sarcinile electrice ( $\rho_v = 0$ ), obținem *ecuația lui Laplace* pentru câmpul electrostatic:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{respectiv simbolic, } \Delta V = 0. \quad (1.26)$$

Rezolvarea ecuațiilor Poisson sau Laplace se poate efectua numai de la caz la caz, folosind metode în general aproximative. De exemplu, în cazul unui câmp plan

paralel cum ar fi cel al unui condensator plan cu distanța dintre armături  $d$  foarte mică, ecuația lui Laplace este  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$  care, prin două integrări consecutive, duce la soluția

$$V = K_1 x + K_2.$$

Constantele  $K_1$  și  $K_2$  se determină din condițiile la limită: pentru  $x = 0$ ,  $V(0) = 0$  și pentru  $x = d$ ;  $V(d) = U$  (tensiunea dintre armături), de unde rezultă:  $K_2 = 0$ ,  $K_1 = U/d$ .

Potențialul unui punct oarecare din dielectricul condensatorului plan este:

$$V = \frac{U}{d} x, \quad x \text{ fiind distanța de la punctul considerat la armătura negativă.}$$

### 1.1.2. APLICAȚII ȘI PROBLEME

1.1.1. Să se determine câmpul și potențialul produs în vid de o sferă metalică de rază  $a$ , uniform încărcată cu densitatea de sarcină  $\rho_s$  (fig. 1.1).

Câmpul electric determinat de sfera încărcată uniform cu sarcină electrică prezintă simetrie sferică. Astfel, liniile de câmp sunt radiale și valoarea intensității câmpului este aceeași în fiecare punct de pe suprafața unei sfere concentrice cu sfera încărcată cu sarcină electrică. În acest caz se poate aplica teorema lui Gauss, alegând suprafața închisă  $\Sigma$  de formă sferică, de rază curentă  $R$ , concentrică cu sfera.

Pentru punctele din exteriorul sferei avem:

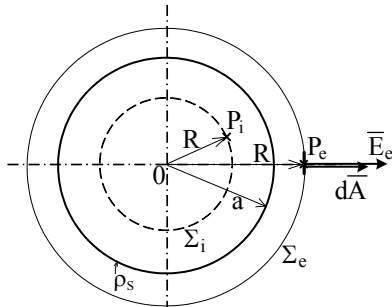


Fig. 1.1.

$$\oint_{\Sigma_e} \bar{E} d\bar{A} = \frac{q_{\Sigma_e}}{\epsilon_0}$$

În orice punct de pe suprafața  $\Sigma_e$ , vectorii  $\bar{E}_e$  și  $d\bar{A}$  sunt colineari, astfel că produsul scalar este egal cu produsul modulelor și  $|\bar{E}_e| = \text{const.}$  (fig. 1.1),

$$\oint_{\Sigma_e} \bar{E}_e d\bar{A} = E_e \oint_{\Sigma_e} dA = E_e \cdot 4\pi R^2.$$

Sarcina  $q_{\Sigma_e}$  este sarcina din interiorul suprafeței  $\Sigma_e$ , egală cu sarcina sferei de rază  $a$ ,

$$q_{\Sigma_e} = A_{sf} \cdot \rho_s = 4\pi \cdot a^2 \cdot \rho_s.$$

Înlocuind în ecuația inițială, avem:

$$E_e \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi \cdot a^2 \cdot \rho_s}{\epsilon_0} \Rightarrow E_e = \frac{\rho_s \cdot a^2}{\epsilon_0 \cdot R^2},$$

care poate fi scrisă sub forma

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi \cdot a^2 \cdot \rho_s}{R^2} \Rightarrow \bar{E}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \cdot \bar{R}.$$

Potențialul punctelor din exteriorul sferei se calculează cu relația de definiție a potențialului, integrând de-a lungul unei linii de câmp care este radială

$$V_e = \int_{P_e}^{P_0} \bar{E}_e d\bar{s} = \int_R^{\infty} \bar{E}_e d\bar{R} = \frac{\rho_s \cdot a^2}{\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{\rho_s \cdot a^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R},$$

sau,

$$V_e = \frac{4\pi \cdot a^2 \rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R},$$

Expresiile obținute pentru intensitatea câmpului și potențial sunt identice expresiile acestor mărimi pentru o sarcină punctiformă situată în centrul sferei de valoare egală cu sarcina totală a sferei.

Calculul câmpului în interiorul sferei se face în mod similar, aplicând teorema lui Gauss suprafeței sferice  $\Sigma_i$ , concentrică cu sfera de rază  $a$  (fig.1.1)

$$\oint_{\Sigma_i} \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\Sigma_i}}{\epsilon_0}, \text{ dar cum } q_{\Sigma_i} = 0 \Rightarrow \vec{E}_i = 0.$$

Potențialul punctelor din interiorul sferei,

$$V_i = \int_{P_i}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R_i}^a \vec{E}_i \cdot d\vec{R} + \int_a^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{R} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0}$$

este constant, egal cu potențialul punctelor de suprafața sferei.

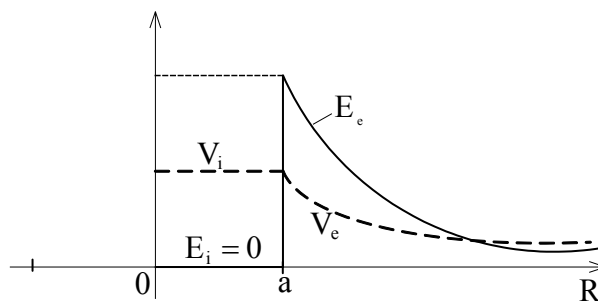


Fig. 1.2.

1.1.2. Să se calculeze câmpul și potențialul produs în vid de un conductor drept, filiform, infinit lung, încărcat uniform cu densitatea de sarcină  $\rho_l$ .

În cazul conductorului drept, infinit lung, încărcat uniform cu sarcină electrică, liniile de câmp sunt radiale, situate în plane perpendiculare pe conductor. Câmpul prezintă simetrie cilindrică, astfel că se poate aplica teorema lui Gauss, alegând suprafața închisă  $\Sigma$  de formă cilindrică, coaxială cu conductorul ca în figura 1.3.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}_v \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon_0},$$

Integrala este nulă pe suprafețele bazelor cilindrului deoarece vectorii  $\vec{E}_v$  și  $d\vec{A}$  sunt perpendiculari pe aceste suprafețe. Integrala din membrul stîng se reduce la suprafața laterală  $S_l$  a cilindrului  $\Sigma$  unde vectorii  $\vec{E}_v$  și  $d\vec{A}$  sunt colineari,

$$\int_{S_l} \vec{E}_v \cdot d\vec{A} = E_v \int_{S_l} dA = 2\pi R l \cdot E_v.$$

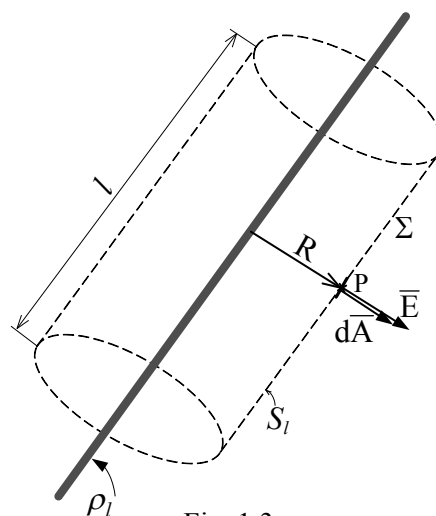


Fig. 1.3.

Sarcina electrică  $q_{\Sigma}$  este sarcina conductorului pe lungimea  $l$ ,  $q_{\Sigma} = \rho_l l$ . Înlocuind în ecuația inițială, se obține:

$$2\pi R l \cdot E_v = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0} \Rightarrow E_v = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \quad \text{respectiv, vectorial} \quad \vec{E}_v = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^2}.$$

Potențialul într-un punct oarecare P se calculează cu relația de definiție, integrând după o linie de câmp,

$$V(P) = \int_P^{P_0} \vec{E}_v \cdot d\vec{s} = \int_{R_0}^R E_v \cdot dR = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_0}^R \frac{dR}{R} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R},$$

numit potențial logaritmic.

Pentru două conductoare drepte  $C_1, C_2$  (fig. 1.4) paralele, infinit lungi, încărcate cu sarcini egale și de semn contrar  $+\rho_l$  și  $-\rho_l$  se aplică principiul suprapunerii efectelor:

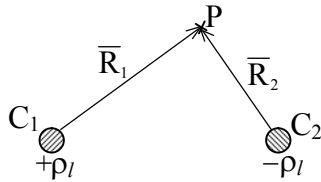


Fig. 1.4.

$$\vec{E}_v(P) = \vec{E}_{v1}(P) + \vec{E}_{v2}(P) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{R}_1}{R_1^2} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^2} \right),$$

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln \frac{R_0}{R_1} - \ln \frac{R_0}{R_2} \right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

1.1.3. Să se determine câmpul și potențialul produs în vid de un plan infinit extins, încărcat uniform cu densitatea de sarcină  $\rho_s$ .

Se aplică principiul suprapunerii efectelor: un element de suprafață  $dA$  din plan, care în coordonate polare este de arie  $dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$  (fig. 1.5), cu sarcina elementară

$$dq = \rho_s dA = \rho_s \rho d\rho d\theta,$$

determină în punctul P la distanța R, câmpul elementar

$$d\vec{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

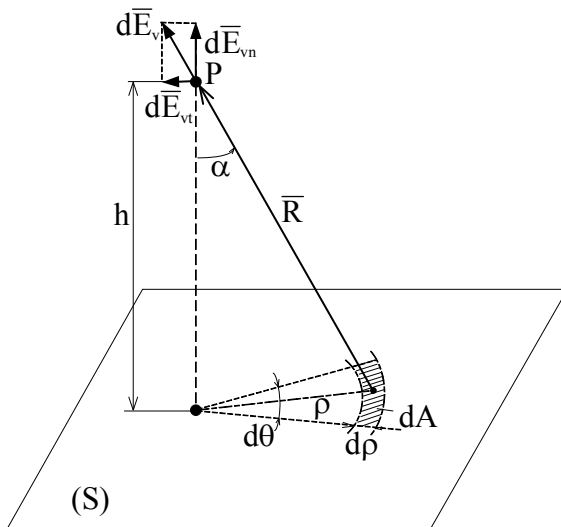


Fig. 1.5.

cu componentele  $d\vec{E}_{vn}$  după direcția normală și  $d\vec{E}_{vt}$  paralelă la suprafața suprafața planului. Este evident că, în orice punct din afara planului, câmpul este produs numai de componenta normală:

$$dE_{vn} = dE_v \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cos \alpha \frac{\rho_s \rho d\rho d\theta}{R^2}$$

$$E_v = E_{vn} = \int_S dE_{vn} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \cos \alpha \frac{\rho d\rho d\theta}{R^2}$$

Se aleg ca variabile de integrare unghiurile  $\alpha$  și  $\theta$ . Din fig. 1.5, se poate scrie,

$$\rho = h \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow d\rho = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad \frac{h}{R} = \cos \alpha.$$

și înlocuind, rezultă:

$$E_v = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \cos \alpha \frac{h \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{d^2} d\alpha d\theta = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sin \alpha d\alpha d\theta$$

$$E_v = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}.$$

Se constată că intensitatea câmpului nu depinde de distanța  $h$  față de plan. În concluzie, în cazul unui plan considerat infinit extins, încărcat uniform cu sarcină electrică, câmpul electric uniform, orientat după direcția normală la plan.

Potențialul electric într-un punct oarecare, la distanța  $h$  de suprafața planului este

$$V_{(P)} = \int_P^{P_0} \bar{E} d\bar{s} = \int_h^{h_0} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} dh = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} (h_0 - h).$$

Dacă se consideră punctele de referință  $P_0$  de potențial nul situate în plan,

$$V = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} h.$$

1.1.4. Să se determine câmpul și potențialul produs de un conductor drept, filiform, de lungime finită, încărcat uniform cu densitatea de sarcină  $\rho_l$ .

Se aplică și în acest caz principiul superpoziției. Elementul de lungime  $ds$  produce în punctul  $M$  câmpul elementar (fig. 1.6),

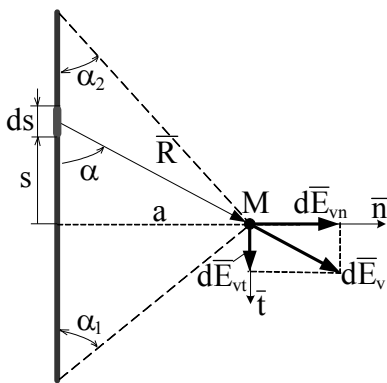


Fig. 1.6.

$$d\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l ds}{R^2} \cdot \frac{\bar{R}}{R},$$

care poate fi descompus în componentele normală, respectiv tangențială (paralelă) la conductor:

$$dE_{vn} = dE_v \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l ds}{R^2} \sin \alpha,$$

$$dE_{vt} = dE_v \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l ds}{R^2} \cos \alpha.$$

Se alege unghiul  $\alpha$  variabilă de integrare și înlocuind,

$$s = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad ds = -\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha \quad \text{și} \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin \alpha}{a}$$

se obține:

$$dE_{vn} = \frac{-\rho_l}{4\pi\epsilon_0 \cdot a} \sin \alpha d\alpha, \quad \text{respectiv} \quad dE_{vt} = \frac{-\rho_l}{4\pi\epsilon_0 n} \cos \alpha d\alpha.$$

$$E_{vn} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

$$E_{vt} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$

$$E_v = \sqrt{E_{vn}^2 + E_{vt}^2} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2 + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2} =$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 [1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

*Cazuri particulare*

- pe mediatoarea conductorului,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,

$$E_v = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \cos\alpha = E_{vn}, \quad E_{vt} = 0.$$

- conductor infinit lung,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,

$$E_v = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} = E_{vn}, \quad E_{vt} = 0.$$

- la unul din capete,  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_2 = \alpha$

$$E_v = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2 \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right]} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$E_{vn} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \cos\alpha, \quad E_{vt} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} (1 - \sin\alpha).$$

Potențialul în punctul M:

$$V_{(M)} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{ds}{R} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}} \right).$$

1.1.5. Să se calculeze forța de interacțiune dintre două fire rectilinii, paralele, de lungime  $l$ , situate în vid la distanța  $a$  unul față de altul, având densitățile lineice de sarcină  $\rho_{l1}$  și  $\rho_{l2}$ .

Asupra unui element de lungime  $dx$  din firul ② cu sarcina  $dq_2 = \rho_{l2} dx$  (fig. 1.7) se va exercita forța  $d\vec{F}_{12} = dq_2 \vec{E}_{v12}$  cu componentele:

$$dF_{12n} = \rho_{l2} E_{vn12} dx, \quad dF_{12t} = \rho_{l2} E_{vt12} dx$$

Se utilizează rezultatele de la problema anterioară. Astfel, componentele câmpului creat de firul ① în punctele unde este plasat firul ② se știu:

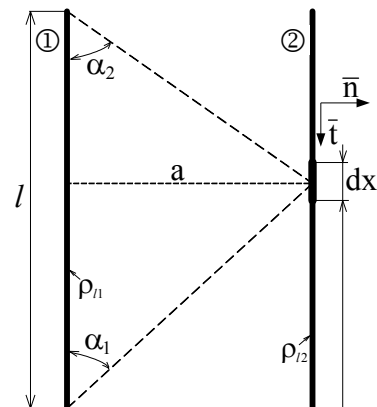


Fig. 1.7.

$$E_{vn12} = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 a} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} \right];$$

$$E_{vt12} = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 a} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = \frac{\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 a} \left[ \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} \right].$$

Componentele forței ce acționează asupra firului ② se determină astfel:

$$F_{n12} = \int_0^l dF_{12n} = \frac{\rho_{l2} \rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^l \left[ \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} dx \right] =$$

$$= \frac{\rho_{l2} \rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ \sqrt{a^2 + x^2} \Big|_0^l - \sqrt{a^2 + (l-x)^2} \Big|_0^l \right] = \frac{\rho_{l2} \rho_{l1} l}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}} - \frac{a}{l} \right];$$

$$F_{t12} = \int_0^l dF_{12t} = \frac{\rho_{l2} \rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^l \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} dx \right] =$$

$$= \frac{\rho_{l2} \rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ \ln \left| x + \sqrt{a^2 + (l-x)^2} \right| \Big|_0^l + \ln \left| l-x + \sqrt{a^2 + (l-x)^2} \right| \Big|_0^l \right] = 0.$$

Forța este normală pe conductoare și determină respingerea firelor dacă sarcinile au același semn,  $\rho_{l1} \cdot \rho_{l2} > 0$ . Forța specifică (pe unitatea de lungime):

$$f_{12} = \frac{F_{12n}}{l} = \frac{\rho_{l1} \cdot \rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0 a} \left( \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2}} - \frac{a}{l} \right).$$

Dacă firele sunt infinit lungi ( $l \rightarrow \infty$ ) sau  $l \gg a$ ,

$$f_{12\infty} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{l1} \cdot \rho_{l2}}{a}.$$

1.1.6. Să se determine intensitatea câmpului electric într-un punct oarecare de pe axa unei spire circulare de rază  $a$  situată în vid, încărcată uniform cu densitatea de sarcină lineică  $\rho_l$ .

Din motive de simetrie, vectorul  $\vec{E}$  într-un punct P de pe axa Ox nu are decât componenta în lungul axei,  $d\vec{E}_x = d\vec{E} \cos \alpha$  (fig. 1.8). Un element de lungime  $ds$  al spirei determină în punctul P de pe axa spirei câmpul elementar

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l ds}{R^2}.$$

Utilizând relațiile,  $ds = a d\theta$ ,  $R^2 = a^2 + x^2$ , avem

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l a d\theta}{a^2 + x^2} \cdot \cos \alpha.$$

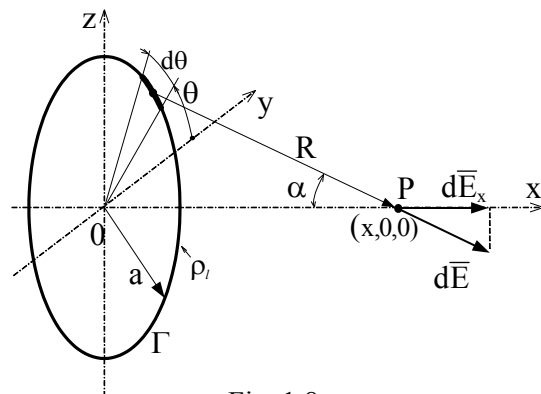


Fig. 1.8.



Se înlocuiește  $\cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$  și obținem

$$dE_x = \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} d\theta$$

Prin integrare după unghiul  $\theta$ , se obține

$$\bar{E} = \bar{i} \cdot E_x = \bar{i} \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \bar{i}$$

Potențialul se calculează mai simplu cu relația

$$V_{(p)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Gamma} \frac{\rho_l ds}{R} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Intensitatea câmpului se mai poate calcula utilizând gradientul de potențial,

$$\bar{E} = \bar{E}_x = -grad V = -\frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} = \frac{\rho_l a}{2\epsilon_0} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \bar{i}$$

## 1.2. CALCULUL CAPACITĂȚILOR ELECTRICE

### 1.2.1. BREVIAR DE CALCUL AL CAPACITĂȚILOR ELECTRICE

#### ❶ Capacitatea electrică.

Pentru condensatorul cu dielectric liniar, omogen și izotrop la care armăturile se încarcă cu sarcini electrice egale și de semne opuse, teorema capacității electrice se enunță astfel: *raportul pozitiv dintre sarcina electrică a uneia dintre armături  $q_1(q_2)$  prin diferența de potențial față de cealaltă armătură  $V_1 - V_2$  ( $V_2 - V_1$ ), este independent de valorile sarcinii sau diferenței de potențial și se numește capacitate electrică  $C$ :*

$$C = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{q_2}{V_2 - V_1} \quad \text{sau} \quad C = \frac{q_1}{U_{12}} = \frac{q_2}{U_{21}} \quad (1.27)$$

unde  $U_{12} = V_1 - V_2$ , respectiv  $U_{21} = V_2 - V_1$  este tensiunea dintre armături. Cum  $q_1 = -q_2 = q$ , se poate scrie mai simplu:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (1.28)$$

În figura 1.9 se prezintă simbolurile grafice utilizate pentru condensatoare, astfel: fig. 3.1,a) pentru condensatorul de curent alternativ (nepolarizat), iar în fig. 3.1,b) pentru condensatorul de curent continuu (polarizat).

Unitatea de măsură a capacității electrice se numește Farad (F). În sistemul internațional de unități de măsură (S.I.), *un farad este capacitatea unui condensator care la tensiunea de 1V între armături se încarcă cu sarcina de 1C.*

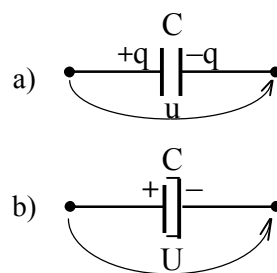


Fig. 1.9.

În practică se utilizează submultiplii faradului:

- microfaradul,  $1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$ ;
- nanofaradul,  $1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$ ;
- picofaradul,  $1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$ .

Calculul capacităților condensatoarelor simple se face în următoarele etape:

1) se presupun armăturile încărcate cu sarcini egale și de semn contrar:

$$q_1 = q, q_2 = -q;$$

2) se calculează intensitatea câmpului electric  $E$  într-un punct oarecare dintre armăturile condensatorului;

3) se calculează potențialele armăturilor  $V_1, V_2$  sau tensiunea electrică dintre armături,

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s};$$

4) se calculează capacitatea condensatorului cu relația de definiție,  $C = \frac{q}{U}$ .

Ca exemplu se prezintă **calculul capacității condensatorului plan idealizat**.

Un condensator plan este format din două armături plane paralele de arie  $A$ , care sunt așezate la distanța  $d$ , mică față de dimensiunile plăcilor; între plăci se găsește un dielectric de permitivitate  $\epsilon$  (fig. 1.10). Se consideră cazul în care dielectricul este liniar, izotrop și omogen, iar liniile de câmp electric sunt perpendiculare pe suprafața armăturilor. Un astfel de condensator plan este numit *condensator plan idealizat*.

Etapele de calcul sunt:

- se consideră  $q_1 = q, q_2 = -q$ ;
- intensitatea câmpului electric între armături se poate determina utilizând legea fluxului electric sub forma

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon}$$

unde  $\Sigma$  este o suprafața închisă care îmbracă strâns una dintre armături. Rezultă astfel  $E = \frac{q}{\epsilon \cdot A}$ ;

- tensiunea între armături este

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \int_1^2 \frac{q}{\epsilon A} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon A} d.$$

Expresia capacității condensatorului plan este

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{\epsilon A}{d}. \quad (1.29)$$

Dacă dielectricul este constituit din  $n$  straturi paralele cu armăturile având grosimile  $d_k$  și permitivitățile  $\epsilon_k$  (fig. 1.11), câmpul electric în stratul  $k$  fiind

$$E_k = \frac{\rho}{\epsilon_k} = \frac{q}{\epsilon_k A},$$

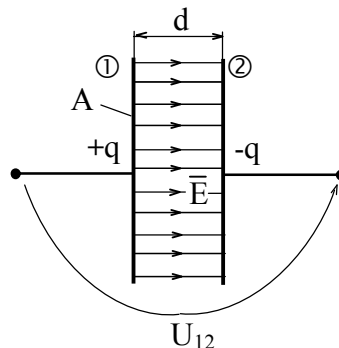


Fig.1.10.

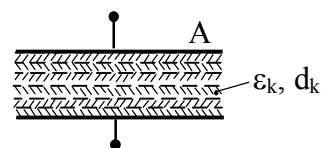


Fig. 1.11.

diferența de potențial dintre armături rezultă

$$V_1 - V_2 = \sum_{k=1}^n \int_1^2 \vec{E}_k \cdot d\vec{s}_k = \frac{q}{A} \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\epsilon_k}.$$

Expresia capacității condensatorului plan cu dielectric neomogen rezultă:

$$C = \frac{A}{\sum_{k=1}^n \frac{d_k}{\epsilon_k}}. \quad (1.30)$$

## 2 Calcul rețelelor de condensatoare

**Capacitatea echivalentă**  $C_e$  a unui sistem de condensatoare este dată de raportul dintre sarcina absorbită de la sursă pe la una din borne și tensiunea sursei, dacă inițial toate condensatoarele erau descărcate.

Capacitatea echivalentă a condensatoarelor conectate în serie:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (1.31)$$

Cazuri particulare:

- pentru două condensatoare  $C_1, C_2$  conectate în serie,  $C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$  ;

- pentru  $n$  condensatoare de aceeași capacitate  $C_e = \frac{C}{n}$ .

Capacitatea echivalentă a condensatoarelor conectate în paralel:

$$C_e = \sum_{k=1}^n C_k. \quad (1.32)$$

**Transfigurări stea – triunghi / triunghi – stea** (fig. 1.12)

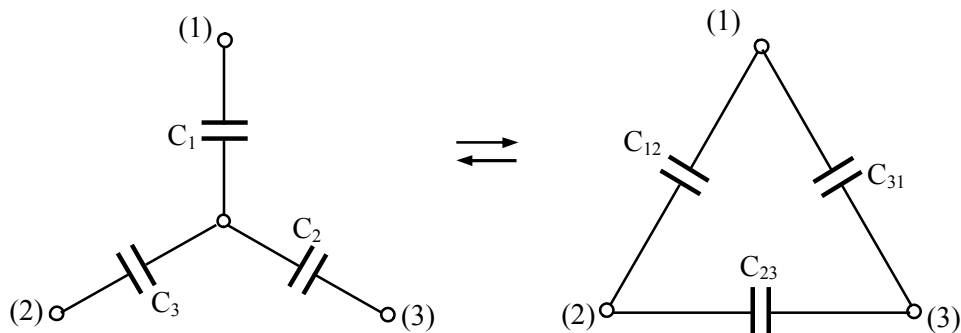


Fig. 1.12.

La transfigurarea **stea – triunghi**, calculul capacităților circuitului echivalent în triunghi se face cu relațiile [12]:

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad C_{23} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad C_{31} = \frac{C_3 \cdot C_1}{C_1 + C_2 + C_3}. \quad (1.33)$$

La transfigurarea **triunghi – stea**, calculul capacităților circuitului echivalent în stea se face cu relațiile [12]:

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12}C_{31}}{C_{23}}; \quad C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{31}}; \quad C_3 = C_{23} + C_{31} + \frac{C_{23}C_{31}}{C_{12}}. \quad (1.34)$$

**Teoremele lui Kirchhoff** pentru rețele de condensatoare.

Analog teoremelor lui Kirchhoff pentru rețelele electrice avem relații de calcul pentru rețele de condensatoare în regim electrostatic.

Astfel, corespunzător teoremei a I-a Kirchhoff, suma algebrică a sarcinilor  $q_j$  ale armăturilor condensatoarelor legate la un nod ( $k$ ) al unei rețele de condensatoare este egală cu suma algebrică a sarcinilor inițiale  $q_{j0}$  ale acestor armături:

$$\sum_{j \in (k)} q_j = \sum_{j \in (k)} q_{j0}. \quad (1.35)$$

Corespunzător teoremei a II-a Kirchhoff, pentru un ochi al unei rețele de condensatoare, suma algebrică a tensiunilor la bornele condensatoarelor este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor din laturile ochiului respectiv:

$$\sum_{j \in [m]} U_{C_j} = \sum_{j \in [m]} U_{E_j} \quad (1.36)$$

sau

$$\sum_{j \in [m]} \frac{q_{C_j}}{C_j} = \sum_{j \in [m]} U_{E_j}. \quad (1.37)$$

## 1.2.2. Aplicații

1.2.1. Să se determine capacitatea condensatorului cilindric, reprezentat în figura 1.13. Condensatorul este format din două armături cilindrice circulare, concentrice, de raze  $R_i$  și  $R_e$ , de lungime  $l$ . Între armături există un dielectric cu permitivitatea  $\epsilon$ .

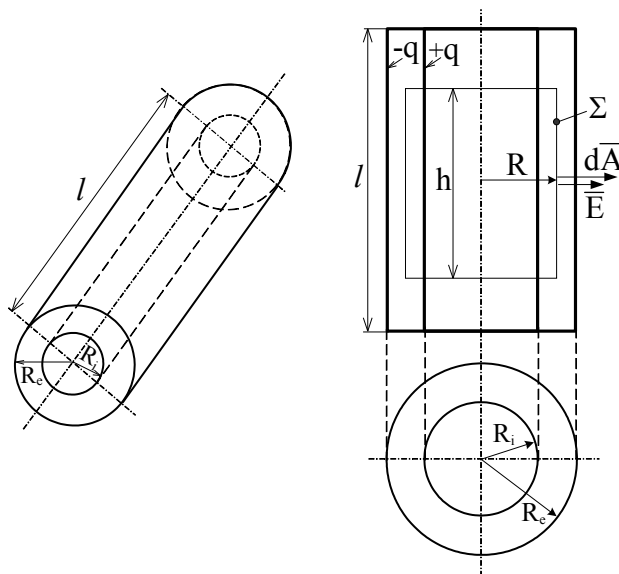


Fig. 1.13.

Se presupune că  $(R_e - R_i) \ll l$  ceea ce permite să se considere sistemul cu simetrie cilindrică și astfel câmpul electric dintre armături poate fi aproximat cu un câmp radial, omogen, neglijând efectul de margine.

*Etapele de calcul:*

1. Se presupun armăturile încărcate cu sarcini egale și de semn contrar,

$$q_i = +q, \quad q_e = -q$$

2. Câmpul electric dintre armături este radial și prezintă simetrie cilindrică. Se aplică legea fluxului electric unei suprafețe închise  $\Sigma$

cilindrică, de rază  $R$ ,  $R_i \leq R \leq R_e$ , concentrică cu armăturile,

$$\oint_{\Sigma} \bar{D} \, d\bar{A} = q_{\Sigma}, \quad \bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}, \quad \oint_{\Sigma} \bar{E} d\bar{A} = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon}.$$

Pe suprafața laterală a cilindrului  $\Sigma$ ,  $\bar{E}$  și  $d\bar{A}$  sunt omoparaleli,  $E = \text{const}$ , iar pe baze  $\bar{E}$  și  $d\bar{A}$  sunt ortogonali ( $\bar{E} \perp d\bar{A}$ ). Rezultă astfel:

$$\oint_{\Sigma} \bar{E} d\bar{A} = \int_{S_l} \bar{E} d\bar{A} = E \int_{S_l} dA = 2\pi R h \cdot E$$

$$q_{\Sigma} = \int_{S_l} \rho_s dA = \frac{q}{2\pi R_i l} \int_{S_l} dA = \frac{q}{2\pi R_i l} \cdot 2\pi R_i h = q \frac{h}{l};$$

$$2\pi R h \cdot E = q \frac{h}{l \varepsilon} \Rightarrow \bar{E} = \frac{q}{2\pi \varepsilon l R} \cdot \frac{\bar{R}}{R}.$$

3. Se calculează tensiunea electrică dintre armături:

$$U_{12} = \int_1^2 \bar{E} d\bar{s} = \int_{R_i}^{R_e} E dR = \frac{q}{2\pi \varepsilon l} \int_{R_i}^{R_e} \frac{dR}{R} = \frac{q}{2\pi \varepsilon l} \ln \frac{R_e}{R_i}$$

4. Se calculează capacitatea condensatorului,

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{R_e}{R_i}}$$

Exemplu clasic de condensator cilindric este cablul coaxial. În practică se utilizează relația care dă capacitatea specifică în  $\mu\text{F}/\text{km}$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{4\pi 9 \cdot 10^9} \text{ F/m} = \frac{\varepsilon_r \cdot 10^6 \cdot 10^3}{4\pi 9 \cdot 10^9} \mu\text{F/km} = \frac{\varepsilon_r}{36\pi} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}},$$

$$C' = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln \frac{R_e}{R_i}} = \frac{\varepsilon_r}{18 \ln \frac{R_e}{R_i}} \mu\text{F/km}.$$

În cazul unui condensator cilindric cu  $n$  straturi de dielectric, pentru stratul dintre suprafețele de raze  $R_k$  și  $R_{k+1}$ , având permitivitatea  $\varepsilon_k$  și lungimea  $l_k$  avem,

$$E_k = \frac{q}{2\pi \varepsilon_k l_k R}, \quad R_k \leq R \leq R_{k+1}, \quad U_{12} = \sum_{k=1}^n \int_{R_k}^{R_{k+1}} \bar{E}_k d\bar{R} = \frac{q}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon_k l_k} \ln \frac{R_{k+1}}{R_k}$$

și rezultă

$$C = \frac{2\pi}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\varepsilon_k l_k} \ln \frac{R_{k+1}}{R_k}}$$

Se observă că intensitatea câmpului din fiecare strat este invers proporțională cu  $\varepsilon_k, l_k, R$ . Pentru a uniformiza câmpul electric se pot modifica fie  $\varepsilon_k$ , fie  $l_k$ . Aceasta este necesar în cazul executării unor izolații cu straturi de dielectric sub formă de coji cilindrice, ca de exemplu la trecerea unei bare conductoare sub tensiune printr-un perete. În acest caz straturile de dielectric au lungimi diferite, între straturi fiind introdusă o foaie metalizată. Dacă dielectricul este același, condiția de uniformizare a câmpului se va pune pentru valorile maxime.

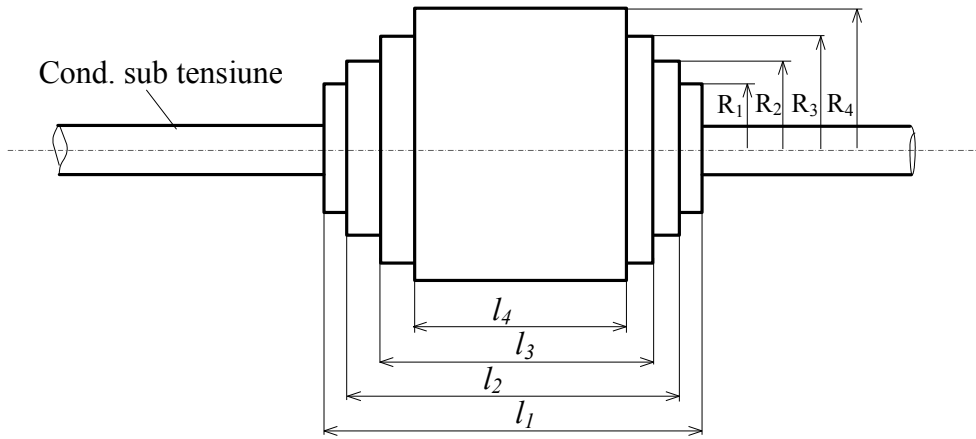


Fig. 1.14.

Considerând exemplul din fig. 1.14 pentru o izolație cu 4 straturi, avem:

$$E_{1\max} = E_{2\max} = E_{3\max} = E_{4\max} \Rightarrow R_1 l_1 = R_2 l_2 = R_3 l_3 = R_4 l_4,$$

deoarece,  $E_{k\max} = \frac{q}{2\pi\epsilon R_k l_k}$  pentru  $R = R_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

1.2.2. Să se determine capacitatea condensatorului sferic reprezentat în fig. 1.15.

Condensatorul este format din două armături sferice concentrice, de raze  $R_i$  și  $R_e$  (fig. 1.15).

Etapele de calcul:

- 1)  $q_1 = q, q_2 = -q$ ;
- 2) Câmpul electric este radial, cu simetrie sferică. Se aplică legea fluxului electric alegând suprafața închisă  $\Sigma$  sferică, concentrică cu armăturile, de rază  $R_i \leq R \leq R_e$ :

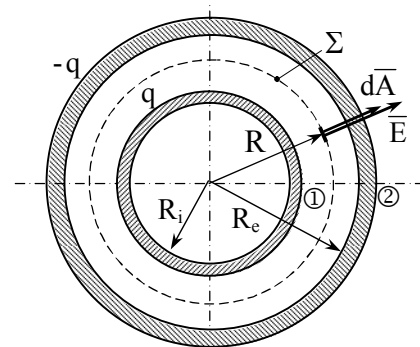


Fig. 1.15.

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon}, \quad q_{\Sigma} = q_1 = q.$$

Pe suprafața  $\Sigma$  vectorii  $\vec{E}$  și  $d\vec{A}$  sunt omoparaleli,  $E = \text{const.}$ ,

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{A} = E \oint_{\Sigma} dA = 4\pi R^2 E \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R^2};$$

$$3) U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{R_i}^{R_e} \frac{dR}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e} \right);$$

$$4) C = \frac{q}{U_{12}} = 4\pi\epsilon \frac{R_i R_e}{R_e - R_i}.$$

Dacă  $R_e \rightarrow \infty$ , se obține expresia capacității unei sfere conductoare izolate.

$$C = 4\pi\epsilon \cdot R_i.$$

Pentru a obține capacitatea  $C = 1\text{F}$  rezultă:  $R_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\text{m}$  mult mai mare decât raza pământului ( $6.371 \cdot 10^6\text{m}$ )

1.2.3. Să se determine sarcinile condensatoarelor din circuitul reprezentat în fig. 2.6, în următoarele două situații:

- a)  $K_2$  se închide,  $K_1$  închis pe poziția ① ;
- b) se comută  $K_1$  pe poziția ②.

Cazul a). Schema circuitului este prezentată în figura 1.17,a). Rețeaua are 3 noduri și 2 ochiuri. Sarcinile pot fi determinate din sistemul de ecuații corespunzător celor două teoreme ale lui Kirchhoff.

T1K:

$$(1) -q_1 - q_3 + q_4 = 0$$

$$(2) q_1 + q_2 - q_4 = 0$$

T2K:

$$[1] \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} = E_1$$

$$[2] \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = E_2$$

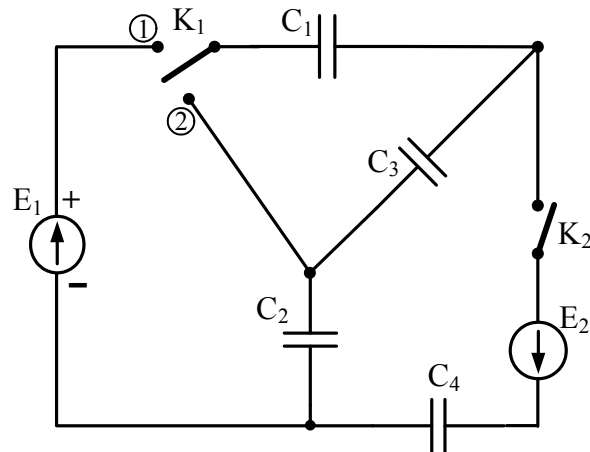


Fig. 1.16.

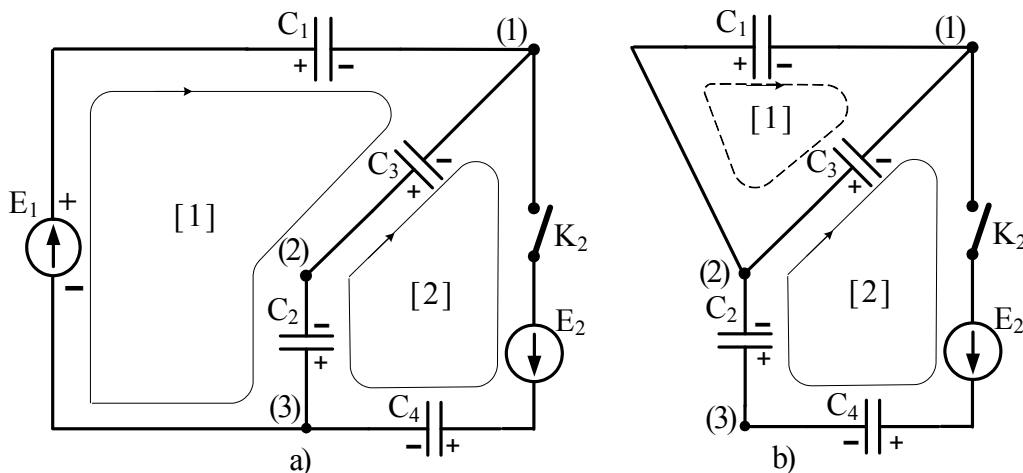


Fig. 1.17.

Se rezolvă sistemul de ecuații și se determină sarcinile  $q_1, q_2, q_3, q_4$  care vor fi sarcini inițiale pentru cazul b);

Cazul b). Schema circuitului este cea din figura 1.17,b). Ecuațiile corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff se scriu ținând cont că în acest caz condensatoarele erau încărcate cu sarcinile inițiale stabilite în cazul anterior.

T1K: (1)  $-q'_1 - q'_3 + q'_4 = -q_1 - q_3 + q_4$  ;

(2)  $q'_1 - q'_2 + q'_3 = q_1 - q_2 + q_3$ .

T2K [1]  $\frac{q'_1}{C_1} - \frac{q'_3}{C_3} = 0;$

[2]  $\frac{q'_2}{C_2} + \frac{q'_3}{C_3} + \frac{q'_4}{C_4} = E_2$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații se determină sarcinile  $q'_1, q'_2, q'_3, q'_4$ .

1.2.4. Se consideră cinci condensatoare  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  grupate ca în fig. 1.18. Între bornele A și B se aplică diferența de potențial  $V_A - V_B$ . Se cere:

a) Să se determine condiția ca diferența de potențial la bornele condensatorului  $C_5$  să fie nulă;

b) Să se calculeze sarcina electrică adevărată cu care se încarcă condensatorul  $C_5$  dacă se dau:  $C_1 = 100\text{pF}; C_2 = 200\text{pF}; C_3 = 300\text{pF}; C_4 = 400\text{pF}; C_5 = 100\text{pF}; V_A - V_B = 100\text{V}$ .

Se pot scrie următoarele relații:

$$-q_1 + q_3 + q_5 = 0;$$

$$-q_2 + q_4 - q_5 = 0;$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} = V_A - V_B;$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_2}{C_2} = 0;$$

$$\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0,$$

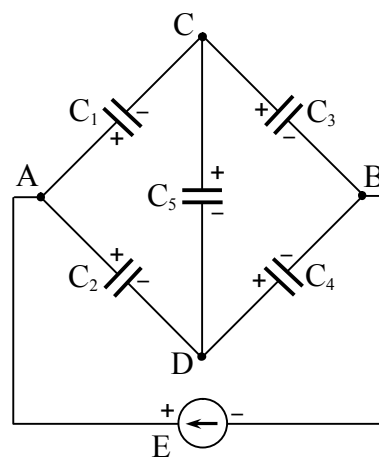


Fig. 1.18.

din care se deduce:

$$q_5 = \frac{C_5(C_1C_4 - C_2C_3)}{C_5(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) + (C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}(V_A - V_B)$$

Pentru cazul a) trebuie satisfăcută condiția

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4},$$

relație care este independentă de  $C_5$ .

Pentru cazul b) rezultă  $q = -\frac{10^{-8}}{17} \text{C}$ .

1.2.5. Patru condensatoare identice sunt legate ca în fig. 1.19 și sunt conectate la bateria B. În primul caz întrerupătorul  $K_2$  este deschis, iar întrerupătorul  $K_1$  închis. În al doilea caz întrerupătorul  $K_1$  se deschide, iar întrerupătorul  $K_2$  este închis. Se cere să se calculeze diferența de potențial la bornele fiecărui condensator, știind că diferența de potențial la bornele bateriei B este de 9 V.

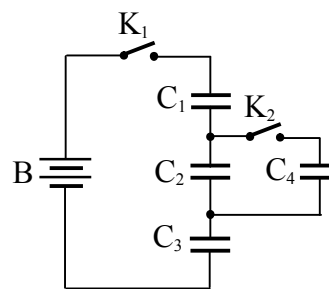


Fig.1.19.

Fie C capacitatea fiecărui condensator. Diferența de potențial la bornele condensatorului  $C_1, C_2$  sau  $C_3$  este



$V' = 3V$ , iar sarcina fiecăruia  $q' = CV'$ , atât timp cât se respectă primul caz. În al doilea caz, sarcina  $q'$  a condensatorului  $C_2$  se împarte în părți egale între condensatoarele  $C_2$  și  $C_4$ ;  $q'' = 1/2q' = 1/2CV'$ , în timp ce sarcinile și diferența de potențial a celorlalte condensatoare,  $C_1$  și  $C_3$ , rămân aceleași. Diferența de potențial la bornele condensatorului  $C_2$ , care este egală cu  $C_4$ , se va micșora, datorită micșorării sarcinii de la valoarea  $q'$  la valoarea  $q''$ :

$$V'' = \frac{1}{C}q'' = \frac{1}{C} \frac{q'}{2} = \frac{1}{C} \frac{CV'}{2} = \frac{V'}{2} = 1,5V.$$

1.2.6. Se dau două condensatoare conectate ca în fig. 1.20, fiind inițial neîncărcate. Urmează încărcarea lor printr-o manevră ce constă în două etape: comutatorul  $K$  se pune mai întâi pe poziția ① și apoi se trece repede pe poziția ②. Se cere să se calculeze tensiunea la bornele condensatoarelor și sarcina acestora după  $n$  manevre complete.

Se observă că, de fiecare dată, pe poziția ① condensatorul  $C_1$  se încarcă la sarcina  $q_0 = C_1U_0$ . Dacă notăm  $U^{(k)}$  tensiunea comună la bornele celor două condensatoare, după terminarea manevrei  $k$ , din legea conservării sarcinii electrice rezultă:

$$q_e^{(k)} = q_0 + q_2^{(k-1)}$$

sau

$$U^{(k)} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + U^{(k-1)} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

dacă se are în vedere că pe poziția ② cele două condensatoare se află în paralel.

Scriem relația (1) pentru  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , ținând seamă că  $U^{(0)} = 0$ :

$$\begin{array}{l} U^{(1)} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + 0 \\ U^{(2)} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + U^{(1)} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ U^{(3)} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + U^{(2)} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ \dots \\ U^{(n)} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + U^{(n-1)} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ \frac{C_1 + C_2}{C_2} \\ \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^2 \\ \dots \\ \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^{n-1} \end{array} \right.$$

Înmulțim pe rând ambii membri ai egalităților respective cu  $1, \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right), \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^2, \dots, \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^{n-1}$  și adunăm membru cu membru obținem:

$$U^{(n)} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^{n-1} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \left[ 1 + \frac{C_1 + C_2}{C_2} + \dots + \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^{n-1} \right]$$

sau

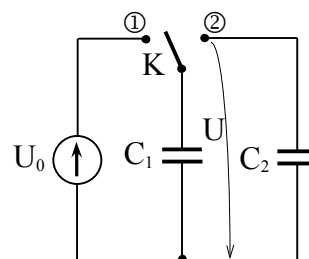


Fig.1.20.

$$U^{(n)} \cdot \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^{n-1} = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^n}{1 - \frac{C_1 + C_2}{C_2}} = \frac{U_0 C_2}{C_1 + C_2} \left[ \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right)^n - 1 \right]$$

respectiv,

$$U^{(n)} = U_0 \left[ 1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^n \right].$$

$$q_1^{(n)} = C_1 U^{(n)}; \quad q_2^{(n)} = C_2 U^{(n)}.$$

Se observă că,  $\lim_{n \rightarrow \infty} U^{(n)} = U_0$ .

### 1.3. CALCULUL CÂMPULUI ELECTROSTATIC CU METODA IMAGINILOR ELECTRICE

#### 1.3.1. METODA IMAGINILOR ELECTRICE

Metoda imaginilor electrice este o metodă de calcul indirect a câmpului electric dintr-un domeniu dat pe baza observației că acest câmp nu se modifică dacă se mențin condițiile sale de unicitate. Practic se urmărește ca anumite conductoare la care este limitat domeniul, sau un mediu dielectric înconjurător domeniului, să se înlocuiască – cu menținerea condițiilor de unicitate – printr-un dielectric omogen în care sunt plasate corpuri punctuale sau filiforme uniform încărcate cu sarcini electrice. O astfel de menținere a condițiilor de unicitate este posibilă doar în unele cazuri particulare în care intervin simetrii.

Condițiile de unicitate care determină în mod univoc câmpul electric într-un domeniu  $D_\Sigma$  limitat de o suprafață închisă  $\Sigma$  în care mediul este liniar și izotrop, caracterizat de o permitivitate absolută  $\epsilon$  cunoscută în fiecare punct, se referă la [ ]:

- a) *condițiile de frontieră* - potențialul sau componenta normală a inducției electrice pe suprafața  $\Sigma$  care delimitează domeniul;
- b) *“sursele” câmpului din domeniu* care pot fi:
  - sarcinile corpurilor punctuale încărcate;
  - sarcinile sau potențialele conductoarelor;
  - densitatea de volum, de suprafață sau de linie ale distribuțiilor de sarcini electrice;
  - polarizația permanentă.

Astfel, dacă într-un mediu dielectric omogen în prezența unei suprafețe conductoare  $S$  avem  $n$  sarcini punctiforme, fig. 1.21,a), același câmp electrostatic se poate stabili (pentru domeniul în care sunt plasate sarcinile inițiale) și în cazul repartiției de sarcini din fig. 1.21,b). Dacă acestea vor fi astfel alese ca valoare și astfel dispuse în spațiu, încât suprafața  $S$  să rămână echipotențială, mediul din interiorul suprafeței fiind de această dată identic cu cel din exterior. Această nouă repartiție va determina același câmp în exteriorul suprafeței  $S$ , condițiile de unicitate pentru acest câmp (potențialul suprafeței  $S$  și sarcinile punctuale) rămânând aceleași.

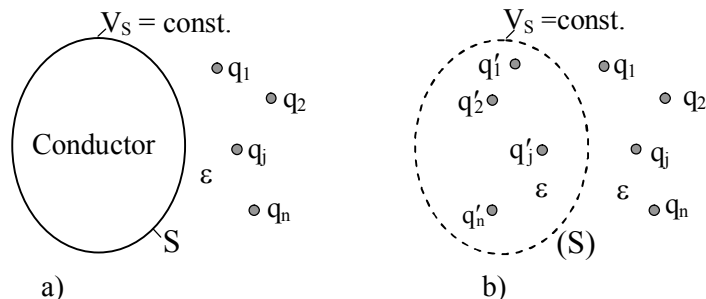


Fig. 1.21.

Sarcinile  $q'_j$  se numesc *sarcini imagine* în raport cu  $q_j$ , și invers, deoarece dacă suprafața  $S$  este un plan, acestea sunt plasate în punctul corespunzător imaginii optice într-o oglindă plană.

Se consideră, pentru exemplificare, o sarcină electrică punctiformă  $q$  situată la distanța  $d$  de un conductor plan infinit (fig. 1.22). Se consideră punctele de la infinit de potențial nul. În acest caz suprafața de discontinuitate  $S$  este suprafața conductorului. Metoda imaginilor electrice se aplică suprimând conductorul de suprafață  $S$  și extinzând la infinit domeniul dielectric de permitivitate  $\epsilon$  în care se află sarcina  $+q$ . Pentru a păstra neschimbate condițiile de frontieră (suprafața  $S$  să rămână echipotențială), se introduce sarcina fictivă  $q$ , imaginea sarcinii  $q$  față de suprafața ( $S$ ). Deci, conductorul se înlocuiește cu sarcina imagine  $-q$  situată la distanța  $d$  de suprafața conductorului ( $S$ ). Potențialul  $V$  în orice punct al domeniului dielectric de permitivitate  $\epsilon$  și câmpul electric  $E$  sunt stabilite de sarcina punctiformă  $q$  și sarcina imagine  $-q$ :

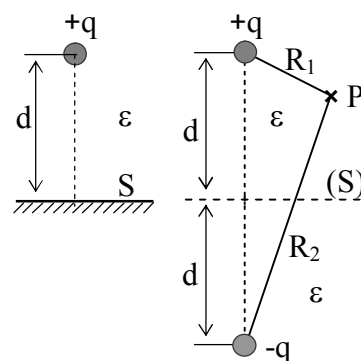


Fig. 1.22.

$$V = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right); \quad \vec{E} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left( \frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right). \quad (1.38)$$

Prin superpoziție, câmpul electrostatic din dielectricul de permitivitate constantă al unui sistem de sarcini punctiforme  $q_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) situate la distanțele  $d_k$  de semi-spaziul conductor se calculează introducând imaginile  $-q_k$  la distanțele  $-d_k$ ,

$$V = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \sum_{k=1}^n q_k \cdot \left( \frac{1}{R_{1k}} - \frac{1}{R_{2k}} \right); \quad (1.39)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \sum_{k=1}^n q_k \cdot \left( \frac{\vec{R}_{1k}}{R_{1k}^3} - \frac{\vec{R}_{2k}}{R_{2k}^3} \right).$$

În cazul unui sistem de  $n$  conductoare filiforme, drepte, infinit lungi, dispuse paralel cu semi-spaziul conductor (pământul, de exemplu) și încărcate cu sarcini distribuite

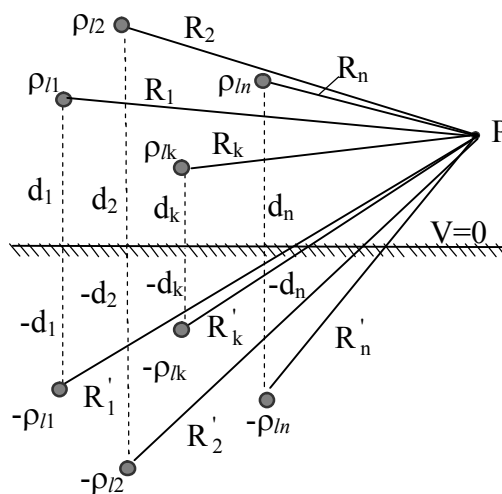


Fig. 1.23.

uniform cu densitățile  $\rho_{lk}$ , metoda imaginilor electrice se aplică similar înlocuind conductorul masiv cu conductoarele filiforme imagine încărcate uniform cu densitățile de sarcină  $-\rho_{lk}$  (fig. 1.23). Și în acest caz potențialul și câmpul electric într-un punct oarecare P din domeniul în care sunt situate conductoarele se calculează prin superpoziția potențialelor și câmpurilor create de conductoarele reale și de imaginile lor. Rezultă astfel:

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \rho_{lk} \ln \frac{R'_k}{R_k}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^n \rho_{lk} \ln \left( \frac{\vec{R}_k}{R_k^2} - \frac{\vec{R}'_k}{(R'_k)^2} \right) \quad (1.40)$$

Paralel cu cilindrul circular conductor de rază R, infinit lung, se găsește la distanța D de axa cilindrului în dielectricul de permitivitate constantă  $\epsilon$  un fir F încărcat uniform cu sarcina electrică de densitate  $\rho_l$  (fig. 1.24).

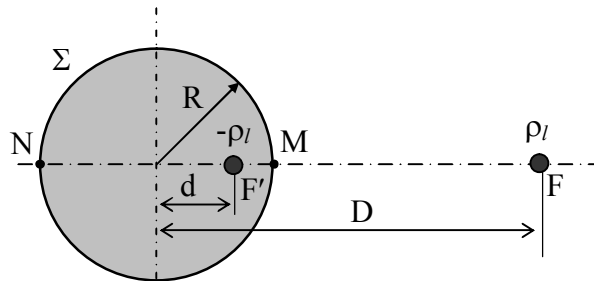


Fig. 1.24.

Pentru calculul câmpului, metoda imaginilor electrice se aplică suprimând conductorul și introducând în locul acestuia firul imagine F' încărcat uniform cu densitatea de sarcină  $-\rho_l$  și plasat la distanța d de axa cilindrului în planul format de aceasta cu firul F.

Deoarece suprafața cilindrului  $\Sigma$  este echipotențială înainte și după suprimarea conductorului, distanța d se poate calcula din condiția ca potențialele a două puncte oarecare și, în particular, a punctelor M și N de pe suprafața  $\Sigma$ , să fie egale  $V_M = V_N$ . Potențialele acestor puncte se determină prin superpoziție, fiind create de firul real F și de imaginea sa F':

$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R-d}{D-R}; \quad V_N = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R+d}{D+R}.$$

Din egalarea acestor potențiale se determină distanța d:

$$\frac{R-d}{D-R} = \frac{R+d}{D+R} \Rightarrow d = \frac{R^2}{D} \quad (1.41)$$

Distanțele firelor F și F' față de axa cilindrului satisfac o relație de inversiune, puterea de inversiune fiind egală cu pătratul razei cilindrului.



### 1.3.3. CAPACITĂȚI ÎN SERVICIU

Liniile electrice aeriene și cablurile multifilare de transmisie a energiei sau de telecomunicații funcționează în anumite condiții privind potențialele sau sarcinile electrice care le încarcă.

Capacitatea în serviciu  $C_{sjk}$  între conductoarele  $j$  și  $k$  ale unei linii sau cablu funcționând într-un anumit serviciu este raportul dintre sarcina unuia din conductoare,  $j$  sau  $k$  și diferența dintre potențialul lui și al celuilalt conductor:

$$C_{sjk} = C_{skj} = \frac{d}{V_j - V_k} = \frac{q_j}{V_k - V_j}. \quad (1.45)$$

Capacitatea în serviciu este o mărime utilă în studiul regimurilor de funcționare a liniilor sau cablurilor electrice numai dacă relația care o definește este independentă de potențialele celorlalte conductoare. În general această condiție nu este satisfăcută și îndeplinirea ei necesită existența unor relații între potențiale, precum și a unor simetrii în configurația geometrică a sistemului de conductoare.

### 1.3.4. APLICAȚII ȘI PROBLEME

1.3.1. Să se calculeze câmpul și potențialul produs de două conductoare paralele cu pământul încărcate cu sarcini egale și de semn contrar (fig. 1.25). Capacitatea în serviciu a liniei bifilare aeriene (serviciul  $q_1 + q_2 = 0$ ).

Câmpul și potențialul produs de două conductoare filiforme, paralele, infinite lungi, încărcate cu sarcinile  $+\rho_l, -\rho_l$  se calculează pe baza suprapunerii efectelor așa cum s-a arătat în paragraful 1.1.3,

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \left( \frac{\vec{R}_1}{R_1^2} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^2} \right); \quad V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Se aplică metoda imaginilor electrice eliminând pământul și introducând conductoare imagine simetrice cu conductoarele reale față de suprafața pământului, încărcate cu sarcini de semn contrar. Câmpul și potențialul într-un punct oarecare  $P$  din spațiu se determină prin contribuția perechilor de conductoare 1, 1' și 2, 2' (fig. 1.25):

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \left( \frac{\vec{r}_1}{r_1^2} + \frac{\vec{r}'_2}{r'^2_2} - \frac{\vec{r}'_1}{r'^2_1} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^2} \right);$$

$$V_P = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \left( \ln \frac{r'_1}{r_1} + \ln \frac{r_2}{r'_2} \right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r'_1 r_2}{r_1 r'_2}.$$

Pentru a determina potențialele conductoarelor 1 și 2, se deplasează succesiv punctul  $P$  pe suprafața fiecăruia dintre aceste conductoare:

$$P \in 1 \Rightarrow V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{dD}{a\sqrt{D^2 + d^2}};$$

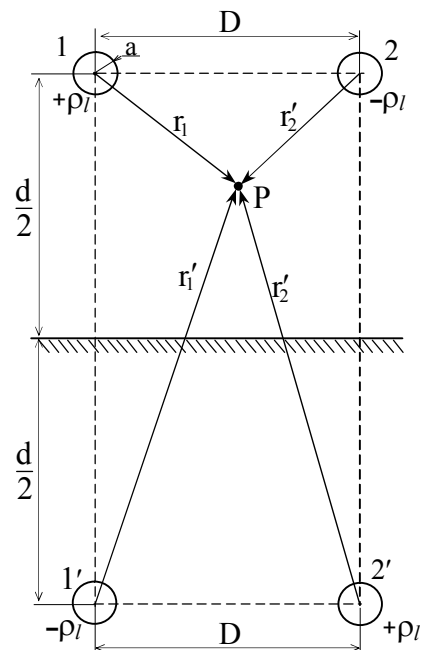


Fig. 1.25.

$$P \in 2 \Rightarrow V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a\sqrt{D^2 + d^2}}{dD}.$$

Capacitatea în serviciu a conductoarelor față de pământ este

$$C_{S10} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{\rho_l l}{\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{dD}{a\sqrt{D^2 + d^2}}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{dD}{a\sqrt{D^2 + d^2}}} = C_{S20} = C_{S0},$$

iar capacitatea în serviciu dintre conductoarele liniei bifilare este

$$C_{S12} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}}} = C_{S0} / 2.$$

În practică se utilizează capacitatea specifică dată în  $\mu\text{F}/\text{km}$ .

$$C'_{S12} = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}}} = \frac{\epsilon_r}{36 \ln \frac{dD}{R\sqrt{D^2 + d^2}}} \mu\text{F}/\text{km}.$$

1.3.2. Să se determine capacitatea pe unitatea de lungime a doi cilindri conductori foarte lungi, fig.1.26, cu axele paralele, de raze egale,  $R_1 = R_2 = a$ , distanța dintre axele lor fiind  $D > 2a$ . Cilindrii sunt situați într-un dielectric omogen de permitivitate  $\epsilon$ . Să se determine apoi:

- capacitatea pe unitatea de lungime a unei linii bifilare aeriene subțiri ( $D \gg 2a$ ), depărtate de pământ;
- capacitatea proprie față de pământ a unui cilindru gros, situat la distanța  $H = D/2$  de pământ.

Se utilizează metoda imaginilor, înlocuind cilindrii cu două fire-imagini  $F_1$  și  $F_2$ , încărcate cu sarcinile  $\rho_l$  și  $-\rho_l$  pe unitatea de lungime, plasate astfel încât suprafețele cilindrilor să rămână echipotențiale (la distanța  $x$  de axele cilindrilor respectivi).

Potențialul determinat de perechea de fire  $F_1, F_2$  într-un punct  $P$  are expresia:

$$V(P) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \rho_l \ln \frac{r_2}{r_1} + V_0, \quad (V_0 = \text{const}).$$

Suprafețele echipotențiale date de ecuațiile

$$\frac{r_2}{r_1} = \lambda = e^{\frac{2\pi\epsilon(V-V_0)}{\rho_l}}$$

sunt cilindrice, iar urmele lor în plane transversale pe cele două fire sunt cercurile lui Apollonius. Suprafețele conductoarelor reale, pot fi deci echipotențiale în câmpul imaginilor, dacă poziția acestora este convenabil aleasă.

Scriem echipotențialitatea punctelor  $A$  și  $A'$ , respectiv  $B$  și  $B'$ ,

$$\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1} \Big|_A = \frac{D-a-x}{a-x} = \frac{r_2}{r_1} \Big|_{A'} = \frac{D+a-x}{a+x},$$

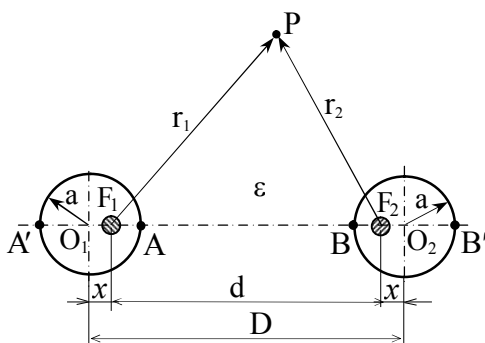


Fig. 1.26.

$$\lambda_2 = \frac{r_2}{r_1|_B} = \frac{a-x}{D-a-x} = \frac{r_2}{r_1|_{B'}} = \frac{a+x}{D+a-x} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Rezultă aceeași condiție care poate fi scrisă sub forma

$$\frac{D-x}{a} = \frac{a}{x}, \quad \lambda_1 = 1/\lambda_2 = \frac{a}{x},$$

cu soluția admisă  $x = \frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} - a^2}$  (cealaltă rădăcină nu se admite deoarece  $x > a$ ).

Potențialele celor două conductoare vor fi:

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \lambda_1 + V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2a}{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}} + V_0,$$

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \lambda_2 + V_0 = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \lambda_1 + V_0 = -V_1 + 2V_0.$$

Tensiunea dintre cei doi cilindri este

$$U_{12} = V_1 - V_2 = 2(V_1 - V_0) = \frac{1}{\pi\epsilon} \rho_l \ln \frac{2a}{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}}.$$

Capacitatea specifică (pe unitatea de lungime) a cilindrilor rezultă:

$$C_s = \frac{\rho_l}{U_{12}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{2a}{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}}},$$

iar distanța dintre firele-imagini

$$d = D - 2x = \sqrt{D^2 - 4a^2}.$$

a) În cazul liniei bifilare la mare distanță de pământ (pentru a nu considera perturbația pe care acesta o aduce câmpului celor două fire) și cu conductoare foarte subțiri ( $D \gg 2a$ ) se poate scrie:

$$D - \sqrt{D^2 - 4a^2} = D - D \sqrt{1 - \frac{4a^2}{D^2}},$$

sau dezvoltând în serie și reținând numai primii doi termeni,

$$D - \sqrt{D^2 - 4a^2} \cong D \left[ 1 - \left( 1 - \frac{4a^2}{2D^2} + \dots \right) \right] \approx \frac{2a^2}{D}.$$

Rezultă pentru capacitatea specifică a liniei:

$$C_{sa} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{D}{a}} \text{ F/m} = \frac{\epsilon_r}{36 \ln \frac{D}{a}} \mu\text{F/km}.$$



b) În cazul unui cilindru gros situat la distanța  $H = D/2$  de pământ (adică de un plan conductor), calculul efectuat ca mai sus, după introducerea a două fire-imagini, duce la aceeași expresie a potențialului (suprafața pământului fiind planul de simetrie al sistemului celor două fire). Se obține:

$$U_{12} = V_1 - V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \lambda_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2a}{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}}$$

unde  $D = 2H$ ,

$$C_{sb} = \frac{\rho_l}{U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{a}{H - \sqrt{H^2 - a^2}}}$$

Se observă că  $C_{sb} = 2C_s$ , ceea ce se explică imediat dacă se observă că, în cazul celor doi cilindri, se poate considera că se pun în serie două capacități de tipul  $C_{sb}$ .

1.3.3. Să se determine capacitatea în serviciu a unei linii bifilare de rază  $a$ , reprezentată în figura 1.27, serviciul cu  $q_1 + q_2 = 0$ .

Se cunoaște că potențialul unui punct  $P$  din apropierea unei linii aeriene monofilare, în prezența pământului este dat de relația:

$$V(P) = V_0 + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r},$$

$r'$  fiind distanța din punctul  $P$  la conductorul imagine, iar  $r$  distanța din același punct și linie. În cazul liniei bifilare din fig. 1.27, luând potențialul de referință  $V_0 = 0$  potențialul în punctul  $P$  va fi

$$V(P) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'_1}{r_1} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r'_2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'_1 r_2}{r_1 r'_2}$$

Prin deplasarea punctului  $P$  pe conductoarele 1 și respectiv 2, se obțin următoarele relații:

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2H(H-h)}{a(H+h)}, \quad V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a(H+h)}{2h(H-h)}$$

Diferența de potențial dintre conductoare va fi

$$V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{4hH(H-h)^2}{a^2(H+h)^2},$$

iar capacitatea în serviciu

$$C_{s12} = \frac{\rho_l l}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{4hH(H-h)^2}{a^2(H+h)^2}}$$

Exemplu aplicație numerică:  $l = 1,675\text{km}$ ,  $a = 1\text{cm}$ ,  $H = 6\text{m}$ ,  $h = 5\text{m}$ .

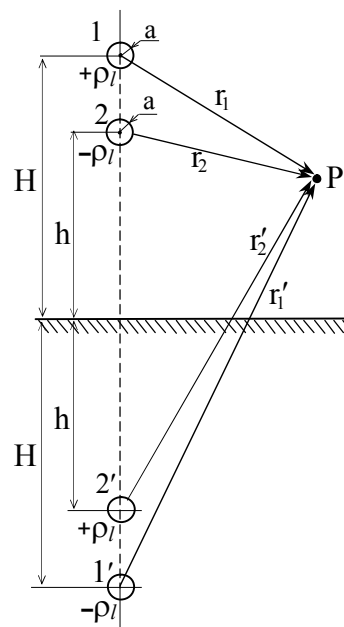


Fig. 1.27.

$\ln \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1^2}{(10^{-2})^2 \cdot 11^2} \approx 4 \cdot \ln 10 \approx 4 \cdot 2,303$  și rezultă:

$$C = \frac{2\pi \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot 1,675 \cdot 10^2}{1 \cdot 4 \cdot 2,303} = 10^{-8} \text{ F} = 0,1 \text{ nF} .$$

1.3.4. Un fir conductor de rază  $a$ , rectiliniu, este situat la distanță  $h$  deasupra pământului. Un al doilea fir conductor, de aceeași rază, rectiliniu și paralel cu primul, se găsește la înălțimea  $h$  deasupra pământului, la distanța  $D$  pe orizontală de celălalt fir (fig. 1.28). Știind că primul fir are potențialul  $V_1$  față de pământ și că cel de-al doilea conductor este izolat și are sarcina totală nulă, se cere să se calculeze potențialul  $V_2$  al celui de-al doilea conductor față de pământ.

Date numerice:

$$V_1 = 10 \text{ kV}; H = 15 \text{ m}; h = 14 \text{ m}; D = 1 \text{ m}; a = 3 \text{ mm}.$$

Se consideră  $a \ll H, h$ .

Cu ajutorul relațiilor lui Maxwell,

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 \end{cases}$$

dacă  $q_2 = 0$ , rezultă:

$$V_2 = V_1 \frac{p_{21}}{p_{11}} .$$

Coefficienții de potențial se calculează utilizând metoda imaginilor. Utilizând simetria sistemului,

$$p_{11} = \left. \frac{V_1}{q_1} \right|_{q_2=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2H}{a}; \quad p_{22} = \left. \frac{V_2}{q_2} \right|_{q_1=0} = p_{11};$$

$$p_{12} = \left. \frac{V_1}{q_2} \right|_{q_1=0} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{\sqrt{D^2 + (H+h)^2}}{\sqrt{D^2 + (H-h)^2}}; \quad p_{21} = \left. \frac{V_2}{q_1} \right|_{q_2=0} = p_{12};$$

și rezultă:

$$V_2 = V_1 \frac{p_{21}}{p_{11}} = V_1 \frac{\ln \frac{\sqrt{(H+h)^2 + D^2}}{\sqrt{(H-h)^2 + D^2}}}{\ln \frac{2H}{a}} .$$

În cazul dat la această problemă,

$$r_{12} = 29 \text{ m}; \quad r_{1'2} = 1,41 \text{ m}; \quad \ln \frac{r_{1'2}}{r_{12}} = 3,02; \quad \ln \frac{2H}{a} = 9,2 \text{ și rezultă } \underline{V_2 = 3280 \text{ V}} .$$

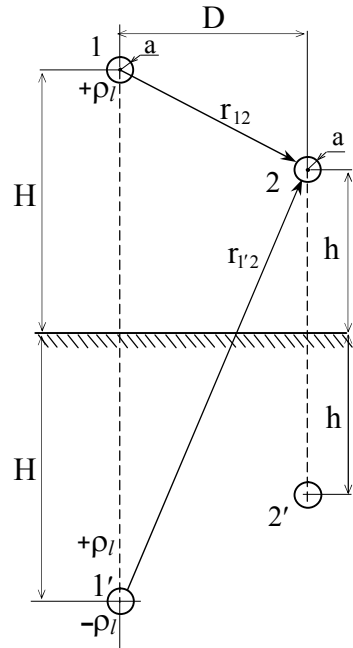


Fig. 1.28.

1.3.5. Să se determine capacitățile în serviciu ale unei linii bifilare ale cărei conductoare sunt situate ca în problema precedentă, în ipoteza  $q_1 + q_2 = 0$ .

Din relațiile lui Maxwell,

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 \end{cases}$$

cu  $p_{12} = p_{21}$  și  $q_1 + q_2 = 0$ , rezultă:

$$C_{s1} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{1}{p_{11} - p_{12}}; \quad C_{s2} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{1}{p_{22} - p_{21}};$$

$$C_{s12} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2p_{12}}.$$

Cum

$$p_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2H}{h}; \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{D^2 + (H+h)^2}{D^2 + (H-h)^2}; \quad p_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2h}{a},$$

rezultă:

$$C_{s1} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2H}{a} \sqrt{\frac{D^2 + (H-h)^2}{D^2 + (H+h)^2}}}; \quad C_{s2} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h}{a} \sqrt{\frac{D^2 + (H-h)^2}{D^2 + (H+h)^2}}};$$

$$C_{s12} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{4Hh}{a} \sqrt{\frac{D^2 + (H-h)^2}{a^2[D^2 + (H+h)^2]}}}$$

Înlocuind cu valori numerice, rezultă:

$$C_{s1} = 9 \text{ pF/m}; C_{s2} = 9,05 \text{ pF/m}; C_{s12} = 6,62 \text{ pF/m}.$$

1.3.6. Să se calculeze capacitățile în serviciu și capacitățile parțiale ale unui cablu bifilar ecranat, având sarcinile egale și de semn contrar ( $q_1 + q_2 = 0$ ). Se presupune că raza  $a$  a conductoarelor este mică în raport cu raza  $R$  a ecranului și cu distanța  $d$  dintre axa conductorului și axa învelișului cilindric (figura 1.29).

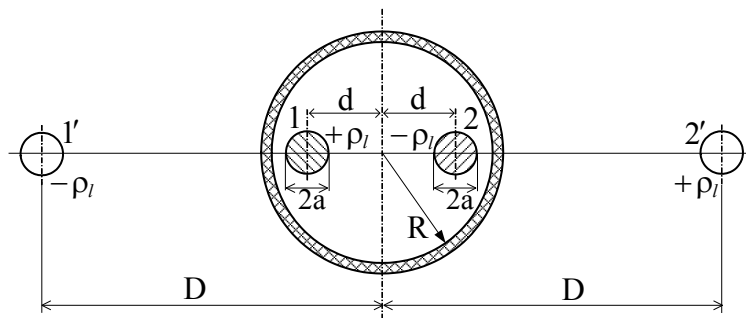


Fig. 1.29.

Modelul de calcul al capacității cablului bifilar de lungime infinită este constituit dintr-un tub cilindric circular conductor de rază  $R$ , în interiorul căruia, în dielectricul de permitivitate  $\epsilon$ , se găsesc așezate simetric la distanța  $d$  de axa tubului două fire conductoare identice de rază  $a \ll R$  încărcate cu sarcini de densități  $\rho_l$  și  $-\rho_l$ .

Metoda imaginilor se aplică înlocuind tubul de rază  $R$  cu firele imaginare  $1'$  cu  $-\rho_l$  și  $2'$  cu  $+\rho_l$ , situate simetric față de axa tubului la distanța  $D = \frac{R^2}{d}$  pentru ca în câmpul rezultat suprafața cilindrică de rază  $a$  să rămână echipotențială.

Se utilizează relațiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 \end{cases}$$

Se observă că din motive de simetrie,

$$p_{11} = p_{22} = p_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{D-d}{a}, \quad p_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{R^2 - d^2}{a \cdot d},$$

și

$$p_{12} = p_{21} = p_m = \frac{-1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2d}{D+d} = \frac{-1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2d^2}{R^2 + d^2}.$$

În baza faptului că  $q_1 = -q_2$  avem

$$\begin{cases} V_1 = (p_0 - p_m)q_1 \\ V_2 = (p_0 - p_m)q_2 \end{cases},$$

Și capacitățile în serviciu sunt:

$$C_{S1} = C_{S2} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{1}{p_0 - p_m} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2(R^2 - d^2)d}{a(R^2 + d^2)}}$$

$$C_{S12} = C_{S21} = \frac{q_1}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2(p_0 - p_m)} = \frac{1}{2} C_{S1}.$$

Pentru determinarea capacităților parțiale se folosesc formele 2 și 3 ale ecuațiilor lui Maxwell,

$$\begin{cases} q_1 = \gamma_{11}V_1 + \gamma_{12}V_2 \quad | \pm \gamma_{12}V_1 \\ q_2 = \gamma_{21}V_1 + \gamma_{22}V_2 \quad | \pm \gamma_{21}V_2 \end{cases}$$

în care:

$$\gamma_{11} = \frac{p_0}{p_0^2 - p_m^2} = \gamma_{22}; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = -\frac{p_m}{p_0^2 - p_m^2}$$

Adunând și scăzând în membrul drept al ecuațiilor de mai sus termenii  $\gamma_{12}V_1$ , respectiv  $\gamma_{21}V_2$ , se obțin ecuațiile în capacități parțiale de forma

$$\begin{cases} q_1 = C_{10}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) \\ q_2 = C_{20}V_2 + C_{21}(V_2 - V_1) \end{cases}$$

în care:

$$C_{10} = C_{20} = \gamma_{11} + \gamma_{12} = \frac{p_0 - p_m}{p_0^2 - p_m^2} = \frac{1}{p_0 + p_m}$$

sunt capacitățile parțiale dintre fiecare conductor și ecran, iar

$$C_{12} = C_{21} = -\gamma_{12} = \frac{p_m}{p_0^2 - p_m^2} = \frac{p_m}{(p_0 - p_m)(p_0 + p_m)}$$

este capacitatea parțială dintre cele două conductoare.

1.3.7. Se dă un cablu trifazat având conductoarele așezate simetric în interiorul unui înveliș metalic cilindric, figura 1.30. Să se determine capacitățile parțiale și în serviciu, în ipoteza  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ . Se va considera  $a \ll d, R$ .

Pentru calculul numeric se vor utiliza datele următoare: permitivitatea dielectricului cablului  $\epsilon = 3\epsilon_0$ ; raza ecranului  $R = 2,5\text{cm}$ ; raza fiecărui conductor  $a = 0,5\text{cm}$ , iar distanța dintre axa cablului și fiecare dintre axele conductoarelor  $d = 1,25\text{cm}$ .

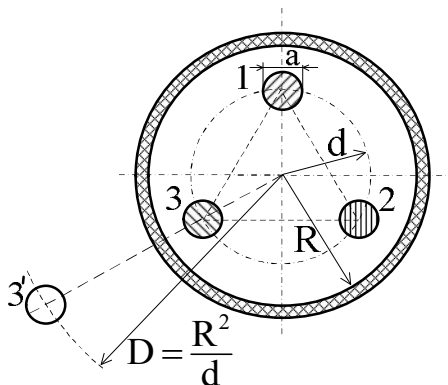


Fig. 1.30.

Se pleacă de la relațiile lui Maxwell,

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + p_{13}q_3 \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q_3 \\ V_3 = p_{31}q_1 + p_{32}q_2 + p_{33}q_3 \end{cases}$$

Datorită simetriei, coeficienții de potențial satisfac următoarele relații:

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{D-d}{a} = 12,1 \cdot 10^9 \text{ m/F};$$

$$p_{12} = p_{23} = p_{31} = p_m = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \ln \sqrt{\frac{R^4 + d^4 + R^2d^2}{3d^2}} = 5,88 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{F}}.$$

Ecuatiile lui Maxwell în condițiile de serviciu ( $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ ) se pot scrie:

$$\begin{cases} V_1 = (p_0 - p_m)q_1 \\ V_2 = (p_0 - p_m)q_2 \\ V_3 = (p_0 - p_m)q_3 \end{cases}$$

Capacitățile în serviciu sunt egale, ele rezultând ușor din ecuațiile lui Maxwell:

$$C_{s1} = C_{s2} = C_{s3} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{1}{p_0 - p_m} = 0,161 \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}.$$

Capacitățile parțiale se deduc de asemenea ușor, utilizând ecuațiile lui Maxwell sub forma:

$$\begin{cases} q_1 = \gamma_{11}V_1 + \gamma_{12}V_2 + \gamma_{13}V_3 \\ q_2 = \gamma_{21}V_1 + \gamma_{22}V_2 + \gamma_{23}V_3; \\ q_3 = \gamma_{31}V_1 + \gamma_{32}V_2 + \gamma_{33}V_3 \end{cases}$$

în care,

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{p_0^2 - p_m^2}{(p_0 - p_m)^2(p_0 + 2p_m)} = \frac{p_0 + p_m}{(p_0 - p_m)(p_0 + 2p_m)};$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{p_m(p_0 - p_m)}{(p_0 - p_m)^2(p_0 + 2p_m)} = \frac{p_m}{(p_0 - p_m)(p_0 + 2p_m)},$$

în care  $\Delta$  este determinatul sistemului de ecuații cu referire la coeficienții de potențial, iar  $\Delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) sunt complemenții algebrici ai termenilor  $p_{ik}$  din același sistem luați cu semnul corespunzător.

În final, se scriu ecuațiile pentru capacități parțiale ale lui Maxwell sub forma:

$$\begin{cases} q_1 = C_{10}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) \\ q_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{20}V_2 + C_{23}(V_2 - V_3) \\ q_3 = C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) + C_{30}V_3 \end{cases}$$

Din motive de simetrie, capacitățile parțiale dintre conductoare și dintre fiecare conductor și ecran sunt egale,

$$C_{12} = C_{23} = C_{31} = -\gamma_{12} = -\gamma_{23} = -\gamma_{31} = \frac{p_m}{(p_0 - p_m)(p_0 + 2p_m)} = 0,04 \mu\text{F/km};$$

$$C_{10} = C_{20} = C_{30} = \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{13} = \frac{1}{p_0 + 2p_m} = 0,042 \mu\text{F/km}.$$

1.3.8. Să se compare capacitatea în serviciu pe 1km din lungime a următoarelor trei linii trifazate:

- conductivele sunt așezate în vârful unui triunghi echilateral cu latura  $D$ , latura inferioară a triunghiului fiind paralelă cu pământul și fiind situată la înălțimea  $h_0$  deasupra pământului;
- conductivele sunt așezate la aceeași înălțime  $h_0$ , distanța dintre ele fiind  $D$ ;
- conductivele sunt așezate pe verticală la distanța  $D$  unul de altul, conductorul inferior fiind la înălțimea  $h_0$ .

Pentru calculul numeric se dau datele următoare:  $r = 10\text{mm}$ ;  $h_0 = 5\text{m}$ ;  $D = 3\text{m}$ .  
Linile au conductoare transpuse, fig. 1.31,a).

Pentru ca linia să fie simetrică, adică cu capacități în serviciu egale pentru toate conductoarele ei, se realizează transpunerea conductoarelor unul în locul celuilalt, în puncte situate la distanțe egale în lungul liniei, așa cum se arată în fig. 1.31,a). În acest fel se înlătură, pe lângă nesimetria capacităților în serviciu, atât inducția electrostatică și electromagnetică între conductoarele liniei, cât și influența liniei date asupra liniilor de telecomunicații din imediata apropiere.

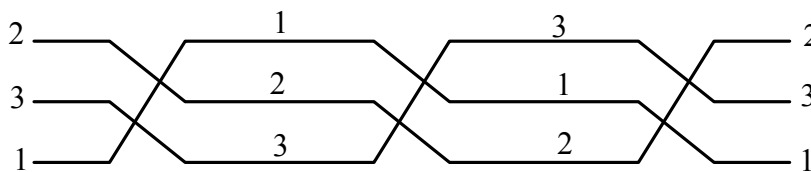


Fig. 1.31,a). Transpunerea conductoarelor la o linie trifazată.

În urma tranziției, în relațiile lui Maxwell:

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + p_{13}q_3 \\ V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2 + p_{23}q_3 \\ V_3 = p_{31}q_1 + p_{32}q_2 + p_{33}q_3 \end{cases}$$

putem considera coeficienții proprii de potențial egali cu o anumită valoare medie între  $p_{11}$ ,  $p_{22}$ ,  $p_{33}$ , întrucât un conductor trece succesiv în pozițiile 1, 2, 3:

$$p_0 = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})$$

și analog, coeficienții mutuali de potențial, de asemenea egali cu

$$p_m = \frac{1}{3}(p_{12} + p_{23} + p_{31}).$$

Dacă  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$ , relațiile lui Maxwell devin:

$$\begin{cases} V_1 = (p_0 - p_m)q_1 \\ V_2 = (p_0 - p_m)q_2 \\ V_3 = (p_0 - p_m)q_3 \end{cases}$$

de unde se deduc capacitățile în serviciu:

$$C_{s10} = C_{s20} = C_{s30} = C_{s0} = \frac{1}{p_0 - p_m}.$$

Dar,

$$p_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{2h_1}{r_1} + \ln \frac{2h_2}{r_2} + \ln \frac{2h_3}{r_3} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{2\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}},$$

$$p_m = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \cdot \frac{1}{3} \left( \ln \frac{d_{12}}{r_{12}} + \ln \frac{d_{23}}{r_{23}} + \ln \frac{d_{31}}{r_{31}} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{\sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}}{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}},$$

$$C_{s0} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \left( 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}}{\sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{r_{12} r_{23} r_{31}}}{\sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}}} \right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln 2 \frac{h \cdot r}{d \cdot r_0}},$$

unde s-a notat cu:  $h$  – valoarea medie geometrică ale înălțimilor conductoarelor;  $r$  – valoarea medie geometrică a distanțelor dintre conductoare;  $r_0$  – valoarea medie geometrică a razelor conductoarelor;  $d$  – valoarea medie geometrică a distanțelor dintre conductoare și imaginile lor în raport cu pământul (fig. 1.31,b).

Pentru **cazul a)** din enunț, fig. 1.32, avem:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_0 = 10\text{mm}; \quad r_{12} = r_{23} = r_{31} = D = 3\text{m};$$

$$h = \sqrt[3]{h_0^2 \left( h_0 + D \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \sqrt[3]{5^2 \left( 5 + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = 5,75\text{m};$$

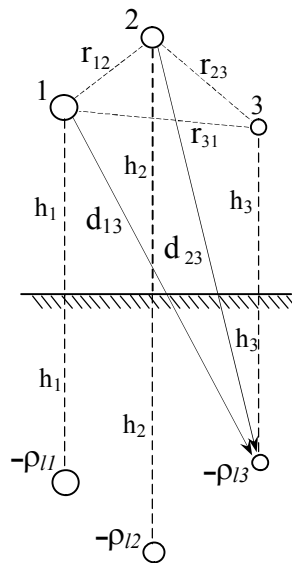


Fig.1.31,b).

$$d_{12} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(2h_0 + D\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 12,7 \text{ m} = d_{31};$$

$$d_{23} = \sqrt{D^2 + (2h_0)^2} = 10,45 \text{ m};$$

$$d = \sqrt[3]{12,7^2 \cdot 10,45} = 11,9 \text{ m};$$

$$\ln 2 \frac{h \cdot r}{r_0 d} = \ln 2 \frac{5,75 \cdot 3}{0,01 \cdot 11,9} = 5,67.$$

Prin urmare, capacitatea pe unitatea de lungime va fi:

$$C'_{sa} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln 2 \frac{hr}{r_0 d}} = \frac{2\pi \cdot 1}{4\pi \cdot 10^9 \cdot 5,67} = 0,088 \frac{\text{nF}}{\text{m}} = 0,088 \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}.$$

Pentru **cazul b)** din enunț, fig. 1.33, avem:

$$r_0 = 10 \text{ mm}; \quad h = h_0 = 5 \text{ m};$$

$$r = \sqrt[3]{2D^3} = D\sqrt[3]{2} = 3,78 \text{ m};$$

$$d_{12} = d_{23} = \sqrt{D^2 + (2h_0)^2} = 10,45 \text{ m};$$

$$d_{31} = \sqrt{(2h_0)^2 + (2D)^2} = 11,65 \text{ m};$$

$$d = \sqrt[3]{10,45^2 \cdot 11,65} = 10,84 \text{ m};$$

$$\ln\left(2 \frac{hr}{r_0 d}\right) = \ln\left(2 \frac{5 \cdot 3,78}{0,01 \cdot 10,84}\right) = 5,85;$$

$$C'_{sb} = 9,5 \frac{\text{pF}}{\text{m}} = 0,0095 \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}.$$

Pentru **cazul c)** din enunț, fig. 1.34, avem:

$$h = \sqrt[3]{h_0(h_0 + D)(h_0 + 2D)} = \sqrt[3]{5 \cdot 8 \cdot 11} = 7,6 \text{ m};$$

$$d_{12} = 2h_0 + 3D = 19 \text{ m}; \quad d_{23} = 2h_0 + D = 13 \text{ m}; \quad d_{31} = 2h_0 + 2D = 16 \text{ m};$$

$$d = \sqrt[3]{d_{12} d_{23} d_{31}} = 15,8 \text{ cm};$$

$$\ln\left(2 \frac{h \cdot r}{r_0 d}\right) = \ln\left(2 \frac{7,6 \cdot 3,78}{0,01 \cdot 15,8}\right) = 5,89; \quad C'_{sc} = 9,42 \frac{\text{pF}}{\text{m}} = 0,00942 \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}.$$

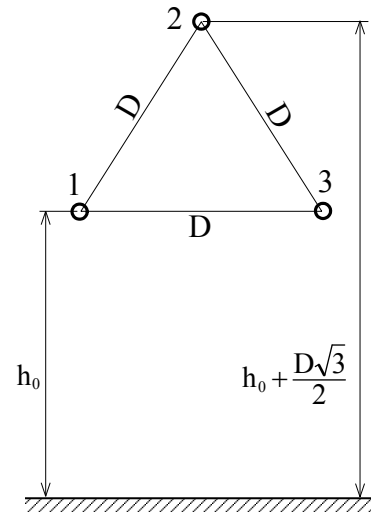


Fig. 1.32.

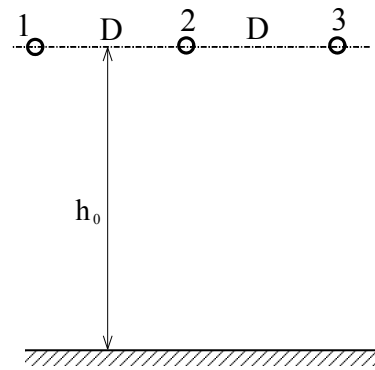


Fig. 1.33.

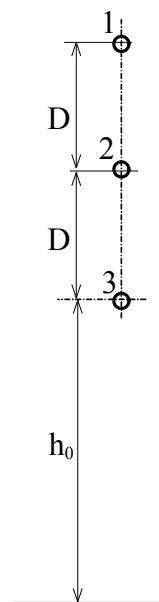


Fig. 1.34.



## 1.4. ENERGIA ȘI FORȚELE CÂMPULUI ELECTROSTATIC

### 1.4.1. NOȚIUNI TEORETICE

**Energia electrică liberă a câmpului electrostatic** corespunzător unui sistem de corpuri încărcate cu sarcină electrică adevărată, distribuit într-un domeniu de dimensiuni finite și având proprietăți liniare, poate fi calculată, în cazul cel mai general, cu integrala extinsă la întreg spațiu [12,14]:

$$W_e = \int_{V_\infty} \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} dV, \quad (1.46)$$

în care:

$$w_e = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} \quad (1.47)$$

este densitatea de volum a energiei libere a câmpului electrostatic. În medii dielectrice liniare, fără polarizare permanentă, avem  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  și expresia energiei electrostatice poate fi scrisă:

$$W_e = \int_{V_\infty} \frac{\epsilon E^2}{2} dV = \int_{V_\infty} \frac{D^2}{2\epsilon} dV. \quad (1.48)$$

Energia electrică liberă a câmpului electrostatic al unui sistem de  $n$  conductoare omogene, având sarcinile  $q_k$  și potențialele  $V_k$ , aflate într-un mediu dielectric liniar, are expresia:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k. \quad (1.49)$$

În cazul a două conductoare încărcate cu sarcini egale și de semne contrare  $q$  și  $-q$ , formând un condensator de capacitate  $C$ , sub tensiunea  $U$ , se obține:

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (1.50)$$

**Forța electrostatică** ce acționează asupra unei corp punctiform imobil, încărcat cu sarcina  $q$ , situat în câmp electrostatic,

$$\vec{F}_q = q \vec{E}. \quad (1.51)$$

Forțele ce acționează asupra corpurilor electrizate situate în câmp electrostatic pot fi calculate și pe baza densității de volum a forței electrostatice, dată de relația generală [ ]

$$\vec{f}_e = \rho_v \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right), \quad (1.52)$$

care conține următoarele componente:

- $\rho_v \vec{E}$  – densitatea de volum a forței ce se exercită asupra unității de volum încărcată cu sarcina  $\rho_v$  situată în câmpul electric  $\vec{E}$ ;
- $-\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon$  – densitatea de volum a forței datorată neomogenității dielectricului (permitivitatea  $\epsilon$  este funcție de punct);

- $\frac{1}{2} grad \left( E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right)$  – densitatea de volum a forței de electrostricțiune datorată

variației permitivității  $\epsilon$  cu densitatea de masă  $\tau$  – intervine în studiul fenomenului de electrostricțiune.

Forța totală care acționează asupra unui corp în regim electrostatic se calculează prin integrare pe volumul corpului:

$$\bar{F}_e = \int_{V_{corp}} \bar{f}_e dV. \quad (1.53)$$

Variația energiei electrostatice a unui sistem de  $n$  conductoare, având sarcinile  $q_k$  și potențialele  $V_k$ , la variația sarcinilor  $q_k$  cu  $\delta q_k$  și a coordonatelor generalizate  $x_k$  cu  $\delta x_k$  este [ ]:

$$dW = \sum_{k=1}^n V_k \delta q_k - \sum_{k=1}^n X_k \delta x_k \quad (1.54)$$

unde  $X_k$  este forța generalizată.

Forța generalizată  $X_k$ , ce acționează în sensul creșterii coordonatei generalizate  $x_k$  poate fi calculată în funcție de energia electrostatică a sistemului pentru două situații distincte: la sarcini constante  $q = \text{const.}$ , sau la potențiale (tensiuni) constante,  $V = \text{const.}$  cu relațiile

$$X_k = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{q=\text{const.}}, \text{ respectiv } X_k = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right)_{V=\text{const.}} \quad (1.55)$$

### Exemple:

#### ● Forța care se exercită între armăturile unui condensator plan.

Pentru energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului pot fi utilizate relațiile (1.50), capacitatea condensatorului plan fiind dată de relația  $C = \frac{\epsilon A}{d}$ .

Coordonata generalizată este în acest caz distanța  $d$  dintre armături, iar forța care se exercită asupra armăturilor se calculează aplicând succesiv relațiile (1.55):

$$F_d = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial d} \right)_{q=\text{const.}} = - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d},$$

$$F_d = \left( \frac{\partial W_e}{\partial d} \right)_{U=\text{const.}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{1}{2} C U^2 \right) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d}.$$

Expresia forței este aceeași și calculând derivata, obținem:

$$F_d = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{\epsilon A}{d} \right) = - \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon A}{d^2} = - \frac{1}{2} U^2 \frac{C}{d}.$$

Faptul că această forță este negativă semnifică că ea acționează în sens invers creșterii coordonatei generalizate, adică a distanței  $d$  dintre armături, fiind deci o forță de atracție dintre armăturile condensatorului.

## ② Instrumentul de măsură electrostatic.

Instrumentul de măsură de tip electrostatic este constituit din două plăci fixe  $P_1$  și o placă mobilă  $P_2$  (fig. 1.35). Sistemul mobil este menținut în echilibru de un resort spiral  $R$  care creează un moment rezistent proporțional cu unghiul de deviație  $\alpha$ :

$$M_r = k_R \cdot \alpha$$

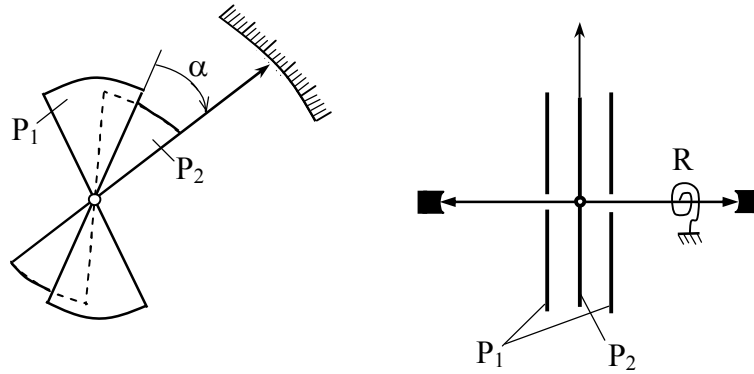


Fig. 1.35.

Capacitatea dintre sistemul mobil și cel fix este funcție de unghiul  $\alpha$ , deci forța generalizată este un cuplu:

$$M_a = \left( \frac{\partial W_e}{\partial \alpha} \right)_{V=\text{const.}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha}$$

Sistemul este în echilibru când cuplul rezistent  $M_r$  este egal cu cuplul activ  $M_a$ , adică:

$$\frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \alpha} = k_R \alpha .$$

În funcție de forma armăturilor, capacitatea poate depinde după o anumită relație de unghiul  $\alpha$ .

Pentru o dependență liniară,  $C = k_1 \alpha$ , rezultă:

$$\alpha = k U^2, \quad \text{unde } k = \frac{k_1}{2k_R}$$

Instrumentul are în acest caz scala pătratică.

Pentru o dependență logaritmică de forma  $C = k_1 \ln \alpha + k_2$ , rezultă:

$$\alpha^2 = \frac{k_1}{k_1 2k_R} \cdot U^2 \text{ sau } \alpha = k U .$$

Se obține astfel o scală liniară a instrumentului.

## 1.4.2. APLICAȚII ȘI PROBLEME

**1.4.1.** Să se determine forța ce acționează asupra dielectricului unui condensator plan parțial introdus între armături (fig.1.35).

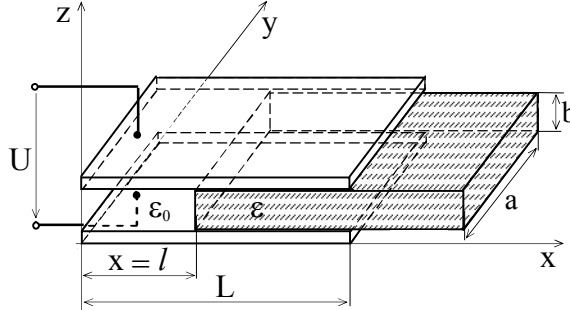


Fig. 1.35.

*Soluția 1.*

Se aplică teorema forțelor generalizate,

$$F = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_{U=ct.} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} C U^2 \right)_{U=ct.} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x}$$

în care C este capacitatea sistemului. Pentru  $x > 0$ , capacitatea sistemului este de fapt capacitatea echivalentă a două condensatoare conectate în paralel,

$$C = C_0 + C_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \cdot a \cdot x}{b} + \frac{\varepsilon \cdot (L-x) \cdot a}{b}.$$

Rezultă astfel,

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} U^2 \left( \frac{\varepsilon_0 \cdot a}{b} - \frac{\varepsilon \cdot a}{b} \right) = \frac{a}{2b} U^2 \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_r) = -\frac{\varepsilon_0 a}{2b} U^2 (\varepsilon_r - 1) < 0$$

Forța fiind negativă, ea acționează în sens invers creșterii coordonatei x, deci este o forță de atracție a dielectricului dintre armături.

*Soluția 2.*

Se utilizează expresia densității de volum a forței electrostatice (1.52) care, în acest caz se reduce la al doilea termen,

$$\vec{f}_e = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \varepsilon.$$

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{pt. } 0 \leq x < l \\ \varepsilon & \text{pt. } l \leq x \leq L \end{cases}; \quad \text{grad } \varepsilon = \vec{i} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}.$$

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}_e dV = -\frac{\vec{i}}{2} E^2 \int_V \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dV = -\frac{\vec{i}}{2} E^2 \int_{V_{corp}} \frac{d\varepsilon}{da} (abd x) = -\frac{\vec{i}}{2} ab E^2 \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{\vec{i}}{2} ab E^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

Avînd în vedere că  $E = U/b$ , rezultă:

$$\vec{F} = -\vec{i} \frac{\varepsilon_0 a}{2b} U^2 (\varepsilon_r - 1).$$

**1.4.2.** Se dă un fir de rază  $a$  și de lungime  $l$  situat paralel cu pământul, la distanța  $h$ , fig. 1. 36. Firul este pus la tensiune  $V$  față de pământ. Știind că permitivitatea relativă a aerului este egală cu unitatea, să se determine forța de atracție dintre fir și pământ. Date numerice:  $h=10\text{ m}$ ;  $l=100\text{ m}$ ;  $U=110\text{ kV}$ ;  $a=0,5\text{ cm}$ .

O primă soluție se obține din:

$$F = \left( \frac{\partial W_e}{\partial h} \right)_{V=\text{ct.}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial h},$$

$C$  fiind capacitatea firului față de pământ. Pentru a determina această capacitate, aplicăm metoda imaginilor și plasăm un conductor de aceeași dimensiuni în mod simetric față de pământ. Capacitatea conductor – pământ este dublul capacității dintre conductor și imaginea lui și are expresia

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2h}{a}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial h} = -\frac{C^2}{2\pi\epsilon l h}$$

Înlocuind în expresia forței, rezultă:

$$F = -\frac{U^2 C^2}{4\pi l h}$$

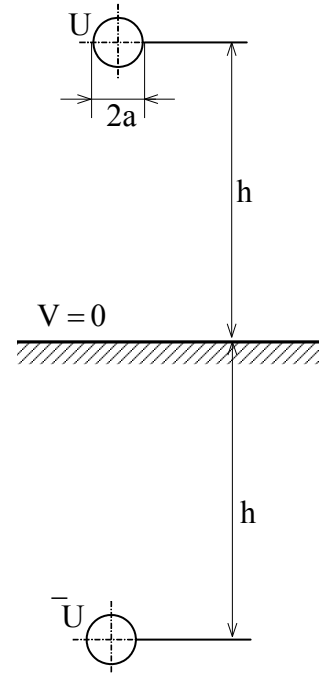


Fig. 1.36.

A doua soluție presupune că forța se poate calcula direct, știind că va fi aceeași cu forța dintre două fire paralele de sarcini egale și de semn contrar, situate la distanța  $2h$ . Se obține:

$$F = -\frac{1}{2\pi\epsilon l} \frac{q^2}{2h} = -\frac{U^2 C^2}{4\pi\epsilon l h} = -\frac{\pi\epsilon l}{h \left( \ln \frac{2h}{a} \right)^2} U^2$$

În cazul datelor numerice date în problemă rezultă:

$$F = \frac{\pi}{36\pi 10^9} \frac{100}{10} \frac{(110000)^2}{\left( \ln \frac{20}{0,5 \cdot 10^{-2}} \right)^2} = \frac{121}{36} \frac{1}{(\ln 4000)^2} = 0,049\text{ N}$$

**1.4.3.** Se consideră un fir conductor rectiliniu de rază  $a$  și de lungime  $l$ . Firul este situat în interiorul unui cilindru conductor de rază interioară  $R \gg a$ , având axa paralelă cu firul, fig.1.37. Distanța  $d$  dintre axa firului și axa cilindrului este foarte mare în raport cu  $a$ ,  $d \gg a$ , de asemenea  $R - d \gg a$ . Se cere să se calculeze forța care se exercită asupra firului dacă între fir și cilindru se aplică o tensiune  $U$ .

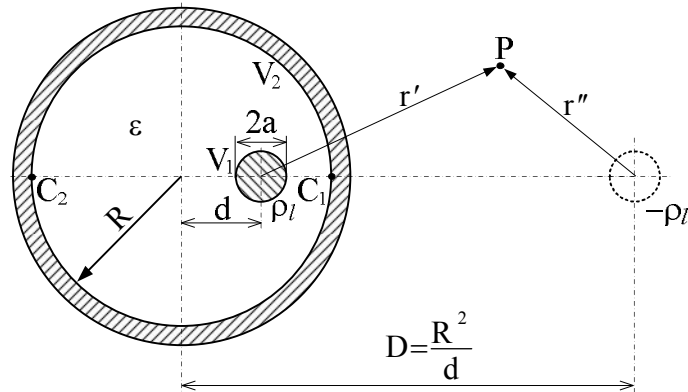


Fig. 1.37.

Vom calcula capacitatea fir – cilindru aplicând metoda imaginilor. Se elimină cilindrul introducând un fir conductor imagine de rază  $a$  la distanța  $D$  de axa cilindrului încărcat cu sarcina  $-\rho_l$ , dacă  $\rho_l$  este sarcina firului din interiorul cilindrului.

În punctul  $P$  situat la distanța  $r'$  de firul interior și  $r''$  față de firul exterior, potențialul va fi

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r''}{r'}$$

Suprafața interioară a cilindrului trebuie să fie, în câmpul celor două fire încărcate, o suprafață echipotențială. Punând această condiție pentru două puncte oarecare ale suprafeței, se poate determina mărimea  $D$ , necunoscută. Alegem punctele  $C_1$  și  $C_2$ , calculele rezultând mai simple în aceste cazuri:

$$\left( \frac{r''}{r'} \right)_{C_1} = \left( \frac{r''}{r'} \right)_{C_2} \Rightarrow \frac{D-d}{R-d} = \frac{D+R}{R+d},$$

de unde,

$$D = \frac{R^2}{d}$$

$$\text{și, prin urmare, } U = V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \left( \ln \frac{D-d}{a} - \ln \frac{D-R}{R-d} \right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R^2 - d^2}{a \cdot R}$$

Capacitatea pe unitatea de lungime rezultă imediat

$$C_s = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R^2 - d^2}{aR}}$$

iar forța care se exercită asupra firului pe unitatea de lungime, rezultă:

$$F = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C_s}{\partial d} = -2\pi\epsilon \frac{dU^2}{(R^2 - d^2) \left( \ln \frac{R^2 - d^2}{aR} \right)^2} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{U^2 \cdot C_s^2}{D-d}$$

Ultima expresie evidențiază posibilitatea de a fi calculată această forță, ca forța dintre fir și firul imagine.

$$F = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{\rho_l \rho_l}{D-d} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{C_s^2 U^2}{D-d}$$

**1.4.4.** Să se calculeze forța de atracție dintre două conductoare cilindrice de lungime foarte mare  $l$ , de raze egale cu  $a$ , dispuse paralel la distanța  $D > 2a$  (între axele lor), într-un dielectric omogen de permitivitate  $\varepsilon$  cu sarcinile  $q$  și  $-q$ .

Capacitatea celor două conductoare cilindrice pe unitatea de lungime este, așa cum s-a determinat la problema 1.3.2,

$$C_s = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \frac{2a}{D - \sqrt{D^2 - 4a^2}}} = \frac{C}{l},$$

și forța rezultă:

$$F_D = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial D} = \frac{U^2 l}{2} \frac{\partial C_s}{\partial d} = \frac{q^2}{2lC_s^2} \left[ -\frac{1}{\pi\varepsilon\sqrt{D^2 - 4a^2}} \right] = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon l \sqrt{D^2 - 4a^2}},$$

semnul '-' indică tendința de atracție a conductoarelor (de scădere a distanței  $D$ ).

O a doua soluție pentru rezolvarea problemei este utilizarea metodei imaginilor pentru determinarea capacității (studiată la problema 1.3.2) unde cele două conductoare au fost înlocuite cu două fire-imagini cu sarcinile sarcini  $\rho_l = \frac{q}{l}$  și  $-\rho_l = -\frac{q}{l}$  dispuse paralel în mediul omogen de permitivitate  $\varepsilon$ , la distanța  $d = D - 2x = \sqrt{D^2 - 4a^2}$ .

Forța dintre cei doi cilindri trebuie însă să fie egală cu forța dintre cele două fire-imagini. Într-adevăr, înlocuirea de exemplu, a unuia dintre cilindri cu firul imagine nu schimbă câmpul în apropierea celuiilant cilindru și deci, nici forța exercitată asupra celuiilant cilindru. Egalitatea acțiunii și reacțiunii în cele două situații impune ca și forța care se exercită asupra primului cilindru să fie egală cu forța care se exercită asupra firului-imagine, după înlocuirea efectuată. Forța dintre două fire paralele se calculează înmulțind câmpul unui fir cu sarcina celuiilant și are expresia:

$$\bar{F}_{12} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon l} \frac{q_1 q_2}{d} \bar{u}_{12} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon l} \frac{q^2}{d} \bar{u}_{12},$$

în care  $\bar{u}_{12}$  este versorul orientat de la conductorul 1 la conductorul.

Înlocuind  $d = \sqrt{D^2 - 4a^2}$  rezută relația determinată în primul caz.

**1.4.5.** Se consideră un bloc paralelipipedic din metal cu dimensiunile  $a$ ,  $b$  și  $g'$ , iar sarcina lui electrică totală este nulă. Blocul este introdus parțial între armăturile dreptunghiulare ale unui condensator plan cu dimensiunile  $a$  și  $b$  situate în vid la distanța  $g > g'$  cu diferența de potențial  $U$  între ele, fig. 1.38,a). Să se calculeze forța cu care blocul este atras între armături, știind că muchiile blocului și ale armăturilor sunt paralele (se neglijează efectele marginale produse de suprafața blocului metalic).

Pentru calculul numeric se dau datele:  $a = 10 \text{ cm}$ ;  $g' = \frac{1}{2}g = 3 \text{ mm}$ ;  $U = 100 \text{ V}$ .

Prin introducerea parțială a paralelipipedului între armături s-a format un sistem de trei condensatoare  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  conectate ca în figura 1.38,b) și având capacitățile

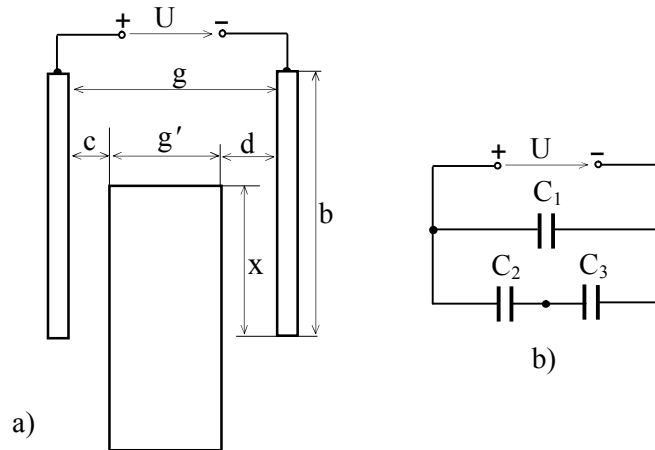


Fig. 1.38.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 a (b-x)}{g}; \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 a x}{g}; \quad C_3 = \frac{\epsilon_0 a x}{d}.$$

Capacitatea echivalentă a sistemului este

$$C_e = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{\epsilon_0 a (b-x)}{g} + \frac{\epsilon_0^2 a^2 x^2}{d \cdot c \left( \frac{\epsilon_0 a x}{c} + \frac{\epsilon_0 a x}{d} \right)} =$$

$$= \frac{\epsilon_0 a (b-x)}{g} + \frac{\epsilon_0 \cdot a \cdot x}{c+d} = \frac{\epsilon_0 \cdot a}{g(g-g')} [b(g-g') + g' \cdot x].$$

Forța care se exercită asupra blocului paralelipipedic se calculează ușor,

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial a} \right) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 \cdot a}{g} + \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 \cdot a}{g-g'} =$$

$$= \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon_0 \cdot a}{g(g-g')} [g-g+g'] = \frac{\epsilon_0 \cdot a \cdot g' \cdot U^2}{2g(g-g')} > 0$$

Forța fiind pozitivă, ea acționează în sensul creșterii coordonatei  $x$ , deci este o forță de atracție a blocului metalic între armături.

Numeric:

$$F = \frac{1}{2 \cdot 0,006(0,006-0,003)} 0,1 \cdot 100^2 \cdot 0,003 = 0,74 \cdot 10^{-6} \text{ N.}$$

**1.4.6.** Cinci condensatoare de capacități  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 2\mu\text{F}$ ,  $C_0 = 4\mu\text{F}$  sunt legate într-o conexiune identică cu aceea a punții Wheatstone, condensatorul  $C_0$  aflându-se în diagonala punții, fig. 1.39,a). La bornele  $A$  și  $B$  se aplică tensiunea constantă  $U = 100\text{V}$ .



Se cere:

a) să se calculeze capacitatea echivalentă față de bornele A, B (utilizând o transformare triunghi – stea), precum și sarcinile condensatoarelor;

b) să se calculeze energia electrostatică a câmpurilor electrice ale condensatoarelor;

c) să se calculeze energia transformată în căldură la scurtcircuitarea condensatorului  $C_1$ , prin închiderea întrerupătorului  $K_2$ , după ce în prealabil s-a decuplat sursa de tensiune de la bornele A și B prin deschiderea întrerupătorului  $K_1$ .

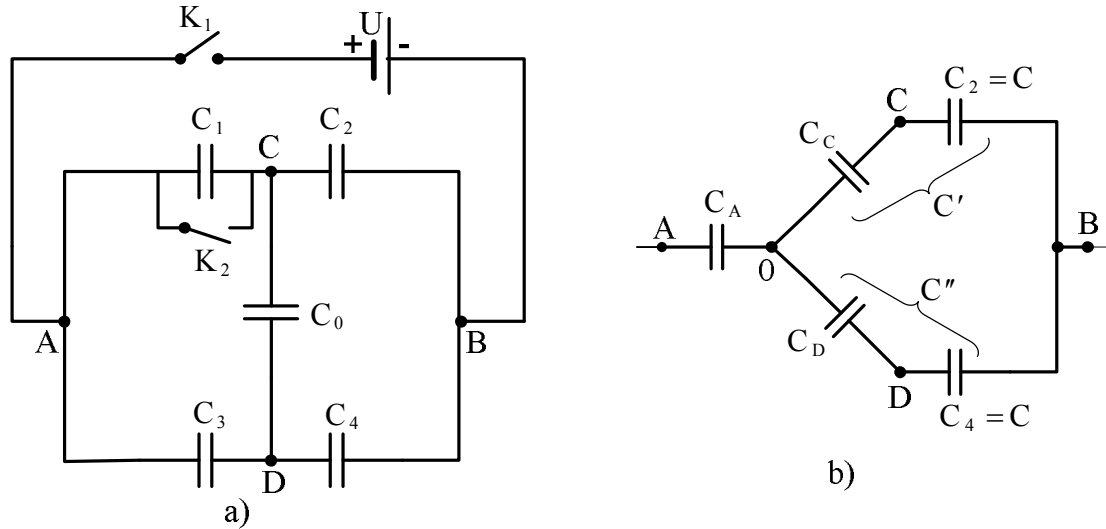


Fig. 1.39.

a) se transformă condensatoarele  $C_0, C_1, C_3$  legate în triunghi față de bornele A – C – D, în trei condensatoare echivalente legate în stea  $C_A, C_C, C_D$ , fig. 1.39,b).

Notând  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$  se obține:

$$C_A = \frac{CC_0 + CC_0 + CC}{C_0} = 5\mu\text{F};$$

$$C_C = C_D = \frac{CC_0 + CC_0 + CC}{C} = 10\mu\text{F};$$

$$C' = C'' = \frac{CC_C}{C + C_C} = \frac{20}{12}1,66\mu\text{F}.$$

Capacitatea echivalentă față de bornele A – B va fi:

$$C_e = \frac{C_A (2C')}{C_A + 2C'} = \frac{5 \cdot 3,32}{5 + 3,32} = 2\mu\text{F} = C.$$

Avem, în continuare:

$$q_A = q = CU = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 2 \cdot 10^{-4} \text{C};$$

$$U_{A0} = \frac{q}{C_A} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-6}} = 40V ;$$

$$U_{0B} = U - U_{A0} = 100V - 40V = 60V .$$

Dacă notăm cu  $q'$  sarcina electrică a condensatorului  $C'$ , putem scrie:

$$q' = C'U_{0B} = 1,66 \cdot 10^{-6} \cdot 60 = 9,96 \cdot 10^{-5}C ,$$

$$q' = q_2 = q_4 = q_{C'} = q' \approx 10^{-4}C .$$

Tensiunea între bornele  $A - C$  este:

$$U_{AC} = U_{A0} + U_{0C} = U_{A0} + \frac{q'}{C_C} = 40 + \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 50V .$$

Rezultă:

$$q_1 = C_1U_{AC} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 10^{-4}C; \quad q_3 = q_1 .$$

b) energia electrostatică din câmpul electric al condensatoarelor este:

$$W = \frac{1}{2}C_eU^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 10^{-2}J .$$

c) după decuplarea întrerupătorului  $K_1$  și apoi după scurtcircuitarea condensatorului  $C_1$ , prin închiderea întrerupătorului  $K_2$ , sarcina electrică a noului condensator echivalent va rămâne  $q_2 + q_4$ , conform legii de conservare a sarcinii electrice.

Energia electrică după închiderea lui  $K_2$  va fi

$$W' = \frac{1}{2} \frac{(q_2 + q_4)^2}{C_2 + \frac{(C_0 + C_3)C_4}{C_0 + C_3 + C_4}} = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot \left[ 2 + \frac{(4+2)2}{4+2+2} \right] \cdot 10^{-6}} = 0,571 \cdot 10^{-2}J .$$

Energia transformată prin efect electrocaloric va fi:

$$\Delta W = W_0 - W = 10^{-2} - 0,571 \cdot 10^{-2} = 0,429 \cdot 10^{-2}J .$$

## 2. CÂMPUL MAGNETIC STAȚIONAR

### 2.1. BREVIAR DE CALCUL PENTRU CÂMPUL MAGNETIC

**Regimul magnetostatic.** Se presupune că un sistem fizic format din corpuri și câmp electromagnetic se găsește în regim magnetostatic când corpurile se găsesc în imobilitate relativă, toate mărimile de stare electrică sunt nule, iar mărimile de stare magnetică sunt constante în timp. În regim staționar câmpul magnetic este produs de conductoare parcurse de curent continuu și de corpuri aflate în stare de magnetizare.

Studiul câmpului magnetic independent de câmpul electric este posibil numai în regim staționar. În regim variabil, câmpul electric și câmpul magnetic sunt cele două aspecte inseparabile ale unui sistem unic – câmpul electromagnetic – care poate exista independent de corpuri.

**Inducția magnetică  $\vec{B}$**  este mărimea de stare care caracterizează local câmpul magnetic. Este definită prin acțiunea ponderomotoare (cuplu de forțe) ce acționează asupra buclei de curent – o mică spiră filiformă parcursă de curent electric în regim staționar (situată în vid sau în aer) – cuplu dat de relația  $\vec{C} = \vec{m}_b \times \vec{B}_v = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}_v$ . Inducția magnetică se măsoară în tesla (T) în S.I. În sistemul de unități CGSem este utilizată unitatea de măsură numită gauss (Gs),  $1T = 10^4Gs$ .

**Fluxul magnetic  $\psi$**  este o mărime derivată scalară care caracterizează proprietățile câmpului magnetic în raport cu o suprafață  $S_r$  dată, fiind definit prin integrala de suprafață a inducției magnetice  $\vec{B}$ ,

$$\psi_{S_r} = \int_{S_r} \vec{B} d\vec{A} = \int_{S_r} B \cos \alpha dA. \quad (2.1)$$

În cazul unei bobine, se utilizează noțiunile de *flux magnetic fascicular* și *flux magnetic înlănțuit sau total*. Fluxul magnetic fascicular notat cu  $\phi$ , este fluxul magnetic care străbate porțiunea de suprafață elicoidală  $S_{r_i}$  care se sprijină pe o singură spiră a bobinei. Fluxul magnetic înlănțuit sau total  $\psi$  este fluxul magnetic care străbate suprafața elicoidală  $S_r$  care se sprijină pe toate spirele bobinei. Dacă bobina are  $N$  spire, este evidentă relația  $\psi = N\phi$ .

Unitatea de măsură pentru fluxul magnetic în S.I. se numește *weber* (Wb). Se mai utilizează și unitatea de măsură numită maxwell (Mx),  $1Wb = 10^8Mx$  (CGSem).

**Intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$**  este caracterizează local câmpul magnetic. În vid este un vector coliniar cu inducția magnetică, dat de relația  $\vec{H}_v = \mu_0 \vec{B}_v$ , în care  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}H/m$  este permeabilitatea magnetică a vidului.

Unitatea de măsură pentru intensitatea câmpului magnetic este A/m în S.I.

Calculul câmpului magnetic constă în determinarea inducției magnetice sau a intensității câmpului magnetic în punctele din spațiu în care există câmp magnetic. Pentru calcul se pot utiliza diferite metode cum sunt: formula lui Biot – Savart – Laplace, teorema lui Ampère, metoda imaginilor magnetice, etc.

**Formula lui Biot – Savart – Laplace** permite calculul inducției sau intensității câmpului magnetic produs într-un punct din vid la distanța  $R$  de un circuit filiform de contur  $\Gamma$  parcurs de curentul  $i$  (fig. 2.1),

$$\vec{B}_v = \mu_0 \vec{H}_v = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3} \quad (2.2)$$

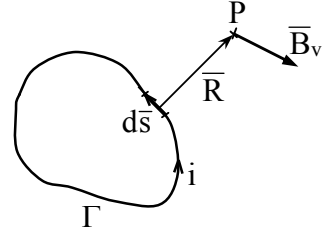


Fig. 2.1.

**Teorema lui Ampère** sau legea circuitului magnetic în regim staționar stabilește că tensiunea magnetomotoare  $u_{m\Gamma}$  în lungul unei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu curentul total  $i_{S\Gamma}$ , respectiv cu solenația curenților de conducție  $\theta_{S\Gamma}$  prin orice suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  care se sprijină pe curba  $\Gamma$ :

$$u_{m\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = \theta_{S\Gamma} \quad (2.3)$$

În cazul unei bobine cu  $N$  spire, parcursă de curentul  $i$ , solenația este  $\theta = Ni$ .

## 2.2. APLICAȚII

2.1. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic produs de un conductor filiform, rectiliniu, de lungime finită  $l$ , parcurs de curentul  $I$ , figura 2.2.

Se poate utiliza formula lui Biot – Savart – Laplace,

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3}.$$

Vectorul  $d\vec{s} \times \vec{R}$  este perpendicular pe planul figurii:

$$d\vec{s} \times \vec{R} = \vec{e} ds \cdot R \cdot \sin \beta = \vec{e} ds \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \vec{e} ds \cdot R \cdot \cos \alpha.$$

$$\vec{H} = \vec{e} \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{R \cdot \cos \alpha}{R^3} ds.$$

Se alege ca variabilă de integrare unghiul  $\alpha$ .

$$s = r \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad ds = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha; \quad R = \frac{r}{\cos \alpha}.$$

$$\vec{H} = \vec{e} \frac{I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \cdot \frac{r}{\cos^2 \alpha} ds = \vec{e} \frac{I}{4\pi \cdot r} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2).$$

Pentru un conductor infinit lung  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}$ .

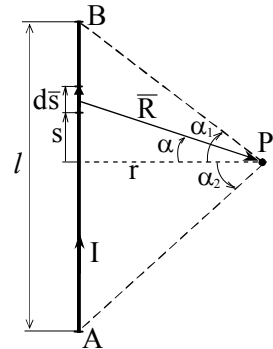


Fig. 2.2.

La același rezultat se ajunge utilizând teorema lui Ampère,  $\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = \theta$ , solenația  $\theta$

fiind în acest caz  $\theta = I$ . Liniile de câmp sunt circulare, situate în plane perpendiculare pe conductor și sensul lor este dat de sensul de rotație al burghiului drept care înaintază în sensul curentului. Se integrează de-a lungul unei linii de câmp, astfel că vectorii  $\vec{H}$  și  $d\vec{s}$  sunt omoparaleli și rezultă

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = H \oint_{\Gamma} ds = H \cdot 2\pi r \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}.$$

**2.2.** Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic într-un punct de pe axa unei spire circulare de rază  $a$ , parcursă de curentul  $i$ , fig. 2.3.

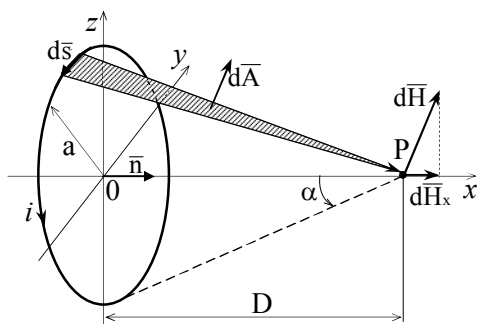


Fig. 2.3.

Utilizăm formula lui Biot – Savart – Laplace,

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3}.$$

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} (d\vec{s} \times \vec{R}).$$

$$\vec{H} = \frac{i}{4\pi R^3} \int_{S_l} 2d\vec{A} = \frac{i}{2\pi R^3} \int_{S_l} d\vec{A},$$

unde  $S_l$  este suprafața laterală a cilindrului cu vârful în punctul P. În general, pentru o suprafață închisă  $\Sigma$ ,

$$\oint_{\Sigma} d\vec{A} = 0 \Rightarrow \int_{S_b} d\vec{A} = \int_{S_l} d\vec{A},$$

unde  $S_b$  este suprafața bazei conului.

$$\int_{S_b} d\vec{A} = \pi \cdot a^2 \cdot \vec{n},$$

unde  $\vec{n}$  reprezintă versorul normalei la planul spirei orientat după axa x:  $\vec{n} \equiv \vec{i}$ .

$$\vec{H} = \vec{n} \frac{i}{2\pi R^3} \cdot \pi \cdot a^2 = \vec{n} \frac{i \cdot a}{2R^3} = \vec{n} \frac{i \cdot a^2}{2(a^2 + D^2)^{3/2}}$$

sau, înlocuind  $\sin \alpha = a/R$ , rezultă:

$$H = \frac{i \cdot a}{2R^2} \sin \alpha.$$

În centrul spirei:  $D=0 \Rightarrow \vec{H} = \frac{i}{2a} \vec{n}$ .

Altă metodă. Elementul de lungime al spirei  $ds$  parcurs de curentul  $i$ , produce în punctul P câmpul elementar

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3},$$

Câmpul pe axa spirei va fi dat de componenta  $dH_x = dH \cdot \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned} \vec{R} \perp d\vec{s} &\Rightarrow |d\vec{s} \times \vec{R}| = R \cdot ds \\ H = H_x &= \frac{i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{R \sin \alpha}{R^3} ds = \frac{i}{4\pi R^2} \sin \alpha \cdot \oint_{\Gamma} ds, \\ H &= \frac{i \cdot a}{2R^2} \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{a}{R} \Rightarrow H = \frac{i \cdot a}{2R^3} = \frac{i \cdot a^2}{2(a^2 + D^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

2.3. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic într-un punct de pe axul unui solenoid cu  $N$  spire, parcurs de curentul  $i$  (fig. 2.4).

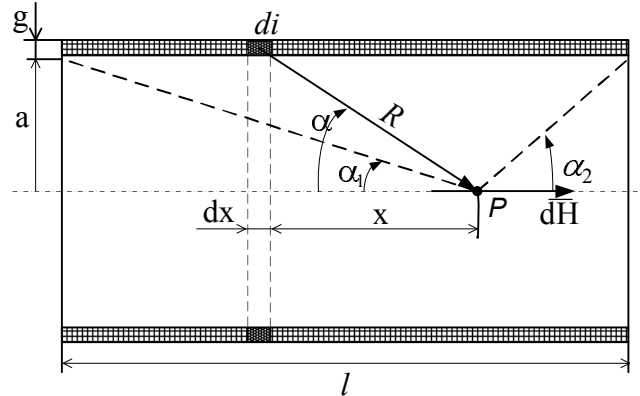


Fig. 2.4.

Stratul de lungime  $dx$  este parcurs de curentul  $di = \frac{Ni}{l} dx$ . Acesta poate fi considerat ca o spiră parcursă de curentul  $di$  care va determina în punctul  $P$  câmpul magnetic (vezi aplicația anterioară):

$$dH = \frac{di \cdot a}{2R^2} \sin \alpha, \quad dH = \frac{a}{2R^2} \sin \alpha \cdot \frac{Ni}{l} dx.$$

Se va integra după unghiul  $\alpha$ :

$$x = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad dx = -\frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha, \quad R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$dH = \frac{a}{2 \cdot \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}} \cdot \sin \alpha \cdot \frac{Ni}{l} \cdot \frac{-a}{\sin^2 \alpha} d\alpha = -\frac{Ni}{2l} \sin \alpha d\alpha$$

$$H = \int dH = -\frac{N \cdot i}{2l} \int_{\pi - \alpha_2}^{\alpha_1} \sin \alpha d\alpha = \frac{N \cdot i}{2l} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

În centrul solenoidului:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,

$$H = \frac{Ni}{l} \cos \alpha = \frac{Ni}{l} \cdot \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{Ni}{l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{l}\right)^2}}.$$

Pentru solenoidul infinit lung ( $l \gg a$ ),  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ :

$$H = \frac{Ni}{l}.$$

### 3. ELECTRODINAMICA

#### 3.1. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

##### 3.1.1. Noțiuni teoretice

Sub formă integrală enunțul legii este: *tensiunea electromotoare  $e_{\Gamma}$  indusă prin fenomenul inducției electromagnetice de-a lungul unei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic  $\phi_{S_{\Gamma}}$  prin orice suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  care se sprijină pe curba  $\Gamma$*

$$e_{\Gamma} = - \frac{d\phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \quad (3.1)$$

Forma integrală dezvoltată a legii inducției electromagnetice

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{s} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{A} + \int_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\bar{v} + \bar{B}) \cdot d\bar{A} \quad (3.2)$$

evidențiază cele două componente ale tensiunii electromotoare induse:

❶ *tensiunea electromotoare indusă prin pulsație, numită și tensiune electromotoare statică sau de transformare*

$$e_{\Gamma_{tr}} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{A} \quad (3.3)$$

stabilită exclusiv prin variația în timp a inducției magnetice, suprafața  $S_{\Gamma}$  fiind fixă;

❷ *tensiunea electromotoare indusă prin mișcare:*

$$e_{\Gamma_{misc}} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\bar{v} + \bar{B}) \cdot d\bar{A} \quad (3.4)$$

stabilită exclusiv prin variația în timp a suprafeței  $S_{\Gamma}$ , respectiv a curbei  $\Gamma$ , inducția magnetică fiind constantă în timp.

De exemplu, într-un conductor drept de lungime  $l$  care se deplasează cu viteza  $\bar{v}$  într-un câmp magnetic uniform de inducție constantă  $\bar{B}$  (fig. 3.1) tensiunea electromotoare indusă este

$$e_{\Gamma_{misc}} = (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{l} = v \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \quad (3.5)$$

Dacă conductorul se deplasează perpendicular pe liniile de câmp magnetic, t.e.m. indusă are valoarea maximă,

$$e = v \cdot B \cdot l \quad (3.6)$$

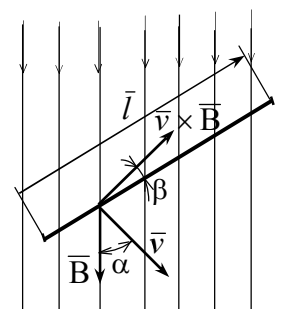


Fig. 3.1.

### 3.1.2. Aplicații la legea inducției electromagnetice

#### ● Generarea tensiunilor electromotoare alternative

Se consideră o bobină dreptunghiulară cu laturile  $2a$  și  $b$  (fig. 3.2). Bobina se rotește cu  $n$  rot/s în jurul axei proprii  $OO'$  într-un câmp magnetic omogen de inducție  $\vec{B}$  constantă în timp și perpendiculară pe axa spirei.

Notând cu  $\omega = 2\pi n$  viteza unghiulară, unghiul  $\alpha$  format la un moment dat de normala la planul bobinei cu inducția magnetică este  $\alpha = \omega t$ . Fluxul magnetic fascicular  $\Phi$  este:

$$\Phi = \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} d\vec{A} = BA \cos \alpha = 2abB \cos \omega t = \Phi_m \cos \omega t \quad (3.7)$$

unde  $\Phi_m = 2abB$  este fluxul fascicular maxim prin suprafața unei spire a bobinei.

Tensiunea electromotoare indusă în bobină este

$$e = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \Phi_m \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

sau,

$$e = E_m \sin \omega t \quad (3.8)$$

unde cu  $E_m = N\Phi_m\omega$  s-a notat valoarea maximă sau amplitudinea acesteia.

Tensiunea electromotoare  $e$  variază sinusoidal în timp cu frecvența  $f = \omega / 2\pi$  (fig. 3.3). Valoarea efectivă a tensiunii electromotoare este

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot N \cdot f \cdot \Phi_m \cong 4,44 \cdot N \cdot f \cdot \Phi_m . \quad (3.9)$$

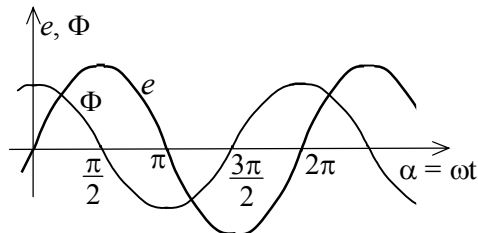


Fig. 3.3.

Același rezultat se obține calculând tensiunea electromotoare indusă cu relația

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}, \quad (3.10)$$

unde conturul de integrare  $\Gamma$  se ia de-a lungul conductorului bobinei. Pentru laturile  $b$ , vectorii  $(\vec{v} \times \vec{B})$  și  $d\vec{s}$  sunt omoparaleli (fig.1), iar pentru laturile  $2a$  sunt perpendiculari. Prin urmare, despărțind conturul  $\Gamma$  pe porțiuni, integrala este nenulă numai pe laturile  $b$  ale bobinei și rezultă:

$$e = 2N \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{b} = 2b \cdot v \cdot N \cdot B \cdot \sin \alpha .$$

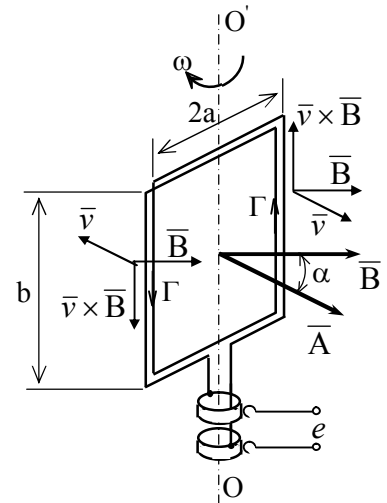


Fig. 3.2.



Viteza liniară fiind  $v = \omega a$ , rezultă, cum era de așteptat, aceeași relație pentru tensiunea electromotoare:

$$e = 2abNB\omega \sin \omega t = E_m \sin \omega t .$$

Dispozitivul pune în evidență principiul alternatorului monofazat.

Dacă în loc de o bobină, dispozitivul conține trei bobine dreptunghiulare identice, dispuse simetric pe același ax (fig. 3.4), fluxurile magnetice fasciculare prin cele trei bobine vor fi

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_m \cos \omega t \\ \Phi_2 &= \Phi_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \Phi_3 &= \Phi_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

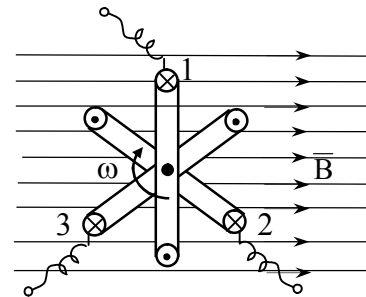


Fig. 3.4.

iar tensiunile electromotoare rezultă:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_m \sin \omega t \\ e_2 &= E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ e_3 &= E_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tensiunile electromotoare obținute sunt sinusoidale (alternative) și formează un

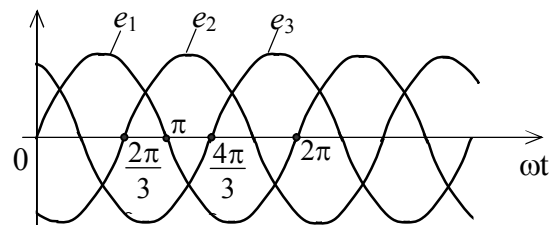


Fig. 3.5.

sistem trifazat simetric (fig. 3.5).

Dispozitivul prezentat pune în evidență principiul generatorului electric trifazat.

2 O spiră conductoare dreptunghiulară, având laturile  $a$  și  $b$ , se rotește în jurul uneia din laturile mari cu viteza unghiulară  $\omega$  în câmpul magnetic uniform și variabil în timp  $B = B_m \sin \omega t$  (fig. 3.6). Să se calculeze t.e.m. indusă în spiră.

În acest caz, tensiunea electromotoare indusă are ambele componente:

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{s} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} .$$

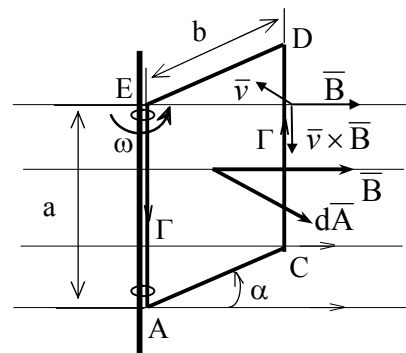


Fig. 3.6.

Așa cum se poate vedea din figura 3.6, unghiul dintre vectorii  $\vec{B}$  și  $d\vec{A}$  este  $\angle(\vec{B}, d\vec{A}) = \pi/2 - \alpha = \pi/2 - \omega t$  și componenta t.e.m. de transformare rezultă

$$e_{\Gamma_{tr}} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial B}{\partial t} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) dA,$$

respectiv,

$$e_{\Gamma_{tr}} = - \frac{\partial B}{\partial t} \sin \omega t \int_{S_{\Gamma}} dA = -abB_m \omega' \cos \omega' t \cdot \sin \omega t.$$

## 3.2. INDUCTIVITĂȚILE CIRCUITELOR ELECTRICE

### 3.2.1. Noțiuni teoretice

**Inductivitatea proprie** a unui circuit electric se definește ca raportul dintre fluxul magnetic total  $\psi_{S_{\Gamma}}$  care străbate suprafața  $S_{\Gamma}$  limitată de conturul  $\Gamma$  al circuitului și curentul  $i$  care produce acest flux,

$$L = \frac{\Psi_{S_{\Gamma}}}{i}. \quad (3.13)$$

Unitatea de măsură a inductivității în sistemul internațional este henry [H].

Pe lângă inductivitățile proprii, în cazul circuitelor (bobinelor) cuplate magnetic avem și inductivități mutuale, precum și inductivități utile și de dispersie.

**Inductivitatea mutuală** a unei bobine față de altă bobină cu care este cuplată magnetic  $L_{12}$  este dată de raportul dintre fluxul magnetic  $\psi_{12}$  determinat de curentul din prima bobină prin spirele celei de-a doua bobine și acest curent:

$$L_{12} = \frac{d \Psi_{12}}{i_1} \Big|_{i_2=0} = N_2 \frac{d \phi_{12}}{i_1} \Big|_{i_2=0} \geq 0. \quad (3.14)$$

Analog,

$$L_{21} = \frac{d \Psi_{21}}{i_2} \Big|_{i_1=0} = N_1 \frac{d \phi_{21}}{i_2} \Big|_{i_1=0} \geq 0. \quad (3.15)$$

În cazul circuitelor statice, inductivitățile mutuale satisfac condiția de reciprocitate. Astfel, inductivitățile mutuale a două bobine fixe, cuplate magnetic, se notează  $L_{12} = L_{21} = M$ .

Calculul inductivităților se face după următoarele etape:

- 1) se presupune bobina parcursă de curentul  $i$ ;
- 2) se calculează inducția magnetică  $\vec{B}$  în diferite puncte din câmp (cel mai des se utilizează formula lui Biot-Savart-Laplace);
- 3) se calculează fluxul magnetic  $\phi_{S_{\Gamma}} = \oint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$  și apoi fluxul total,  $\psi = Ni$ ;
- 4) se calculează inductivitățile cu relațiile de definiție.

Pentru calculul inductivităților mutuale se poate utiliza și **formula lui Neumann**. Expresia inductivității mutuale a două circuite filiforme, situate într-un mediu liniar, este:

$$L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{R_{12}}, \quad (3.16)$$

unde  $ds_1$  și  $ds_2$  sunt două elemente de lungime ale circuitelor de contururi  $\Gamma_1$  și respectiv  $\Gamma_2$ , iar  $R_{12}$  este distanța dintre acestea.

### 3.2.2. Aplicații pentru calculul inductivităților

❶ Să se calculeze inductivitatea unei bobine toroidale cu secțiunea pătrată, reprezentată în fig. 5. 5.

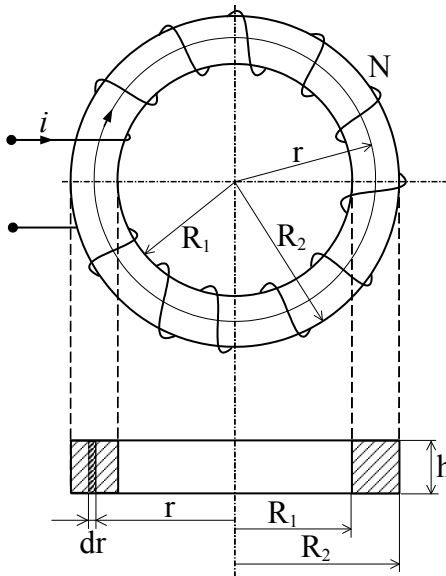


Fig. 3.7.

Se aplică legea circuitului magnetic (teorema lui Ampère),

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = Ni$$

Se alege curba închisă  $\Gamma$  de-a lungul unei linii de câmp pentru care vectorii  $\vec{H}$  și  $d\vec{s}$  sunt omoparaleli. Rezultă astfel

$$H \cdot 2\pi r = Ni \Rightarrow H = \frac{Ni}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_A \vec{B} d\vec{A} = \int_{R_1}^{R_2} \mu H \cdot h dr = \frac{\mu N h}{2\pi} i \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu \cdot N \cdot h}{2\pi} i \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N\Phi}{i} = \mu \frac{N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Dacă secțiunea este rotundă de rază  $a \ll R_1, R_2$ , se consideră o rază medie  $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$  și rezultă:

$$H = \frac{Ni}{2\pi R} = \frac{Ni}{l_m}$$

unde  $l_m = 2\pi R$  este lungimea medie a unei linii de câmp. Rezultă astfel,

$$\Phi = BA = \frac{\mu Ni}{l_m} A; \quad L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu N^2 A}{l_m}.$$

Relația este valabilă și pentru o bobină cilindrică (solenoid) de lungime  $l_m$  mult mai mare decât diametrul acesteia.

2 Să se calculeze inductivitatea proprie pe unitatea de lungime a unei linii bifilare, fig. 3.8, având conductoarele de raze a situate la distanța d (distanța dintre axele de simetrie ale conductoarelor).

Se consideră o porțiune a liniei bifilare de lungime l, cu conductoarele de rază a, situate la distanța d. Se consideră a << d << l. Dacă secțiunea conductoarelor nu este neglijabilă, inductivitatea totală a liniei se compune din inductivitatea exterioară corespunzătoare fluxului magnetic prin suprafața S<sub>r</sub> dintre cele două conductoare (fig. 3.8,a) și din inductivitatea interioară, corespunzătoare fluxului magnetic din interiorul conductoarelor.

Inductivitatea exterioară se calculează aplicând principiul superpoziției:

$$L_e = \frac{\Phi_{S_r}}{i} = \frac{\int_{S_r} \bar{B} d\bar{A}}{i} = \frac{\int_{S_r} (\bar{B}_1 + \bar{B}_2) d\bar{A}}{i} =$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi} \int_a^{d-a} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

Se poate aproxima:

$$L_e \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{d}{a}$$

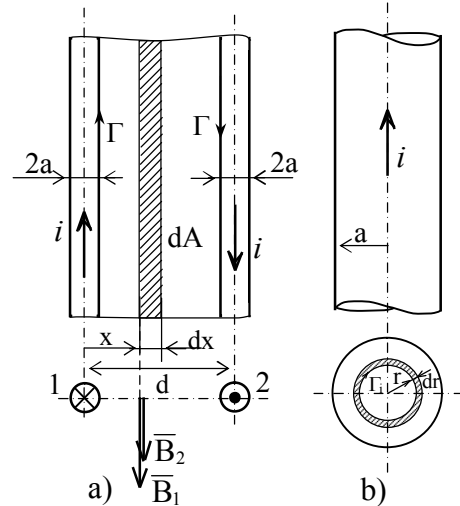


Fig. 3.8.

Inductivitatea interioară se calculează pe baza energiei magnetice interioare a conductoarelor [?]. Astfel, pentru inductivitatea interioară a unui conductor (fig. 3.8,b) rezultă:

$$L_i = \frac{2}{i^2} W_{mi} = \frac{2}{i^2} \int_{V_i} \frac{\mu H_i^2}{2} dV = \frac{\mu}{i^2} \int_0^a \left( \frac{i}{2\pi a^2} r \right)^2 2\pi r l \cdot dr = \frac{\mu l}{8\pi}$$

Inductivitatea proprie a liniei bifilare pe unitatea de lungime este:

$$L' = \frac{L_e + 2L_i}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 4 \ln \frac{d}{a} + \mu_r \right) \text{ H/m} \approx 0,1 \left( 4 \ln \frac{d}{a} + \mu_r \right) \text{ mH/km.}$$

3 Să se calculeze inductivitatea mutuală dintre un conductor rectiliniu filiform și un cadru dreptunghiular reprezentat în fig. 3.9.

Intensitatea câmpului magnetic și respectiv inducția magnetică la distanța r de conductor sunt date de relațiile:

$$H = \frac{i_1}{2\pi r}; \quad B = \mu H.$$

Fluxul magnetic prin suprafața cadrului dreptunghiular se determină astfel:

$$\Phi_{12} = \int_{S_{r2}} \bar{B} \cdot d\bar{A} = \int_{S_{r2}} B b \cdot dr = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} b \cdot \ln \frac{d+a}{d}$$

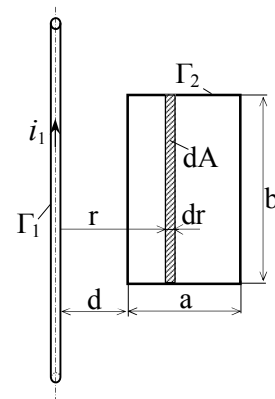


Fig. 3.9.

Inductivitatea mutuală rezultă:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_1} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$

### 3.3. CIRCUITE MAGNETICE

#### 3.3.1. Noțiuni teoretice

Un *circuit magnetic* este un ansamblu de structură dată, alcătuit din corpuri de mare permeabilitate (feromagnetice), aflate în contact direct sau separate prin medii nemagnetice, numite *întrefieruri*, prin care se închid liniile câmpului magnetic.

Calculul circuitelor magnetice se face cu ajutorul legii circuitului magnetic și al legii fluxului magnetic. Calculul constă în determinarea solenației necesare pentru a stabili un anumit flux, sau în calculul fluxului magnetic pentru o solenație dată. În regim staționar și în anumite condiții și în regim cvasistaționar, consecințe ale acestor legi sunt legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice, corespunzând dual legii lui Ohm și respectiv teoremelor lui Kirchhoff pentru circuitele electrice.

**Legea lui Ohm pentru circuite magnetice** se exprimă prin relațiile

$$\begin{cases} u_m = R_m \cdot \phi \\ \phi = A_m \cdot u_m \end{cases} \quad (3.17)$$

care corespund dual relațiilor lui Ohm pentru circuite electrice. prin analogie cu relațiile lui Ohm pentru circuite electrice.

Correspondența duală a mărimilor electrice și magnetice este:

tensiune electrică  $u \leftrightarrow$  tensiune magnetică  $u_m$   
 tensiune electromotoare  $e \leftrightarrow$  tensiune magnetomotoare  $u_{mm}$  (solenație  $\theta$ )  
 intensitate curent electric  $i \leftrightarrow$  flux magnetic fascicular  $\phi$   
 rezistență electrică  $R \leftrightarrow$  reluctanță magnetică  $R_m$   
 conductanță electrică  $G \leftrightarrow$  permeanță  $A_m$  ( $G_m$ )

Pentru porțiuni de circuit de lungime  $l$ , cu aria secțiunii transversale  $A$  și permeabilitatea  $\mu$  constante, reluctanța și respectiv permeanța se calculează cu relații analoge rezistenței și respectiv conductanței electrice:

$$R_m = \frac{l}{\mu A}; \quad A_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\mu A}{l}. \quad (3.18)$$

**Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice** se scriu ușor pe baza corespondenței duale a mărimilor electrice și magnetice. Astfel teorema a I-a Kirchhoff stabilește că suma algebrică a fluxurilor magnetice  $\phi_j$  ale laturilor  $j$  fără dispersie magnetică ramificate într-un nod ( $k$ ) al unui circuit magnetic este în orice moment nulă,

$$\sum_{j \in (k)} \phi_j = 0. \quad (3.19)$$

Teorema a II-a Kirchhoff stabilește că suma algebrică a solenațiilor  $\theta_j$  care înlănțuie laturile fără dispersie ale unui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică  $R_{mj}\phi_j$  de pe laturile ochiului respectiv.

$$\sum_{j \in [m]} \theta_j = \sum_{j \in [m]} R_{mj} \phi_j \quad (3.20)$$

Pentru un circuit magnetic cu  $n$  noduri și  $l$  laturi numărul ecuațiilor ce se obțin prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff sunt date de aceleași relații ca în cazul rețelelor electrice, respectiv cu teorema întâi se obțin  $n - 1$  ecuații, iar cu teorema a doua  $l - n + 1$  ecuații pentru fluxurile magnetice din laturile circuitului.

### 3.3.2. Aplicații pentru calculul circuitelor magnetice

① Un circuit magnetic fără întrefieruri are forma și dimensiunile din fig. 3.10. Să se determine fluxurile magnetice din juguri și coloane pentru următoarele valori ale solenațiilor:  $\theta_1 = \theta_3 = 300 \text{ Asp}$ ,  $\theta_2 = 600 \text{ Asp}$ . Se mai dau:  $A = 24 \text{ cm}^2$ ,  $l_1 = 160 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 60 \text{ mm}$ ,  $\mu = 400 \text{ H/m}$ .

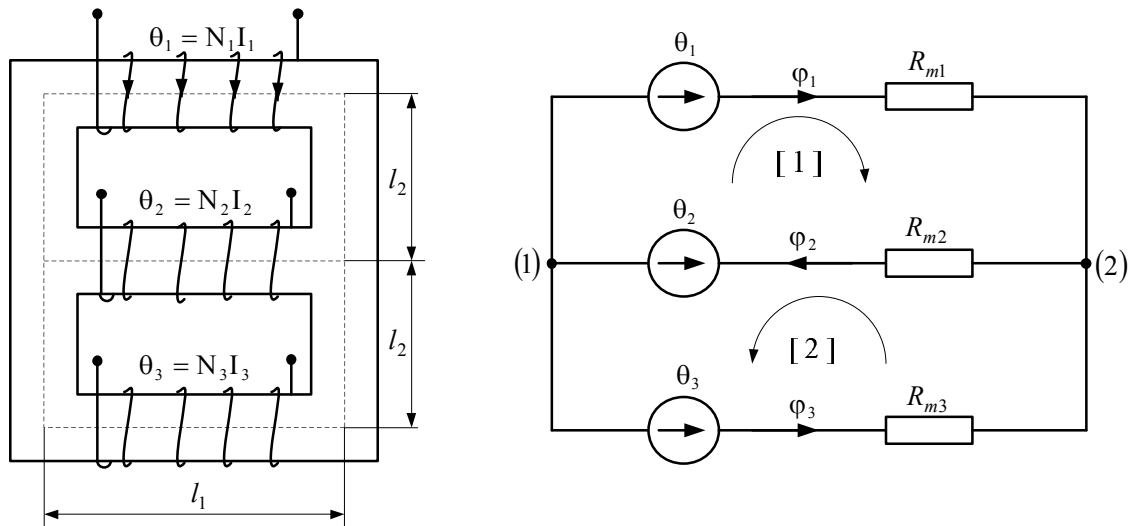


Fig. 3.10.

Se determină reluctanțele porțiunilor de circuit magnetic,

$$R_{m1} = R_{m3} = \frac{l_2 + 2l_2}{\mu A} \approx 0,29 \text{ Asp/Wb}; \quad R_{m2} = \frac{l_1}{\mu A} = 0,17 \text{ Asp/Wb}$$

Circuitul magnetic are  $n = 2$  noduri și  $l = 3$  laturi. Teoremele lui Kirchhoff aplicate la nodul (1) și la ochiurile [1] și [2] dau ecuațiile:

$$\text{T1K:} \quad (1) \quad \phi_1 - \phi_2 + \phi_3 = 0.$$

$$\text{T2K:} \quad [1] \quad R_{m1}\phi_1 + R_{m2}\phi_2 = \theta_1 + \theta_2$$

$$[2] \quad R_{m2}\phi_2 + R_{m3}\phi_3 = \theta_2 + \theta_3$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații rezultă:

$$\phi_1 = \frac{(R_{m2} + R_{m3})\theta_1 + R_{m3}\theta_2 - R_{m2}\theta_3}{\Delta};$$

$$\varphi_2 = \frac{-R_{m2}\theta_1 + R_{m1}\theta_2 + (R_{m1} + R_{m2})\theta_3}{\Delta};$$

$$\varphi_3 = \frac{R_{m3}\theta_1 + (R_{m1} + R_{m3})\theta_2 + R_{m1}\theta_3}{\Delta};$$

în care  $\Delta$  este determinantul sistemului,

$$\Delta = R_{m1}R_{m2} + R_{m2}R_{m3} + R_{m1}R_{m3} = 0,183$$

Rezultă:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\varphi_3}{2} = 14,29 \text{ Wb}.$$

② Pentru electromagnetul din figura 3.11 se cere să se determine solenația  $\theta$  pentru stabilirea în întrefier a unui flux  $\Phi_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ . Grosimea  $g$  a circuitului realizat din tole este 2cm. Datorită izolației dintre tole se va considera un factor de umplere  $k = 0,9$ .

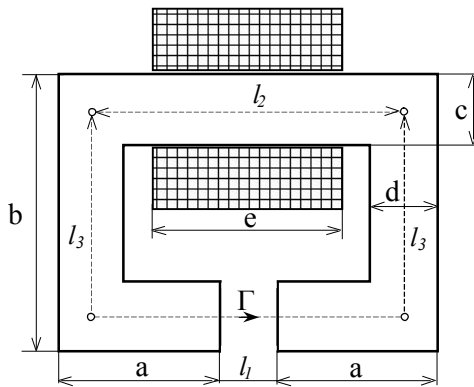


Fig. 3.11.

Celelalte dimensiuni ale circuitului magnetic sunt:

$$l_1 = 20 \text{ mm};$$

$$l_2 = 27 \text{ mm};$$

$$l_3 = 20 \text{ mm};$$

$$a = 60 \text{ mm};$$

$$b = 80 \text{ mm};$$

$$c = 15 \text{ mm};$$

$$d = 25 \text{ mm};$$

$$e = 60 \text{ mm};$$

Aplicând teorema lui Ampère se obține:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = \theta_{s_{\Gamma}} = NI,$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = H_2 l_2 + H_0 l_1 + 2H_3 l_3.$$

Intensitatea câmpului magnetic în întrefier este

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 A_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 79,6 \text{ Asp/m}.$$

Solenația în întrefier  $\theta_0 = H_0 l_1 \cong 1592 \text{ Asp}$ .

Fluxul magnetic în miez este egal cu fluxul magnetic din întrefier,  $\Phi_{Fe} = \Phi_0$  și inducția magnetică este:

$$B_2 = B_{Fe} = \frac{\Phi}{k \cdot A_2} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,9 \cdot 3 \cdot 10^{-4}} \cong 1,85 \text{ T}.$$

Din curba B(H) specifică materialului feromagnetic rezultă  $H_{Fe} = H_2 = 190 \text{ A/cm}$ .

$$\theta_2 = H_{Fe} l_2 = 190 \cdot 9,7 = 1843 \text{ Asp.}$$

În juguri:

$$B_3 = \frac{\Phi}{k \cdot A_3} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{0,9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \cong 1,1 \text{ T}; \Rightarrow H_3 = 3,9 \text{ Asp/m}; \theta_3 = 2H_3 l_3 = 84 \text{ Asp.}$$

Solenăția totală este  $\theta_{S_r} = \theta_0 + \theta_2 + \theta_3 = 1593 + 1843 + 84 = 3520 \text{ Asp.}$

③ În întrefierul electromagnetului de curent alternativ din figura 3.12, fluxul magnetic este  $\Phi_f = 0,0005 \text{ Wb}$ . Partea superioară a circuitului magnetic este construită din oțel electrotehnic, iar armătura inferioară din oțel turnat. Dimensiunile circuitului sunt date în figură, tensiunea de alimentare a bobinelor electromagnetului este de 120 V. Se cere să se dimesioneze bobina (bobinele sunt conectate în paralel) – numărul de spire, curentul, secțiunea conductorului, dimensiunile bobinei. Cum se modifică parametrii bobinelor dacă tensiunea de alimentare este de 2U. Se neglijează fluxul magnetic de dispersie.

Se presupun cunoscute numărul de spire al bobinei  $N/2$  și curentul I absorbit de fiecare bobină în parte. Alegând un contur  $\Gamma$  ca în figură, cu teorema lui Ampère avem

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = \theta_{S_r} = NI.$$

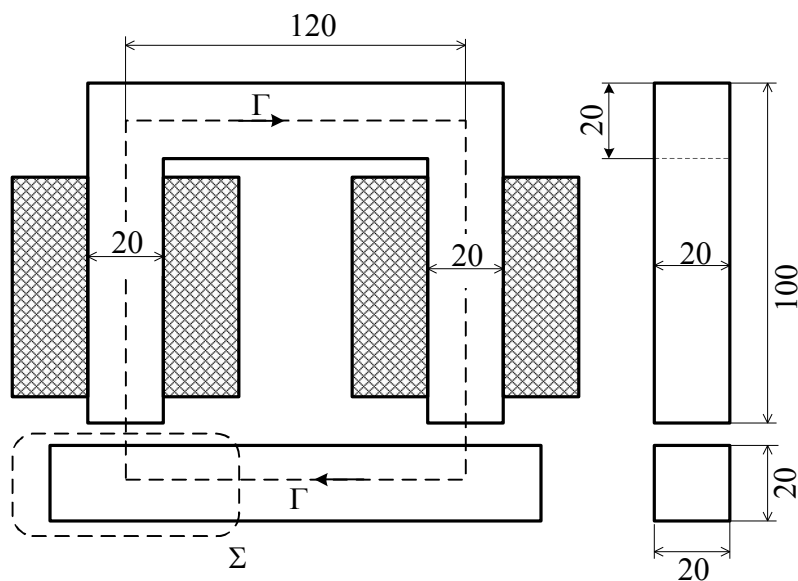


Fig. 3.12.

Conturul  $\Gamma$  cuprinde trei porțiuni distincte, una de oțel electrotehnic, una de aer și una de oțel turnat, teorema lui Ampère devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{s} = H_0 l_0 + H_{\delta} \delta + H_a l_a,$$

unde:  $H_0$  este intensitatea medie a câmpului magnetic;  $l_0$  - lungimea medie a porțiunii



de oțel electrotehnic ( $l_0 = 120 + 2 \cdot 90 = 300\text{mm}$ );  $H_\delta$  - intensitatea câmpului magnetic în aer;  $\delta$  întrefierul total al circuitului,  $\delta = 1\text{mm}$ ;  $H_a$  - intensitatea medie a câmpului magnetic în armătură;  $l_a$  - lungimea medie a armăturii,  $l_a = 120\text{mm}$ .

Inducția magnetică  $B_\delta$ , respectiv intensitatea câmpului magnetic  $H_\delta$  din întrefier se pot determina imediat deoarece sunt date de valoarea fluxului în întrefier:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{B_\delta A}{\mu_0 A} = \frac{\Phi_f}{\mu_0 A},$$

unde  $A$  este suprafața secțiunii transversale a circuitului ( $A = 20 \cdot 20 = 400\text{mm}^2$ ). Astfel,

$$H_\delta = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 10^6 \text{ Asp/m}.$$

Dacă acum se aplică legea fluxului magnetic pentru o suprafață închisă  $\Sigma$ , care taie transversal armătura și trece prin întrefier ca în fig. 3.12, se obține:

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{A} = B_\delta A - B_a A = 0, \text{ de unde rezultă } B_\delta = B_a.$$

Analog, se obține  $B_\delta = B_0$ .

Dacă se cunosc inducțiile magnetice în oțelul electrotehnic și în armătură, și curbele de magnetizare ale materialelor respective, se determină ușor și intensitățile câmpurilor magnetice. Astfel, se obține:

$$B_0 = B_\delta = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{400 \cdot 10^{-6}} = 1,25 \text{ Wb/m}^2; H_0 = 976 \text{ Asp/m};$$

$$B_a = 1,25 \text{ Wb/m}; H_a = 1430 \text{ Asp/m}.$$

Cu datele de mai sus se poate calcula solenația  $\theta_{S_r}$ :

$$\begin{aligned} \theta_{S_r} &= H_0 l_0 + H_\delta \delta + H_a l_a = 976 \cdot 0,3 + 10^6 \cdot 10^{-3} + 1430 \cdot 0,12 = \\ &= 292 + 1000 + 172 = 1464 \text{ Asp}. \end{aligned}$$

Pentru calculul bobinelor se utilizează legea lui Ohm,

$$U = R \cdot I = \rho \frac{N l_m}{2 s} I = \rho \frac{l_m}{s} \frac{\theta_{S_r}}{2},$$

unde  $s$  reprezintă secțiunea conductorului, iar  $l_m$  este lungimea medie a spirelor bobinei. Se poate aprecia  $l_m = 0,12\text{m}$ , astfel mărimea  $s$  rezultă:

$$s = \rho \frac{l_m}{2U} \theta_{S_r} = 0,021 \cdot 10^{-6} \frac{0,12 \cdot 1464}{2 \cdot 120} = 0,154 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,154 \text{ mm}^2.$$

În acest caz s-a luat  $\rho = 0,021 \cdot 10^{-6} \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ . S-a ales conductor de cupru izolat, diametrul conductorului fără izolație fiind de  $0,44\text{mm}$ .

Densitatea normală de curent în bobine de electromagneți cu răcire naturală se ia de aproximativ  $2,5 \text{ A/mm}^2$ . Rezultă curentul admis în bobină

$$I = s \cdot J = 0,385 \text{ A},$$

iar numărul de spire al bobinei

$$\frac{N}{2} = \frac{\theta_{sr}}{2I} = \frac{1464}{2 \cdot 0,385} = 1900 \text{ spire}$$

Dimensiunile aproximative ale bobinei se pot determina pe baza coeficientului de umplere al izolației, care reprezintă raportul dintre suprafața cuprului propriu-zis și suprafața totală a bobinei, coeficient care pentru conductor rotund este  $k = 0,25 \dots 0,5$  (alegem pentru cazul nostru  $k = 0,3$ ). În cazul studiat, secțiunea cuprului propriu-zis al bobinei este

$$A_{cu} = \frac{N}{2} s = 1900 \cdot 0,154 = 292 \text{ mm}^2,$$

iar suprafața totală a secțiunii transversale a bobinei este

$$A_{bob} = \frac{A_{cu}}{k} = \frac{292}{0,3} = 970 \text{ mm}^2.$$

Luând pentru bobină înălțimea  $h = 50 \text{ mm}$ , rezultă grosimea bobinei  $g = 20 \text{ mm}$ . Cu aceste date se verifică imediat că  $l_m = 0,12 \text{ m}$ , altfel calculul trebuia refăcut.

Dacă tensiunea de alimentare a bobinei este  $U' = 2U = 240 \text{ V}$  rezultă:

$$s' = s \frac{U}{U'}; \quad N' = N \frac{U}{U'}; \quad I' = I \frac{U}{U'},$$

dacă se consideră aceeași densitate de curent și aceeași valoare a lungimii  $l_m$ .

Relațiile de mai sus, care arată că numărul de spire al bobinei este proporțional cu tensiunea de alimentare, iar secțiunea conductorului bobinei invers proporțional cu tensiunea, sunt utilizate ori de câte ori se recondiționează bobinele vreunui electromagnet de la o tensiune la alta.

Se mai remarcă, de asemenea, că numărul de spire al bobinei și deci cantitatea de cupru utilizată depind direct de mărimea întrefierului  $\delta$ , întrucât în expresia solenației  $\theta_{sr}$  cea mai mare parte o constituie amper-spirele necesare întrefierului. Cu cât  $\delta$  este mai mic la un flux dat, cantitatea de cupru utilizată este mai mică și puterea în bobină, de asemenea, mai mică.

### 3.4. ENERGIA ȘI FORȚELE CÂMPULUI MAGNETIC

#### 3.4.1. Noțiuni teoretice

Energia localizată în câmpul magnetic al unui sistem de  $n$  circuite (bobine) fixe sau în imobilitate relativă între ele, parcurse de curenții electrici  $i_k$  care generează fluxurile magnetice  $\psi_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), situate într-un mediu liniar din punct de vedere magnetic este dată de relația [12, 14]

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k \psi_k \quad (3.21)$$

numită și *energia de interacțiune a curenților electrici*.

Expresia energiei magnetice poate fi scrisă, în condițiile menționate, și funcție de inductivitățile proprii și mutuale ale circuitelor sub forma

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{jk} i_j i_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n L_{jj} i_j^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ (j < k)}}^n L_{jk} i_j i_k \quad (3.22)$$

Expresia energiei magnetice a unei bobine cu inductivitatea proprie  $L$  parcursă de curentul  $i$

$$W_m = \frac{1}{2} \psi \cdot i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L} \quad (3.23)$$

iar pentru două bobine cuplate magnetic avem

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (3.24)$$

În cazul general, energia magnetică poate fi calculată pe baza *densității de volum a energiei magnetice* este dată de relația [12]

$$w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \quad (3.25)$$

Energia magnetică se calculează integrând expresia densității de volum a energiei pe întreg domeniul în care există câmp magnetic:

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \bar{H} \cdot \bar{B} dV \quad (3.26)$$

Dacă mediul magnetic este liniar, fără magnetizație permanentă, expresia densității de volum a energiei magnetice se poate scrie sub forma

$$w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (3.27)$$

Ca și în cazul câmpului electrostatic, acțiunile ponderomotoare (forțe sau momente) pot fi determinate pe baza expresiei energiei magnetice, utilizând teoremele forțelor generalizate la fluxuri magnetice constante, respectiv la curenți constanți [?]:

$$X_k = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial X_k} \right)_{\psi = \text{const.}} \quad , \text{ respectiv } \quad X_k = \left( \frac{\partial W_m}{\partial X_k} \right)_{i = \text{const.}} \quad (3.28)$$

în care sensul pozitiv al forței generalizate  $X_k$  corespunde creșterii coordonatei generalizate  $x_k$ .

Forțele care acționează în câmp magnetic pot fi calculate și pe baza densității de volum a forței dată de relația [3, 12]

$$\bar{f}_m = \bar{J} \times \bar{B} - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \frac{d\mu}{d\tau} \tau \right) \quad (3.29)$$

în care termenii ce intervin au următoarea semnificație:

- $\bar{J} \times \bar{B}$  - densitatea de volum a forței ce acționează asupra conductoarelor în stare electrocinetică;
- $-\frac{1}{2} H^2 \cdot \text{grad} \mu$  - densitatea de volum a forței datorată neomogenității permeabilității magnetice;
- $\frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \cdot \frac{d\mu}{d\tau} \cdot \tau \right)$  - densitatea de volum a forței datorată variației permeabilității cu densitatea de masă (densitatea forței de magnetostricțiune).

Forța totală exercitată asupra unui corp se va calcula cu relația:

$$\bar{F} = \int_{V_{\text{corp}}} \bar{f}_m dV \quad (3.30)$$

De exemplu, forța ce acționează asupra unui conductor filiform parcurs de curentul  $i$ , situat în câmp magnetic (fig. 3.13), se calculează astfel:

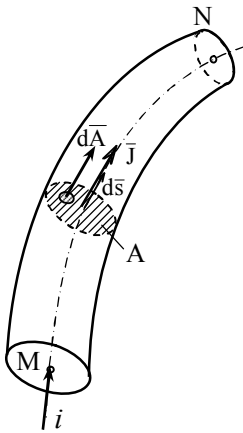


Fig. 3.13.

$$\bar{F} = \int_{V_{\text{corp}}} \bar{f} \cdot dV = \int_{V_{\text{corp}}} (\bar{J} \times \bar{B}) \cdot dV$$

Elementul de volum  $dV = d\bar{A} \cdot d\bar{s}$  și ținând cont că vectorii  $\bar{J}$ ,  $d\bar{A}$  și  $d\bar{s}$  sunt omoparaleli, rezultă:

$$\bar{F} = \int_{V_{\text{corp}}} (\bar{J} \times \bar{B}) (d\bar{A} \cdot d\bar{s}) dV = \int_M^N (d\bar{s} \times \bar{B}) \int_A \bar{J} \cdot d\bar{A},$$

$$\text{respectiv, } \bar{F} = i \int_M^N (d\bar{s} \times \bar{B}).$$

S-a obținut astfel expresia forței Laplace.

### 3.4.2. Aplicații

#### ❶ Forța care se exercită între conductoarele unei linii bifilare.

Pentru inductivitatea liniei bifilare s-a stabilit expresia (§ 3.2.2)

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \cdot \left( 4 \ln \frac{d}{a} + \mu_r \right).$$

Singura variabilă fiind distanța  $d$  dintre conductoare, se va calcula forța de respingere dintre conductoarele liniei (corespunde creșterii coordonatei  $d$ ).

Utilizând expresiile energiei magnetice  $W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\Psi^2}{L}$ , se determină:

$$F_d = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial d}\right)_{\Psi = \text{ct.}} = -\frac{\Psi^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{L}\right) = -\frac{\Psi^2}{2} \cdot \left(-\frac{1}{L^2}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial d},$$

sau 
$$F_d = \left(\frac{\partial W_m}{\partial d}\right)_{i = \text{ct.}} = \frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{1}{2} Li^2\right)_{i = \text{ct.}} = \frac{i^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial d}; \quad \frac{\partial L}{\partial d} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi \cdot d}$$

și rezultă

$$F_d = \mu_0 \frac{i^2 l}{2\pi d}.$$

S-a obținut astfel expresia forței electrodinamice (forța Ampère).

### 2 Forța portantă a unui electromagnet.

Din expresia densității de volum a energiei magnetice scrsă sub forma

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

rezultă că, pentru  $B = \text{const.}$ , energia magnetică are densitatea cu atât mai mare, cu cât permeabilitatea magnetică a mediului  $\mu$  este mai mică.

Astfel, în cazul circuitului magnetic cu întrefier al unui electromagnet reprezentat în figura 3.14, densitatea energiei magnetice în întrefier,  $w_{m0} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , este

mult mai mare decât densitatea energiei magnetice în miez,  $w_{mFe} = \frac{B^2}{2\mu_{Fe}}$ , deoarece

$\mu_{Fe} \gg \mu_0$ , inducția magnetică în miez fiind egală cu cea din întrefier (rezultă simplu aplicând legea fluxului magnetic pentru o suprafață închisă  $\Sigma$  ca cea din figură). Practic, se poate considera că energia magnetică este localizată în întrefier.

Energia magnetică înmagazinată în volumul celor două întrefieruri este

$$W_{m0} = w_{m0} \cdot V_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2A\delta = \frac{B^2 \cdot A \cdot \delta}{\mu_0}$$

și forța portantă a electromagnetului se determină cu teorema forțelor generalizate:

$$F_\delta = -\left(\frac{\partial W_{m0}}{\partial \delta}\right)_{\Psi(B) = \text{ct.}} = -\frac{B^2 A}{\mu_0}$$

Semnul "-" arată că forța este îndreptată în sensul descreșterii întrefierului  $\delta$ , adică este o forță de atracție.

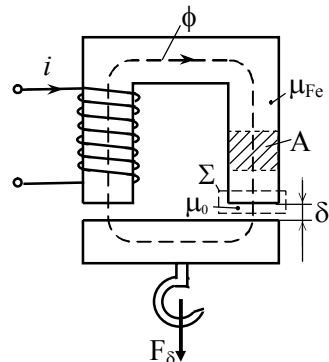


Fig. 3.14.

4 Să se determine cuplul  $C_\alpha$  care acționează asupra bobinei mobile 2 situată în interiorul unei bobine foarte lungi (solenoid) 1, reprezentată în fig. 3.15.

Se aplică teoremele forțelor generalizate,

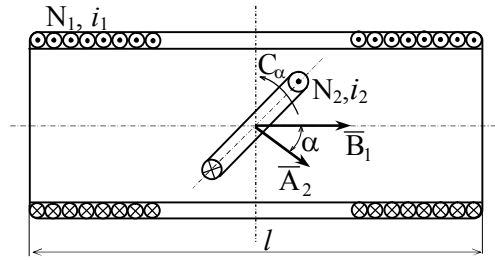


Fig. 3. 15

$$C_{\alpha} = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \alpha} \right)_{i=ct.}$$

Pentru două bobine cuplate magnetic avem

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2,$$

unde:  $L_1, L_2$  sunt inductivitățile proprii constante;  $L_{12} = L_{12}(\alpha)$ . Așadar, cuplul care acționează asupra bobinei 2 este dat de relația:

$$C_{\alpha} = \left( \frac{\partial W_m}{\partial \alpha} \right)_{i=ct} = i_1 i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}.$$

Se aproximează câmpul magnetic al bobinei 1 ca fiind uniform. Intensitatea câmpului magnetic pentru un solenoid este

$$H_1 = \frac{N_1 i_1}{l} \Rightarrow B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l}.$$

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = N_2 \frac{\phi_{12}}{i_1} = N_2 \frac{\bar{B}_1 \bar{A}_2}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_2 \cos \alpha.$$

$$C_{\alpha} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l} i_1 i_2 \sin \alpha.$$

Din ultima relație rezultă că cuplul acționează în sensul micșorării unghiului  $\alpha$ , respectiv al creșterii fluxului  $\Psi_{12}$  și a energiei magnetice.

## 4. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

### 4.1. STRUCTURA CIRCUITELOR DE CURENT CONTINUU

Un *circuit electric* este un ansamblu de generatoare (surse de energie) și receptoare cu legături electrice între ele. Un ansamblu de circuite cu legătură electrică între ele constituie o *rețea electrică*.

Un *circuit electric de curent continuu* este constituit, în general, dintr-un ansamblu de surse de energie și rezistoare, parametrii care intervin în acest caz fiind rezistențele rezistoarelor și tensiunile electromotoare sau curenții surselor de tensiune, respectiv de curent, precum și rezistențele sau conductanțele interioare ale acestor surse.

O *latură* a unei rețele electrice reprezintă o porțiune neramificată cuprinsă între două extremități numite *noduri*. O succesiune de laturi după un contur închis constituie un *ochi* sau o *buclă* a rețelei electrice.

Structura oricărei rețele electrice este complet determinată dacă se cunosc: numărul de laturi ( $l$ ), numărul de noduri ( $n$ ) și numărul ochiurilor sau buclelor independente sau fundamentale ( $o$ ).

Se numește *ochi independent* sau *fundamental* (*buclă independentă* sau *fundamentală*), acel ochi (buclă) care conține cel puțin o latură necomună cu alte ochiuri (bucle) ale rețelei. Există *teorema lui Euler* care dă numărul ochiurilor (buclelor) independente:

$$o = l - n + 1 \quad (4.1)$$

Pe schema rețelei electrice de curent continuu din figura 1.1, s-au notat astfel:

- (1), (2), (3), (4) – noduri,  $n = 4$ ;
- 1, 2, ..., 6 – laturi,  $l = 6$ ;
- [1], [2], [3] – ochiuri independente;
- $R_1, R_2, \dots, R_6$  – rezistoare,
- $E_5, E_6$  – generatoare de tensiune.

Cu relația (4.1) se calculează numărul ochiurilor independente:  $o = 6 - 4 + 1 = 3$ .

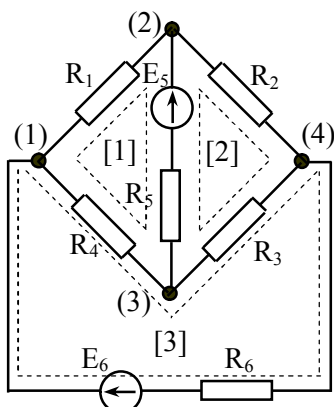


Fig. 4.1.

## 4.2. TRANSFIGURAREA CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

### ● Circuite serie.

Circuitele ale căror elemente sunt conectate astfel încât toate sunt parcurse de același curent, se numesc *circuite în conexiunea serie* sau, prescurtat, *circuite serie*.

Pentru a obține un rezultat cât mai general, se presupune că fiecare din cele  $n$  elemente ale circuitului serie este o sursă, deci are t.e.m. și rezistență, reprezentată prin schema echivalentă serie (fig. 4.1).

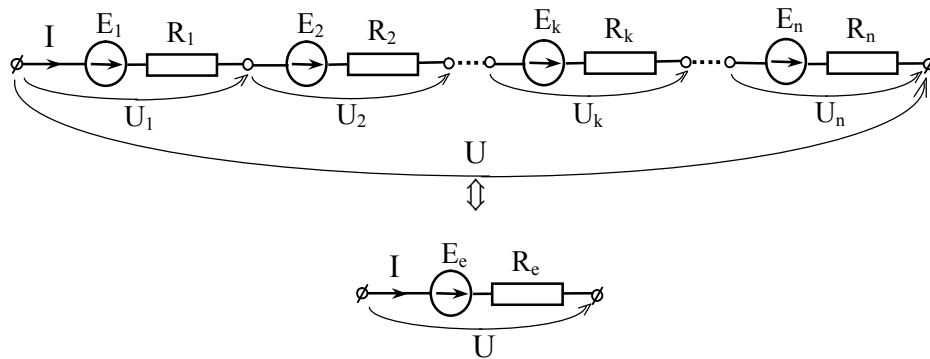


Fig. 4.1.

Se vede imediat că tensiunea la bornele circuitului serie este

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_k + \dots + U_n = \sum_{k=1}^n U_k. \quad (4.1)$$

Aplicând legea conducției electrice, tensiunea la bornele elementului  $k$  al circuitului serie este:

$$U_k = R_k I - E_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Înlocuind în relația anterioară, rezultă:

$$U = I \left( \sum_{k=1}^n R_k \right) - \sum_{k=1}^n E_k \quad (4.3)$$

Pentru dipolul echivalent, legea conducției electrice dă:

$$U = I \cdot R_e - E_e. \quad (4.4)$$

Prin identificare, din ecuațiile (4.32) și (4.33) rezultă:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k; \quad E_e = \sum_{k=1}^n E_k. \quad (4.5)$$

Așadar, circuitul serie are o rezistență echivalentă  $R_e$  egală cu suma rezistențelor elementelor înseriate și o t.e.m. echivalentă  $E_e$  egală cu suma t.e.m. ale elementelor înseriate. În  $E_e$  însumarea se face algebric, luându-se cu semnul "+" t.e.m. care au același sens cu curentul și cu semnul "-" cele care au sens contrar curentului.



Se consideră circuitul serie cu surse echivalente de curent (fig. 4.2), unde

$$I_{gk} = \frac{E_k}{R_k} \text{ și } G_k = \frac{1}{R_k}.$$

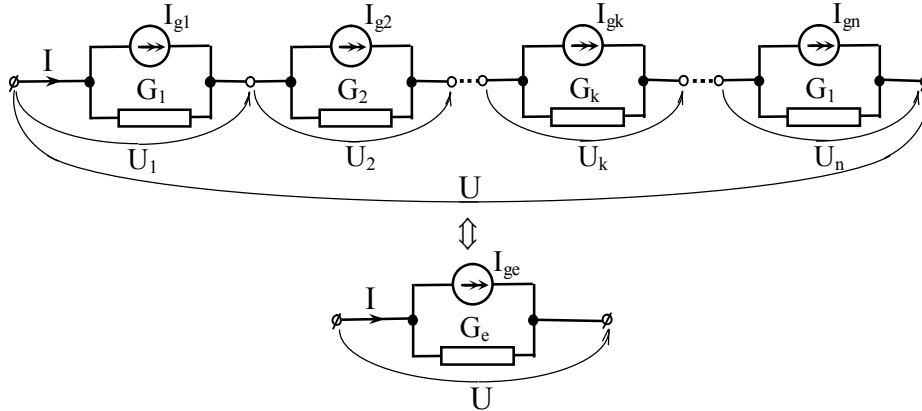


Fig. 4.2.

Aplicând teorema a I-a Kirchhoff, curentul prin rezistorul de conductanță  $G_k$  rezultă:

$$I_k = I - I_{gk}, \quad \text{b (4.6)}$$

iar tensiunea la bornele dipolului  $k$  este

$$U_k = \frac{I_k}{G_k} = \frac{1}{G_k} I - \frac{1}{G_k} I_{gk}. \quad (4.7)$$

Înlocuind în relația tensiunii la borne, se obține:

$$U = \sum_{k=1}^n U_k = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k} \right) I - \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k} I_{gk}. \quad (4.8)$$

Tensiunea la bornele de acces ale dipolului echivalent este

$$U = \frac{1}{G_e} I - \frac{1}{G_e} I_{ge}. \quad (4.9)$$

Prin identificare, din ecuațiile (4.7) și (4.8), rezultă:

$$\frac{1}{G_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}; \quad I_{ge} = \frac{\sum_{k=1}^n R_k I_{gk}}{\sum_{k=1}^n R_k}. \quad (4.10)$$

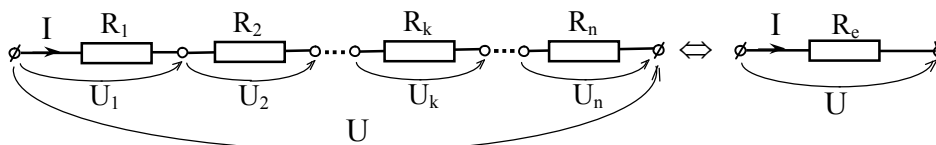


Fig. 4.3.

În cazul particular al circuitului format din  $n$  rezistoare conectate în serie (fig. 4.3), rezultă evident:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k \quad (4.11)$$

sau, funcție de conductanțe 
$$\frac{1}{G_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}. \quad (4.12)$$

Distribuția tensiunilor pe rezistoarele conectate în serie se face proporțional cu rezistența acestora. Astfel, din relația curentului

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \dots = \frac{U_k}{R_k} \dots = \frac{U_n}{R_n}, \quad (4.13)$$

tensiunea la bornele rezistorului  $k$  rezultă:

$$U_k = \frac{R_k}{R_e} U. \quad (4.14)$$

Un caz particular, întâlnit frecvent în practică, este divizorul rezistiv de tensiune a cărei schemă este prezentată în figura 4.24. Tensiunea  $U_1$  aplicată la intrarea circuitului este divizată pe cele două rezistoare înseriate  $R_1$  și  $R_2$ , astfel că tensiunea obținută la ieșire,  $U_2$ , se scrie imediat pe baza relației (4.4) astfel:

$$U_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_1. \quad (4.15)$$

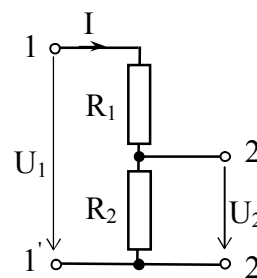


Fig. 4.4.

## 2 Circuite derivație

Circuitele formate din elemente cărora li se aplică aceeași tensiune ca urmare a faptului că sunt conectate la aceeași pereche de borne se numesc *circuite în conexiunea derivație*, prescurtat, *circuite derivație* sau *paralel*.

Considerăm circuitul format din  $n$  surse reale reprezentate prin surse de tensiune, figura 4.5.

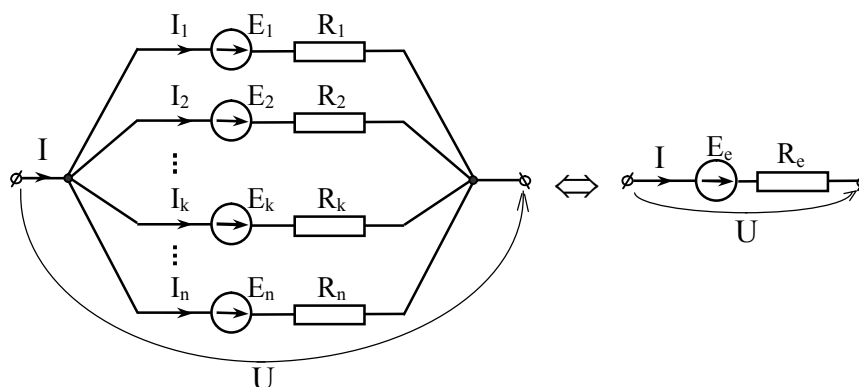


Fig. 4.5.

Aplicând legea conducției electrice, curentul din latura k rezultă:

$$U + E_k = R_k I_k \Rightarrow I_k = U \frac{1}{R_k} + \frac{E_k}{R_k}. \quad (4.16)$$

Cu teorema a I-a Kirchhoff se obține:

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = U \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k} \quad (4.17)$$

Pentru dipolul echivalent, expresia curentului este

$$I = \frac{1}{R_e} U + \frac{1}{R_e} E_e. \quad (4.18)$$

Prin identificarea ecuațiilor (4.17) și (4.18) rezultă:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}; \quad E_e = \frac{\sum_{k=1}^n G_k E_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \quad (4.19)$$

Se consideră cazul când sursele sunt reprezentate prin schema echivalentă cu generatoare de curent, fig. 4.6.

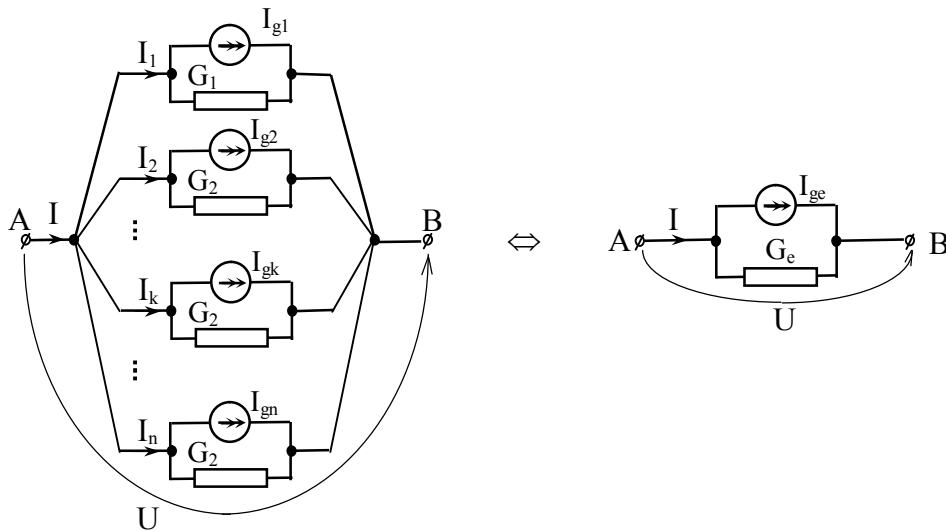


Fig. 4.6.

Cu teorema a I-a Kirchhoff se scrie și în acest caz

$$I = \sum_{k=1}^n I_k \quad (4.20)$$

unde  $I_k = G_k U + I_{gk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Rezultă astfel:

$$I = \left( \sum_{k=1}^n G_k \right) U + \sum_{k=1}^n I_{gk}. \quad (4.21)$$

Pentru dipolul echivalent curentul este:

$$I = G_e U + I_{ge}. \quad (4.22)$$

Prin identificare, din ecuațiile (4.21) și (4.22) rezultă:

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k; I_{ge} = \sum_{k=1}^n I_{gk}. \quad (4.23)$$

În cazul particular a n rezistoare legate în paralel, rezultă în mod evident

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \text{sau} \quad G_e = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (4.24)$$

Dacă cele n rezistoare au valori egale, atunci  $R_e = R/n$ .

Pentru două rezistoare  $R_1$  și  $R_2$  legate în paralel,  $R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

### ❶ Transfigurarea stea - poligon complet

Un circuit în care la fiecare bornă de acces este conectată o singură latură care o unește cu un nod comun (0), se numește *circuit în conexiunea stea* sau, prescurtat, *circuit stea* (fig. 4.7,a). Punctul (0) comun tuturor laturilor se numește *punct neutru*.

Un circuit care are între fiecare pereche de borne de acces are câte o latură se numește circuit în conexiunea *poligon complet* sau *circuit poligon complet* (fig. 4.7,b).

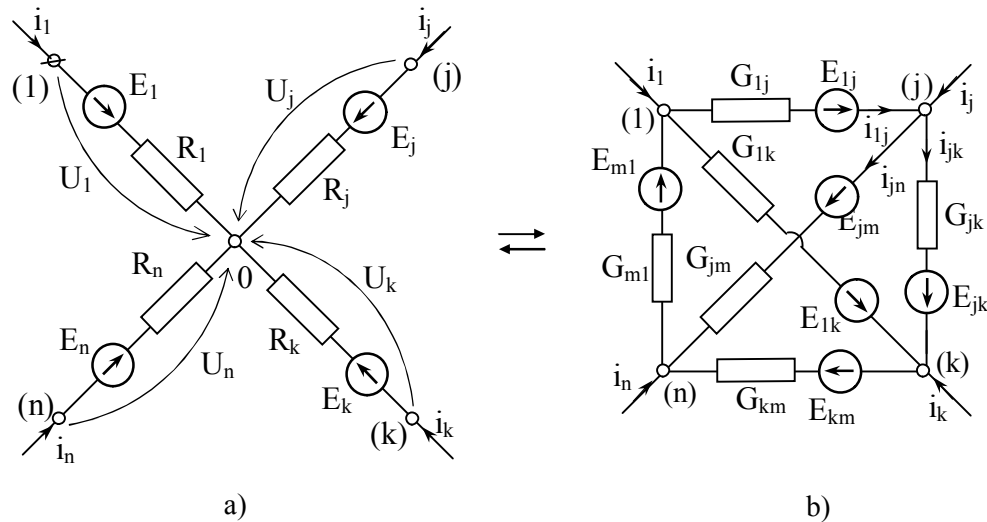


Fig. 4.7.

a) **Circuitul în conexiunea stea.** Intensitatea curentului  $I_j$  care intră pe la borna (j) a circuitului stea, în baza legii lui Ohm se scrie:

$$I_j = G_j (U_j + E_j); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

Tensiunea la bornele laturii j este:

$$U_j = V_j - V_0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.26)$$

Teorema I Kirchoff pentru nodul (0) se scrie:

$$\sum_{k=1}^m I_j = 0. \quad (4.27)$$

Înlocuind în această relație curentul  $I_j$  dat de (4.25) și tensiunea  $U_j$  dată de (4.26), se poate deduce potențialul punctului neutru  $V_0$  astfel:

$$\sum_{j=1}^m G_j (V_j - V_0 + E_j) = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{\sum_{j=1}^m G_j V_j + \sum_{j=1}^m G_j E_j}{\sum_{j=1}^m G_j}.$$

Înlocuind  $V_0$  în (4.25) scrisă sub forma

$$I_j = G_j [(V_j - V_0) + E_j]$$

și schimbând indicii, rezultă succesiv:

$$\begin{aligned} I_j &= G_j \left( V_j - \frac{\sum_{k=1}^m G_k V_k}{\sum_{k=1}^m G_k} - \frac{\sum_{k=1}^m G_k E_k}{\sum_{k=1}^m G_k} + E_j \right) = \\ &= \frac{G_j}{\sum_{l=1}^m G_l} \left( \sum_{k=1}^m G_k V_j - \sum_{k=1}^m G_k V_k - \sum_{k=1}^m G_k E_k + \sum_{k=1}^m G_k E_j \right), \quad j=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

sau, având în vedere că  $V_j - V_k = U_{jk}$ , se poate scrie

$$I_j = \frac{G_j}{\sum_{l=1}^m G_l} \left[ \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m G_k U_{jk} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m G_k (E_j - E_k) \right]$$

În final, expresia curentului luat de circuitul în stea pe la borna (j) se pune sub forma:

$$I_j = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m \frac{G_j G_k}{\sum_{l=1}^m G_l} U_{jk} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m \frac{G_j G_k}{\sum_{l=1}^m G_l} (E_j - E_k) \quad (4.28)$$

b) **Circuitul cu conexiune poligon complet.** Intensitatea curentului din latura  $jk$  a circuitului poligon complet, pe baza legii lui Ohm, se scrie:

$$I_{jk} = G_{jk} (U_{jk} + E_{jk}). \quad (4.29)$$

Expresia curentului luat de circuitul poligon complet pe la borna (j) se deduce aplicând teorema a I-a Kirchhoff, astfel:

$$I_j = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m I_{jk} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m G_{jk} U_{jk} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^m G_{jk} E_{jk}, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (4.30)$$

Din identificarea expresiilor curentilor (4.4) și (4.6) rezultă că cele două circuite, stea și poligon complet, sunt echivalente dacă sunt satisfăcute relațiile:

$$G_{jk} = \frac{G_j G_k}{\sum_{l=1}^m G_l}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m, \quad j \neq k \quad (4.31)$$

și

$$\sum_{k=1}^m G_j E_{jk} = \sum_{k=1}^m \frac{G_j G_k}{\sum_{l=1}^m G_l} (E_j - E_k), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k \neq j. \quad (4.32)$$

Se observă că  $G_{jk} = G_{kj}$  și deci, dacă se dă circuitul stea prin conductanțele sale  $G_k$  și t.e.m.  $E_k$ , se pot calcula toate conductanțele  $G_{jk}$  ale laturilor circuitului în poligon complet, precum și sursele acestuia  $E_{jk}$  care satisfac relațiile:

$$E_{jk} = E_j - E_k, \quad j, k = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq k. \quad (4.33)$$

Trecerea de la un circuit în poligon complet la circuitul echivalent în stea nu este totdeauna posibilă deoarece numărul  $n$  al ecuațiilor independente (4.58) este, în general, mai mare decât numărul  $m$  al conductanțelor  $G_k$  (rezistențelor  $R_k$ ) ale circuitului în stea, cu excepția cazului când  $m = 3$ . Rezultă că, în timp ce transfigurarea stea-poligon complet este întotdeauna posibilă, transfigurarea inversă, poligon – stea este posibilă numai în cazul în care poligonul este un triunghi.

În cazul particular  $m = 3$ , avem transfigurările stea – triunghi și invers, triunghi – stea (fig. 4.25).

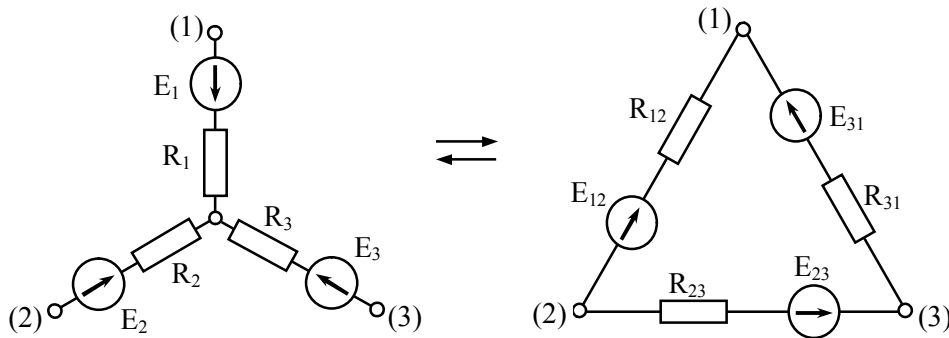


Fig. 4.8.

❶ **Transfigurarea stea - triunghi.** Conductanțele și tensiunile electromotoare ale circuitului echivalent în triunghi se determină cu relațiile (4.58) și (4.60), respectiv:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{31} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad (4.34)$$

$$E_{12} = E_1 - E_2, \quad E_{23} = E_2 - E_3, \quad E_{31} = E_3 - E_1. \quad (4.35)$$

Cu rezistențe, relațiile de echivalență (4.34) pot fi scrise sub forma:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \quad (4.36)$$

② *Transfigurarea triunghi - stea.* Conductanțele sau rezistențele circuitului în stea echivalent unui circuit triunghi dat, se obțin din sistemele de ecuații (4.34) și respectiv (4.36). Expresiile lor pot fi puse sub forma:

$$\begin{cases} G_1 = G_{12} + G_{13} + \frac{G_{12}G_{13}}{G_{23}}, \\ G_2 = G_{12} + G_{23} + \frac{G_{12}G_{23}}{G_{13}}, \\ G_3 = G_{13} + G_{23} + \frac{G_{13}G_{23}}{G_{12}}; \end{cases} \quad (4.37)$$

respectiv,

$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{13}R_{12}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}; \\ R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{cases} \quad (4.38)$$

Tensiunile electromotoare se determină cu rel.(4.59), care pentru  $m = 3$ , se scriu:

$$\sum_{k=1}^3 G_{jk} E_{jk} = \sum_{k=1}^3 G_{jk} (E_j - E_k), \quad j = 1, 2, 3; \quad k \neq j$$

respectiv,

$$\begin{aligned} G_{12}E_{12} + G_{13}E_{13} &= G_{12}(E_1 - E_2) + G_{13}(E_1 - E_3) \\ G_{21}E_{21} + G_{23}E_{23} &= G_{21}(E_2 - E_1) + G_{23}(E_2 - E_3) \end{aligned}$$

Se mai consideră o condiție de forma

$$G_1E_1 + G_2E_2 + G_3E_3 = 0 \quad (4.39)$$

și t.e.m. ale circuitului stea echivalent circuitului triunghi dat, rezultă:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{G_2E_{12} + G_3E_{13}}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ E_2 = \frac{G_3E_{23} + G_1E_{21}}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ E_3 = \frac{G_1E_{31} + G_2E_{32}}{G_1 + G_2 + G_3} \end{cases}, \quad (4.40)$$

sau, sub forma

$$\begin{cases} G_1E_1 = G_{12}E_{12} + G_{13}E_{13} \\ G_2E_2 = G_{23}E_{23} + G_{21}E_{21} \\ G_3E_3 = G_{31}E_{31} + G_{32}E_{32} \end{cases} \quad (4.41)$$

Aceste relații corespund următoarelor relații între curenții de scurtcircuit ai laturilor stelei, respectiv triunghiului (când pe laturi sunt generatoare de curent, fig. 4.9):

$$\begin{cases} I_{s1} = I_{s12} - I_{s31} \\ I_{s2} = I_{s23} - I_{s12} \\ I_{s3} = I_{s31} - I_{s23} \end{cases} \quad (4.42)$$

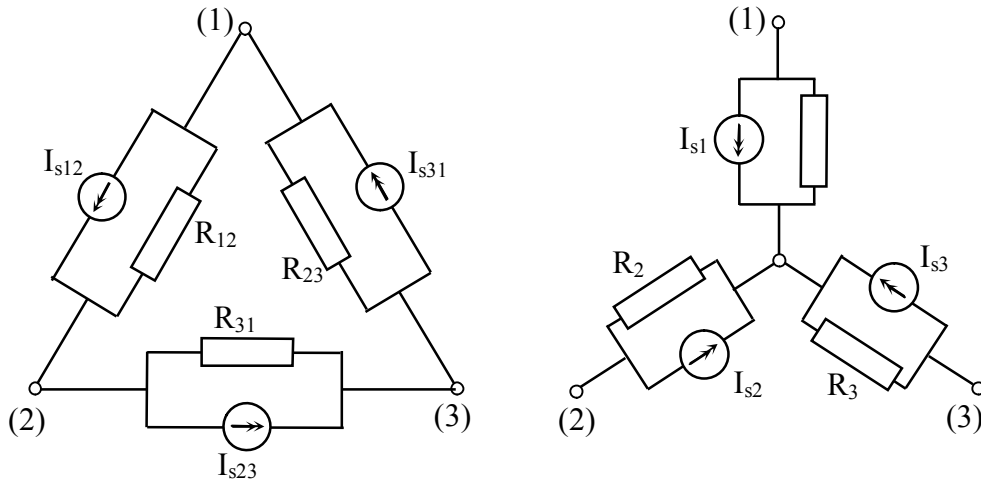


Fig. 4.9.

### Aplicații la transfigurarea circuitelor electrice.

4.1. Să se determine sursa de tensiune echivalentă din fig. 4.10.

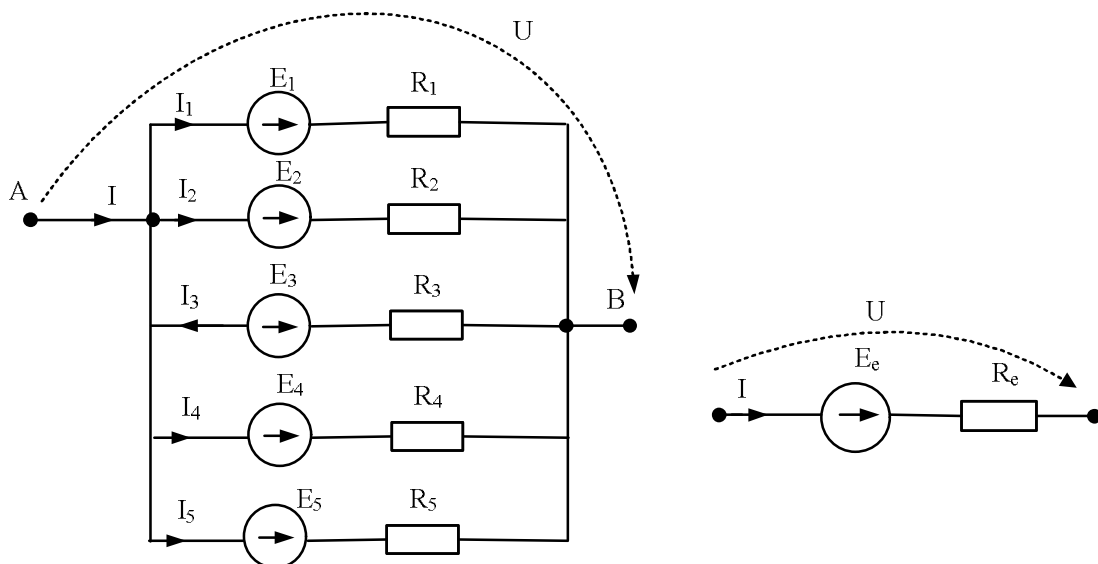


Fig. 4.10.

Se aplică teorema a I-a lui Kirchhoff pentru nodul (A):



$$I = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = \frac{U + E_1}{R_1} + \frac{U + E_2}{R_2} - \frac{E_3 - U}{R_3} + \frac{U + E_4}{R_4} - \frac{E_5 - U}{R_5} =$$

$$= U \sum_{k=1}^5 \frac{1}{R_k} \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5} \right)$$

Pentru circuitul echivalent:

$$I = \frac{U + E_e}{R_e} = U \cdot \frac{1}{R_e} + \frac{E_e}{R_e}$$

Din echivalența ecuațiilor rezultă relațiile:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{R_k}, \quad E_e = R_e \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} - \frac{E_5}{R_5} \right)$$

sau:

$$E_e = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

Termenii  $E_k G_k$  se iau cu semnul "–" dacă  $E_k$  este orientată invers față de tensiunea de la borne  $U$ .

4.2. Să se determine sursa de tensiune echivalentă a grupării din fig. 4.11.

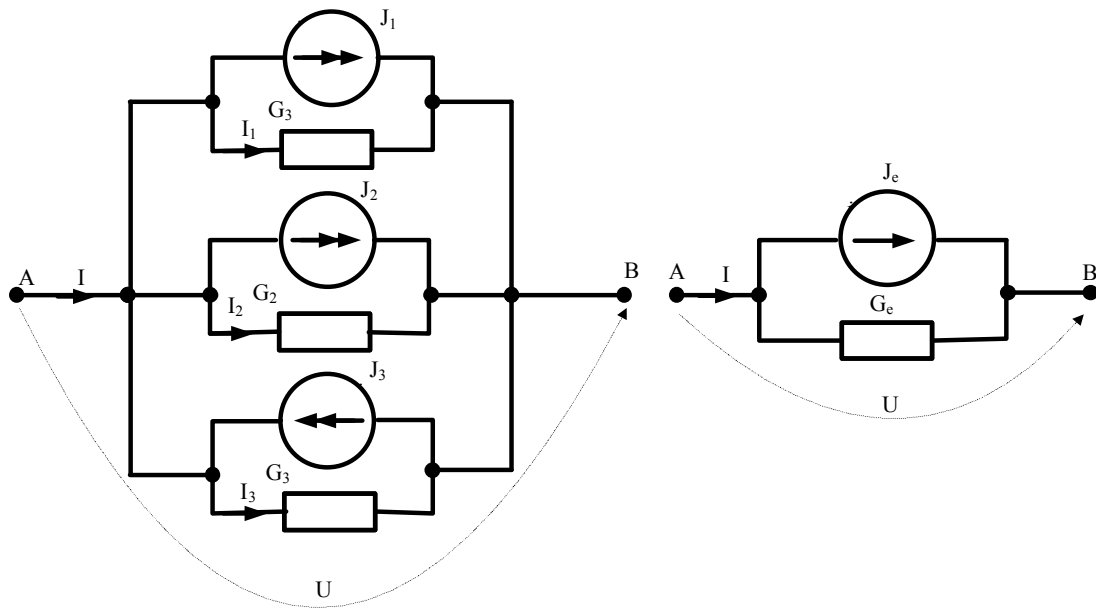


Fig. 4.11.

$$\begin{cases} I = J_1 + J_2 - J_3 + U(G_1 + G_2 + G_3) \\ I = J_e + U \cdot G_e \end{cases}$$

$$J_e = J_1 + J_2 - J_3; \quad G_e = G_1 + G_2 + G_3.$$

4.3. Să se determine rezistența echivalentă pentru conexiunea de tip lanț infinit (scară) a rezistoarelor.

a) Conexiunea lanț infinit de tip I, fig. 4.12.

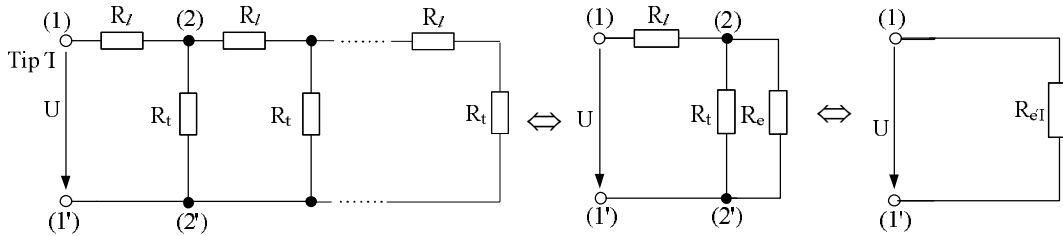


Fig. 4.12.

$$R_e(1 - 1') = R_e(2 - 2') \text{ lanțul este infinit;}$$

$$R_e = R_l + \frac{R_t \cdot R_l}{R_t + R_l} \Rightarrow R_e \text{ rezistența dipolului echivalent;}$$

$$R_e = \frac{R_l}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_t}{R_l}} \right].$$

b) Conexiunea de tip  $\Gamma$ , fig. 4.13.

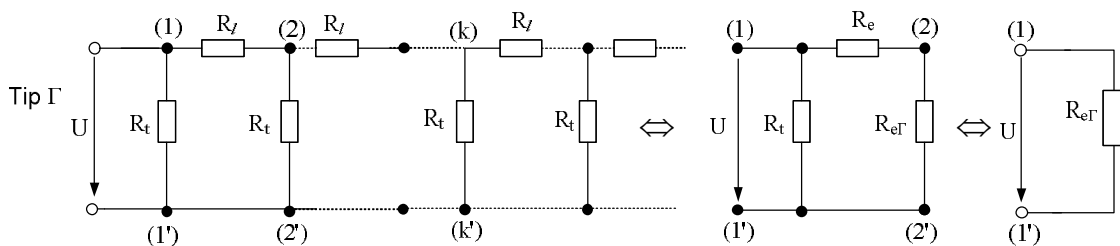


Fig. 4.13.

$$R_{e\Gamma} = \frac{R_t(R_l + R_{e\Gamma})}{R_t + R_l + R_{e\Gamma}} \Rightarrow R_{e\Gamma} = \frac{R_l}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4R_t}{R_l}} - 1 \right]$$

4.3. Opt rezistențe sunt conectate în forma unui pătrat cu diagonalele unite în centru, rezistența fiecărei laturi este  $R$ , (fig. 4.14). Se cere să se calculeze rezistența echivalentă:

- între două vârfuri opuse  $a - a'$ ;
  - între două vârfuri adiacente  $a - b$ ;
  - între un vârf și centrul pătratului  $a - c$ .
- Varianta I.

Prin aplicarea teoremelor transfigurării, se poate ajunge la o rețea formată numai de rezistențe conectate în serie și în paralel, fără a mai avea deci legături în punte.

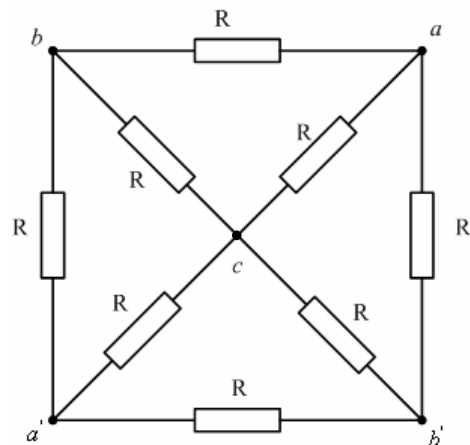


Fig. 4.14.

Cazul a). Rezistența echivalentă  $R_{aa'}$  între două vârfuri opuse  $a-a'$ , se poate obține prin transfigurarea sistemelor de câte trei rezistențe conectate în stea, în nodul  $b$ , respectiv  $b'$ , fig. 4.7.

Dacă  $R_1, R_2, R_3$  sunt rezistențele din conexiunea stea, atunci rezistențele  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$ , din conexiunea triunghi se determină din:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}.$$

În cazul dat,  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  și deci rezultă:

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R' = 3R.$$

Între vârfurile  $a-a'$  se obțin două rezistențe  $R'$  conectate în paralel cu două grupuri de rezistențe – formate din două rezistențe  $R'$  conectate în paralel cu rezistența  $R$  – conectate în serie, fig. 4.15. Rezistența echivalentă  $R_{aa'}$ , între vârfurile  $a-a'$  se obține din:

$$\frac{1}{R_{aa'}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{\frac{2}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'}}},$$

de unde se obține:

$$\frac{1}{R_{aa'}} = \frac{3}{R'} + \frac{1}{2R}.$$

Înlocuind pe  $R'$  în funcție de  $R$ , se obține:

$$R_{aa'} = \frac{2}{3}R.$$

Cazul b). Rezistența echivalentă  $R_{ab}$ , între două vârfuri adiacente  $ab$ , se obține prin aplicarea teoremei transfigurării sistemelor de rezistențe din conexiunile triunghi având vârfurile  $acb'$ , respectiv  $bca'$ , fig. 4.16.

Dacă  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  sunt rezistențele din conexiunea triunghi, atunci rezistențele  $R_1, R_2, R_3$  din conexiunea stea se obține din:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

În cazul dat,  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R$  și deci și  $R_1 = R_2 = R_3 = R'' = \frac{1}{3}R$ .

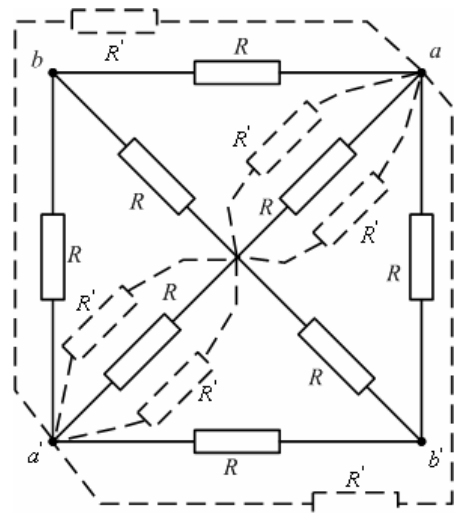


Fig. 4.15.

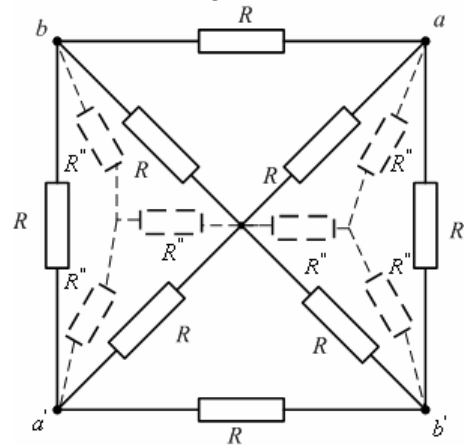


Fig. 4.16.

Între vîrfurile  $ab$ , rezistența  $R$  este conectată în paralel cu două rezistențe  $R$  conectate în serie cu un grup de rezistențe (format din două rezistențe  $R$  conectate în paralel cu alte două rezistențe  $R$  și în serie cu rezistența  $R$ ).

Rezultă,

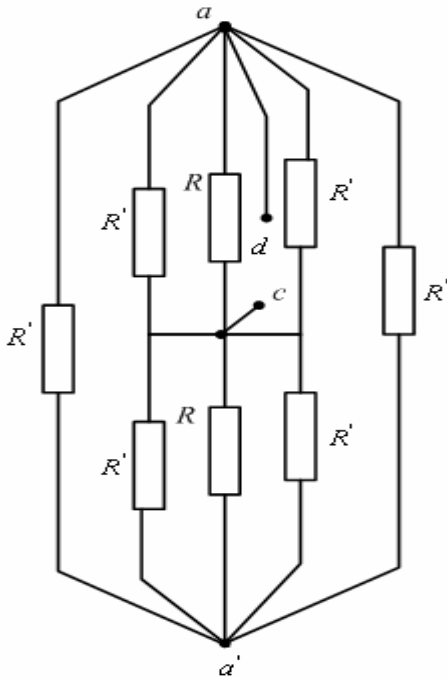


Fig. 4.17.

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'' + \frac{(R'' + R'')(R'' + R + R'')}{R'' + R'' + R'' + R + R''} + R''}$$

de aici rezultă:

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R} + \frac{4R'' + R}{4R''(3R'' + R)}$$

Înlocuind pe  $R''$  în funcție de  $R$ , se obține  $R_{ab}$ :

$$R_{ab} = \frac{8}{15} R.$$

*Cazul c).* Rezistența echivalentă  $R_{ac}$ , între unul din vîrfuri și centru se obține prin aplicarea teoremei transfigurării sistemelor de rezistențe în conexiune stea cu centrul în  $b$ , respectiv  $b'$ , ca în fig. 4.16. Se obține astfel circuitul echivalent din fig. 4.17, unde  $R' = 3R$ .

Între vîrfurile  $a$  și centrul  $c$ , rezistențele  $R, R', R'$  sunt conectate în paralel cu grupul

format din două rezistențe  $R'$  (în paralel), conectate în serie cu grupul de rezistențe  $R', R$ , și  $R'$  (conectate în paralel).

Rezultă:

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{\frac{1}{2}R' + \frac{RR'}{2R + R'}}.$$

Înlocuind pe  $R'$  în ecuația precedentă, se obține o ecuație în  $R$ , din care se determină  $R_{ac}$ :

$$R_{ac} = \frac{7}{15} R.$$

*Varianta II.*

Sistemul este format din rezistențe identice. În raport cu bornele față de care se calculează rezistența echivalentă, sistemul prezintă o simetrie pe bază căreia se pot identifica nodurile din rețea care au același potențial (dacă se alimentează sistemul de la o sursă de tensiune constantă). Se pot uni nodurile echipotențiale prin conductoare perfecte și astfel se poate reduce

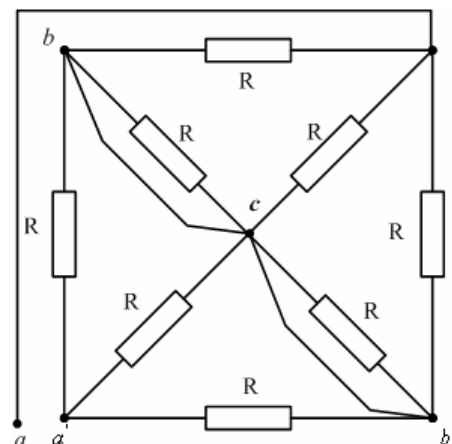


Fig. 4.18

sistemul cu rezistențe conectate în puncte, la un sistem cu rezistențe conectate numai în serie și în paralel

*Cazul a).* Din fig. 4.6 se deduce că nodurile  $b$ ,  $b'$  și  $c$  au același potențial. Unind aceste noduri, se obține rețeaua din fig. 4.10. Se obține un sistem de trei rezistențe egale, conectate în paralel între nodurile  $a - c$  și în serie cu alte trei rezistențe egale, conectate în paralel între nodurile  $c - a'$ .

Rezistența echivalentă, în raport cu bornele  $a - a'$  este:

$$R_{aa'} = R'_{ac} + R'_{ca'}$$

unde :

$$R'_{ac} = \frac{R}{3} = R'_{ca'}$$

Rezultă:

$$R_{aa'} = \frac{2R}{3}$$

Se obține același rezultat ca în prima variantă.

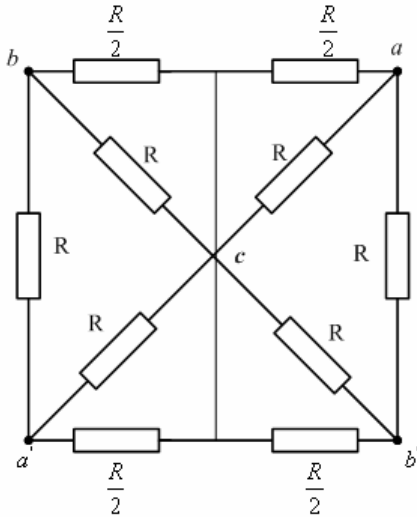


Fig. 4.19

*Cazul b).* Din fig. 4.6. se constată că mijlocul rezistențelor conectate între nodurile  $a - b$  și  $a' - b'$  au același potențial cu nodul  $c$ . Unind aceste puncte se obține rețeaua din fig. 4.14. Se observă că rezistența echivalentă  $R'_{bc}$  dintre nodurile  $b - c$ , este egală cu rezistența echivalentă  $R_{ca}$  dintre nodurile  $c - a$ . Rezultă,  $r_{ab} = r'_{bc} + r'_{ca}$ .

Între nodurile  $b - c$  sunt conectate trei rezistențe în paralel: una este  $\frac{R}{2}$ , a doua este  $R$ , iar a treia este formată dintr-o rezistență  $R$  în serie cu două rezistențe:  $R$  și  $\frac{R}{2}$  conectate în paralel. Deci,

$$\frac{1}{R'_{bc}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{R}{2}}$$

În final, rezultă

$$R_{ab} = 2R'_{bc} = \frac{8R}{15}$$

*Cazul c).* Din fig. 4.19. se constată că nodurile  $b - b'$  au același potențial dacă rețeaua este alimentată pe la bornele  $ac$ . Unind aceste noduri se obține rețeaua din fig. 4.20. Rezistența echivalentă  $r_{ac}$  este:

$$R_{ac} = \frac{R(R'b' + R'_{bc'})}{R + R'b' + R'_{bc'}}$$

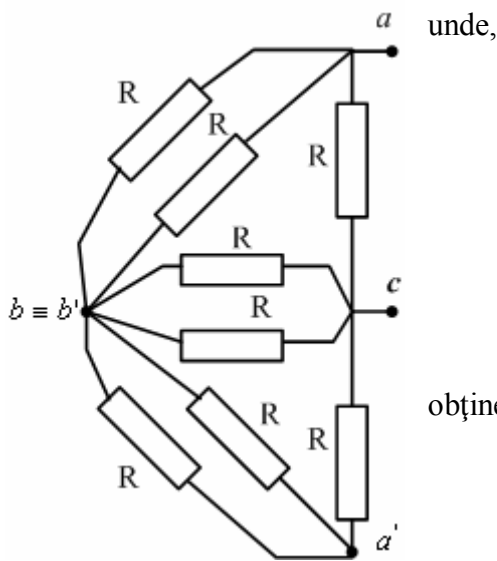


Fig. 4.20

unde, 
$$R'_{ab'} = \frac{R}{2},$$

$$R'_{bc'} = \frac{\frac{R}{2} \left( \frac{R}{2} + R \right)}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R}.$$

Înlocuind în  $R_{ac}$  pe  $R'_{ab'}$ , pe  $R_{bc}$  și  $R'_{bc'}$ , se obține același rezultat ca la prima variantă,

$$R_{ac} = \frac{R \left( \frac{R}{2} + \frac{3R}{8} \right)}{R + \frac{R}{2} + \frac{3R}{8}} = \frac{7}{15} R.$$

### 4.3. ANALIZA REȚELELOR ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

#### 4.3.1. Introducere

Se dau t.e.m. ale generatoarelor de tensiune și curenții generatoarelor de curent și valorile rezistențelor sau conductanțelor. Analiza constă în determinarea curenților prin laturile rețelei sau a tensiunilor la bornele elementelor de circuit.

##### Metode de analiză:

- 1) Metoda bazată pe teoremele lui Kirchhoff;
- 2) Metoda curenților ciclici (de contur);
- 3) Metoda potențialelor la noduri;
- 4) Metoda suprapunerii efectelor;
- 5) Metode pentru obținerea răspunsului pe o latură: teoremele generatoarelor echivalente de tensiune și de curent.

Pentru primele trei metode, calcul se poate efectua prin:

- a) metoda directă – scrierea ecuațiilor rețelei și rezolvarea sistemului de ecuații obținute;
- b) metoda matricială – utilă pentru aplicații pe calculator.

La calculul prin metoda matricială se utilizează matricile de incidență reduse ale laturilor la nodurile sau la ochiurile independente ale rețelei.

### 4.3.2. Aplicații și probleme

1) Să se determine prin metoda bazată pe teoremele lui Kirchoff, metoda curenților ciclici și prin metoda potențialelor la noduri curenții care străbat circuitul din fig. 4.13. Se dau următoarele date:

$$E_1 = 80\text{V}; E_4 = 50\text{V}; E_5 = 110\text{V}; E_7 = 65\text{V}; E_8 = 160\text{V}; R_1 = 20\Omega; R_2 = 30\Omega;$$

$$R_3 = 10\Omega; R_4 = 30\Omega; R_5 = 5\Omega; R_6 = 20\Omega; R_7 = 5\Omega; R_8 = 15\Omega.$$

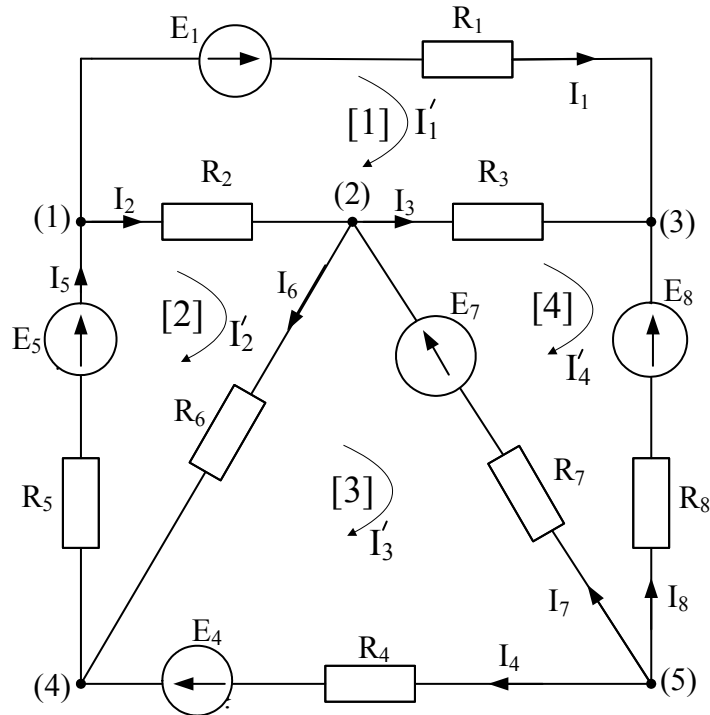


Fig. 4.21

#### a) Teoremele lui Kirchoff.

Metoda directă,

$$\text{T1K: } \begin{cases} (1) I_1 + I_2 - I_5 = 0 \\ (2) -I_2 + I_3 + I_6 - I_7 = 0 \\ (3) -I_1 - I_3 - I_8 = 0 \\ (4) -I_4 + I_5 - I_6 = 0 \end{cases} \quad \text{T2K: } \begin{cases} [1] R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_1 \\ [2] R_2 I_2 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = E_5 \\ [3] R_4 I_4 - R_6 I_6 - R_7 I_7 = E_4 - E_7 \\ [4] R_3 I_3 + R_7 I_7 - R_8 I_8 = E_7 - E_8 \end{cases}$$

Metoda matriceală.

Nu există laturi cu generatoare de curent sau cu generatoare ideale de tensiune. În forma matriceală, ecuațiile corespunzătoare teoremelor lui Kirchoff se scriu:

$$\text{T1K: } [A_{n',1}] \cdot [I_1] = [0_{n'}].$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T2K:  $[R'_{o,l}] \cdot [I_l] = E'_o$  în care,  $[R'_o] = [B_{o,l}] \cdot [R_{l,l}]$ ,

$[R_{l,l}]$  fiind matricea diagonală de ordinul  $l$  a rezistențelor laturilor rețelei.

$$R'_{o,l} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & & & & & & & 0 \\ & R_2 & & & & & & \\ & & R_3 & & & & & \\ & & & R_3 & & & & \\ & & & & R_3 & & & \\ & & & & & R_3 & & \\ & & & & & & R_3 & \\ & & & & & & & R_3 \\ 0 & & & & & & & R_3 \end{bmatrix}$$

Forma comasată, T1K+T2K:

$$[K_1] \cdot [I_1] = [S_1]; [K_1] = \begin{bmatrix} A_{n',l} \\ R'_{o,l} \end{bmatrix}; [S_1] = \begin{bmatrix} O_{n'} \\ E'_o \end{bmatrix}; [I_1] = [K_1]^{-1} \cdot [S_1]$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \dots \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 & R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & R_6 & -R_7 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & R_7 & -R_8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ E_1 \\ E_5 \\ E_4 - E_7 \\ E_7 - E_8 \end{bmatrix}$$

### b) Metoda curenților ciclici.

$$\begin{aligned} [1] \quad & (R_1 + R_2 + R_3)I'_1 - R_2I'_2 - R_3I'_4 = E_1 \\ [2] \quad & -R_2I'_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I'_2 - R_6I'_3 = E_5 \\ [3] \quad & -R_6I'_2 + (R_4 + R_6 + R_7)I'_3 - R_7I'_4 = E_4 - E_7 \end{aligned}$$



$$[4] \quad -R_3 I_1 - R_7 I_3 + (R_3 + R_7 + R_8) I_4 = E_7 - E_8$$

Matricial,

$$[R'_{4,4}] \cdot [I'_4] = [E'_4]$$

$$[R'] = [B_{4,8}] \cdot [R_8] \cdot [B_{4,8}]^t = [E'_4]; [E'_4] = [B_{4,8}] \cdot [E_8]$$

$$[I_8] = [B_{4,8}]^t \cdot [I'_4] = [B_{4,8}]^t \cdot [R'_{4,4}]^{-1} \cdot [E'_4]$$

### c) Metoda potențialelor la noduri.

Metoda directă.

$$(1) (G_1 + G_2 + G_5) V_1' - G_2 V_2' - G_1 V_3' - G_5 V_4' = -G_1 E_1 + G_5 E_5$$

$$(2) -G_2 V_1' + (G_2 + G_3 + G_6 + G_7) V_2' - G_3 V_3' - G_6 V_4' = G_7 E_7$$

$$(3) -G_1 V_1' - G_3 V_2' + (G_1 + G_3 + G_8) V_3' = G_1 E_1 + G_8 E_8$$

$$(4) -G_5 V_1' - G_6 V_2' + (G_4 + G_5 + G_6) V_4' = G_4 E_4 - G_5 E_5$$

Metoda matricială.

În formă matricială, sistemul de ecuații se scrie:

$$[G'] \cdot [V'] = -[I'_{sc}]$$

în care,  $[G']_{4,4} = [A]_{4,8} \cdot [G]_{8,8} \cdot [A]_{4,8}^t$ ,  $[G]_{8,8}$  fiind matricea diagonală de ordinul 8 a conductanțelor laturilor rețelei,

$$[G]_{8,8} = \begin{bmatrix} G_1 & & & & & & & 0 \\ & G_2 & & & & & & \\ & & G_3 & & & & & \\ & & & G_4 & & & & \\ & & & & G_5 & & & \\ & & & & & G_6 & & \\ & & & & & & G_7 & \\ 0 & & & & & & & G_8 \end{bmatrix}$$

$$[I'_{sc}]_4 = [A]_{4,8} \cdot [I_{sc}]_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 E_1 \\ 0 \\ 0 \\ G_4 E_4 \\ G_5 E_5 \\ 0 \\ G_7 E_7 \\ G_8 E_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E_1 - G_5 E_5 \\ G_7 E_7 \\ -G_1 E_1 - G_8 E_8 \\ -G_4 E_4 + G_5 E_5 \end{bmatrix}$$

Tensiunile la bornele laturilor se obțin cu relația

$$[U]_8 = [A]_{4,8}^t \cdot [V]_4 = -[A]_{4,8}^t \cdot [G']_{4,4}^{-1} \cdot [I'_{sc}]_4$$

2) Două surse de curent continuu de tensiuni electromotoare diferite,  $U_{e1}$  și  $U_{e2}$ , de rezistențe interioare neglijabile alimentează un circuit format din cinci rezistențe conectate ca în fig. 7.9. Să se calculeze intensitățile curenților care trec prin cele cinci rezistențe. Se dau următoarele date:  $U_{e1} = 50 \text{ V}$ ;  $U_{e2} = 80 \text{ V}$ ;  $R_1 = 5 \ \Omega$ ;  $R_2 = 8 \ \Omega$ ;  $R_3 = 20 \ \Omega$ ;  $R_4 = 40 \ \Omega$ ;  $R_5 = 60 \ \Omega$ ; Problema se va rezolva prin metoda bazată pe teoremele lui Kirchhoff, prin metoda curenților ciclici și prin metoda potențialelor la noduri.

Numărul de ochiuri fundamentale o se determină cu ajutorul teoremei lui Euler:  $o = l - n + 1$ . În cazul circuitului dat numărul de laturi este  $l = 5$ , numărul de noduri este  $n = 3$ , de unde rezultă numărul de ochiuri fundamentale fiind egal cu 3.

#### a) Teoremele lui Kirchhoff.

Inițial se alege arbitrar pe fiecare latură sensul pozitiv al curenților, la fel se procedează și în cazul ochiurilor independente, fig. 4.22.

Prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în nodurile (1) și (3) se obține:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_5 = 0 \quad (1)$$

$$-I_2 - I_4 + I_5 = 0 \quad (2)$$

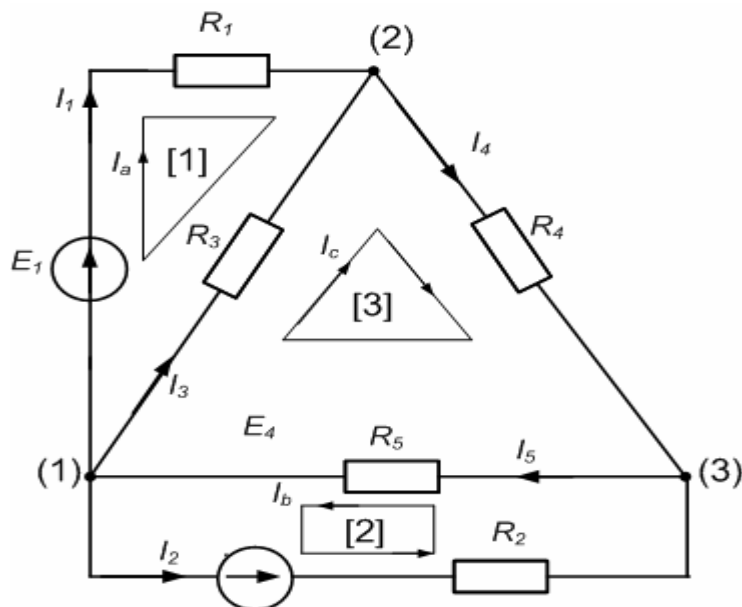


Fig. 4.22.

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff, pentru fiecare dintre cele trei ochiuri, se obține:

$$5 \cdot I_1 - 20 \cdot I_3 = 50 \quad (3)$$

$$8 \cdot I_2 + 60 \cdot I_5 = 80 \quad (4)$$

$$20 \cdot I_3 + 40 \cdot I_4 + 60 \cdot I_5 = 0 \quad (5)$$

Din ultimele cinci ecuații obținute se formează un sistem determinat, din care se pot calcula curenții  $I_1, I_2 \dots I_5$ .

Din ecuațiile (2) și (3) se obține:

$$I_1 = I_5 - I_2 - I_3 \quad (1')$$

$$I_4 = I_5 - I_2 \quad (2')$$

Se înlocuiesc  $I_4$  și  $I_5$  în ecuațiile (4), (5) și (6),

$$-I_2 - 5 \cdot I_3 + I_5 = 10 \quad (3')$$

$$2 \cdot I_2 + 15 \cdot I_5 = 20 \quad (4')$$

$$-2 \cdot I_2 + I_3 + 5 \cdot I_5 = 0 \quad (5')$$

Din ultimele trei ecuații se pot calcula curenții  $I_2, I_3$  și  $I_5$  prin regula lui Cramer:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 20 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 15 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-150 + 520}{152 - 65} = \frac{370}{217} = 1,70 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{1}{217} \begin{vmatrix} -1 & 10 & 1 \\ 2 & 20 & 15 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2,12 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{1}{217} \begin{vmatrix} -1 & -5 & 10 \\ 2 & 0 & 20 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,10 \text{ A}$$

Substituind pe  $I_2, I_3$  și  $I_4$  în ecuațiile (1') și (2') se obține:

$$I_1 = 1,10 - 1,70 + 2,12 \cong 1,52 \text{ A}$$

$$I_4 = 1,10 - 1,70 + 2,12 \cong -0,60 \text{ A}$$

Curenții, prin rezistența  $R_2$  și prin rezistența  $R_4$ , au sensurile pozitive reale opuse față de alegerea arbitrară inițială din fig. 4.14; prin rezolvarea ecuațiilor pentru acești curenți au rezultat valori negative.

**b) Metoda curenților ciclici**

Se aleg arbitrar curenții ciclici în cele trei circuite, se stabilesc trei ecuații, câte una pentru fiecare ochi de rețea, necunoscutele fiind  $I_a, I_b, I_c$ ,

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_a - R_3I_c = E_1 \\ (R_2 + R_5)I_b - R_5I_c = E_2 \\ (R_3 + R_4 + R_5)I_c - R_3I_a + R_5I_b = 0 \end{cases}$$

sau,

$$\begin{cases} 25 \cdot I_a - 20 \cdot I_c = 50 \\ 68 \cdot I_b + 60 \cdot I_c = 80 \\ 120 \cdot I_c - 20 \cdot I_a + 60 \cdot I_b = 0 \end{cases}$$

Simplificând sistemul se obține:

$$\begin{cases} 5 \cdot I_a - 40 \cdot I_c = 10 \\ 17 \cdot I_b + 15 \cdot I_c = 20 \\ -I_a + 3 \cdot I_b + 6 \cdot I_c = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul prin regula lui Cramer,

$$I_a = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 0 & -4 \\ 20 & 17 & 15 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 17 & 15 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1020 - 240 - 450}{510 - 68 - 225} = \frac{330}{217} = 1,52 \text{ A};$$

$$I_b = \frac{1}{217} \begin{vmatrix} 5 & 10 & -4 \\ 0 & 20 & 15 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{600 - 150 - 80}{127} = \frac{370}{217} = 1,70 \text{ A};$$

$$I_c = \frac{1}{217} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 17 & 20 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{170 - 300}{127} = -\frac{130}{217} = -0,60 \text{ A}.$$

Intensitățile curenților prin laturile circuitului sunt:

$$I_1 = I_a = 1,52 \text{ A}; \quad I_2 = I_b = 1,70 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_a + I_c = 1,52 - 0,6 = -2,12 \text{ A};$$

$$I_4 = I_c = -0,60 \text{ A}; \quad I_5 = -I_b + I_c = 1,7 - 0,6 = 1,1 \text{ A}$$

**c) Metoda potențialelor la noduri.**

Circuitul dat are trei noduri și deci se pot alege necunoscute, potențiale din două noduri. Fie  $V_1$ ,  $V_2$  potențialele noduri 1 și 2, fig. 4.23.

Ecuțiile potențialelor nodurilor sunt:

$$\begin{cases} G_{11} V_1 + G_{12} V_2 = G_1 E_1 \\ G_{21} V_1 + G_{22} V_2 = G_2 E_1 \end{cases}$$

Unde,

$$G_{11} = G_1 + G_3 + G_4,$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_4,$$

$$G_{22} = G_2 + G_4 + G_5.$$

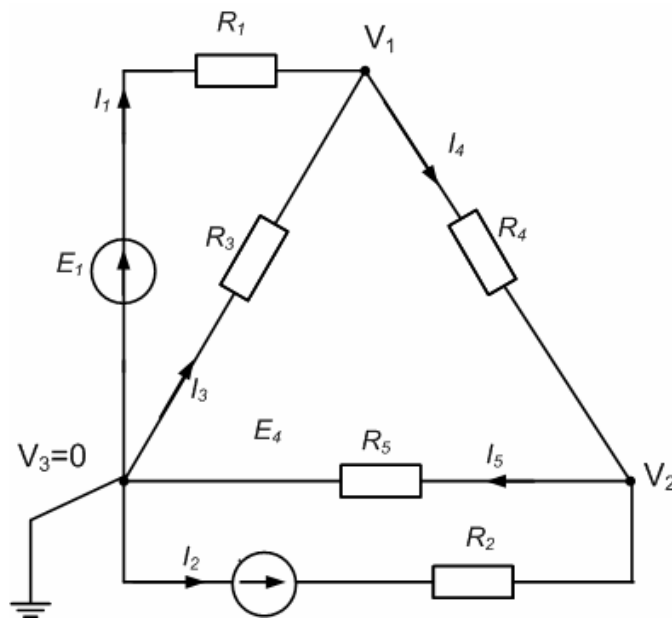


Fig. 4.23.

Conductanțele  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$  și  $G_5$  ale laturilor se calculează din rezistențele corespunzătoare,

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{5} = 0,200 \text{ } \Omega^{-1},$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ } \Omega^{-1},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} = 0,050 \text{ } \Omega^{-1},$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ } \Omega^{-1},$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{60} = 0,0167 \text{ } \Omega^{-1},$$

și deci:

$$G_{11} = 0,200 + 0,050 + 0,25 = 0,275 \Omega^{-1},$$

$$G_{12} = 0,025 \Omega^{-1},$$

$$G_{22} = 0,125 + 0,025 + 0,0167 = 0,1667 \Omega^{-1},$$

Înlocuim în ecuațiile potențialelor nodurilor și obținem:

$$\begin{cases} 0,275 \cdot V_1 + 0,025 \cdot V_2 = 0,2 \cdot 50 \\ -0,025 \cdot V_1 + 0,167 \cdot V_2 = 0,125 \cdot 80, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,275 \cdot V_1 + 0,025 \cdot V_2 = 10 \\ -0,025 \cdot V_1 + 0,167 \cdot V_2 = 10, \end{cases}$$

Din ecuațiile precedente se poate determina  $V_1$ , respectiv  $V_2$ , prin regula lui Cramer,

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0,025 \\ 10 & 0,167 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,275 & -0,025 \\ -0,025 & 0,167 \end{vmatrix}} = 42,35 \text{ V};$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0,275 & 10 \\ -0,025 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0,275 & -0,025 \\ -0,025 & 0,167 \end{vmatrix}} = 66,20 \text{ V}$$

Intensitățile curenților prin laturile rețelei date sunt:

$$I_1 = \frac{E_1 - (V_1 - V_3)}{R_1} = \frac{50 - 42,35}{5} = 1,53 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{E_2 - (V_2 - V_3)}{R_2} = \frac{80 - 66,2}{8} = 1,7 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_3}{R_3} = \frac{42,35}{20} = 2,12 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{V_1 - V_2}{R_4} = \frac{42,35 - 66,20}{40} = 0,60 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{V_2 - V_3}{R_5} = \frac{66,20}{60} = 1,105 \text{ A}.$$

## 4.4. TEOREMELE CIRCUITELOR DE CURENT CONTINUU

### 4.4.1. Teoremele generatoarelor echivalente de tensiune și de curent

Fiind dată o rețea electrică activă liniară  $\mathfrak{R}_a$ , curentul printr-o latură pasivă oarecare sau tensiunea la bornele acestei laturi se pot determina direct cu ajutorul teoremei generatorului echivalent de tensiune, respectiv cu ajutorul teoremei generatorului echivalent de curent.

Separând din rețeaua dată  $\mathfrak{R}_a$  latura cuprinsă între bornele (a) și (b), având rezistența  $R_{ab}$  (fig. 4.24,a), restul rețelei  $\mathfrak{R}'_a$  reprezintă în raport cu aceste borne un dipol liniar activ (DLA) care, prin transfigurare, se poate înlocui cu o latură echivalentă formată dintr-un rezistor  $R_i$  și un generator ideal de tensiune, cu tensiunea electromotoare  $E_0$  (fig. 4.24,b).

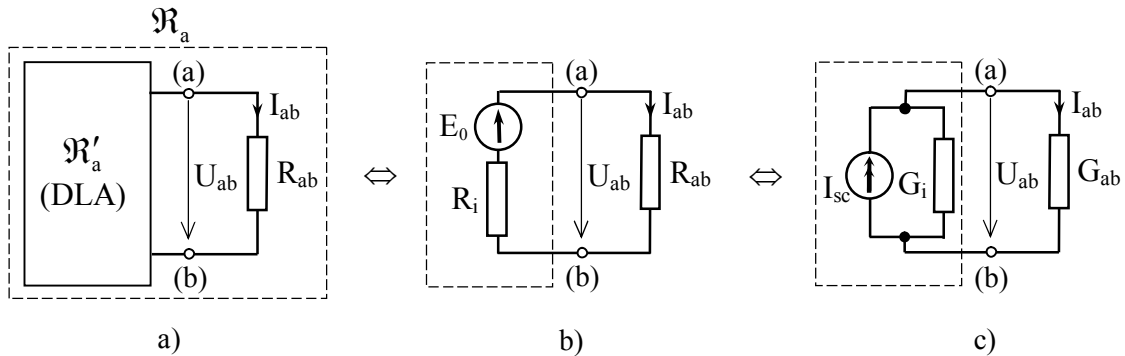


Fig. 4.24.

Rezistența echivalentă a dipolului  $R_i$  în raport cu bornele sale de acces (a) și (b) se numește și *rezistența internă a dipolului*.

Tensiunea la bornele dipolului în regim de mers în gol ( $R_{ab}$  – deconectată și deci  $I_{ab} = 0$ ) se notează  $U_{ab0}$ . Aplicând legea lui Ohm la funcționarea în gol a dipolului (în lipsa laturii ab), rezultă  $E_0 = U_{ab0}$ .

**Teorema generatorului echivalent de tensiune:** *orice dipol liniar activ este echivalent cu o sursă de tensiune, având tensiunea electromotoare  $E_0$  egală cu tensiunea la bornele dipolului în regimul de mers în gol ( $U_{ab0}$ ) și o rezistență electrică internă  $R_i$  egală cu rezistența echivalentă a dipolului în raport cu bornele sale de acces.*

La transfigurarea circuitelor s-a constatat ca rezistențele echivalente nu depind de tensiunile electromotoare și de curenții generatoarelor de tensiune și respectiv de curent, ca urmare calculul rezistențelor echivalente se poate efectua prin pasivizarea circuitelor. Prin pasivizarea unui circuit se înțelege anularea tensiunilor electromotoare și a curenților generatoarelor de tensiune, respectiv de curent, păstrând rezistențele sau conductanțele acestora. În acest fel, rezistența echivalentă  $R_i$  a dipolului reprezintă rezistența echivalentă a rețelei  $\mathfrak{R}'_a$  pasivizată în raport cu bornele (a) și (b), notată  $R_{abo}$ :

$$R_i = R_{abo} \quad (4.42)$$

Pentru circuitul echivalent astfel obținut, fig. 4.25, aplicând teorema a II-a

Kirchhoff, rezultă:

$$(R_{ab0} + R_{ab})I_{ab} = U_{ab0}$$

și deci,

$$I_{ab} = \frac{U_{ab0}}{R_{ab0} + R_{ab}} \quad (4.43)$$

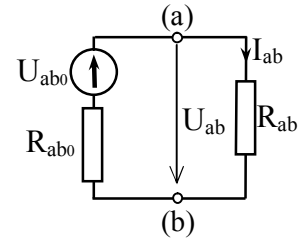


Fig. 4.25.

Relația obținută reprezintă **teorema generatorului echivalent Thèvenin** și care se enunță astfel: *intensitatea curentului  $I_{ab}$  printr-o latură pasivă oarecare conectată între punctele (a) și (b) ale unei rețele active liniare este egală cu raportul dintre tensiunea  $U_{ab0}$  la bornele (a), (b) la mersul în gol (în lipsa laturii ab) și suma dintre rezistența  $R_{ab}$  a laturii și rezistența echivalentă  $R_{ab0}$  a rețelei pasivizate între bornele (a) și (b), în lipsa laturii ab.*

Analog, înlocuind generatorul de tensiune cu un generator echivalent de curent (fig. 4.24,c), se obține **teorema generatorului echivalent de curent**: *orice dipol liniar activ este echivalent cu un generator (sursă) de curent, având intensitatea curentului  $I_{sc}$  egală cu intensitatea curentului debitat de dipol în regimul de scurtcircuit (bornele (a), (b) scurtcircuitate) și o conductanță electrică internă  $G_i$ , egală cu conductanța echivalentă a dipolului.*

Într-adevăr, la mersul în scurtcircuit ( $R_{ab} = 0$  și deci  $U_{ab} = 0$ ), notând cu  $I_{absc}$  curentul prin latura ab cu rezistența  $R_{ab}$  scurtcircuitată, rezultă:  $I_{sc} = I_{absc}$ .

Conductanța echivalentă a dipolului  $G_i$  se calculează prin pasivizarea acestuia și reprezintă conductanța echivalentă a rețelei  $\mathcal{N}'_a$  pasivizată, în raport cu bornele (a) și (b), notată  $G_{ab0}$ :  $G_i = G_{ab0}$ .

Aplicând teorema I Kirchhoff circuitului din fig. 4.26 și exprimând curenții pe baza legii lui Ohm, avem

$$I_{absc} = G_{ab}U_{ab} + G_{ab0}U_{ab},$$

din care rezultă:

$$U_{ab} = \frac{I_{absc}}{G_{ab} + G_{ab0}} \quad (4.44)$$

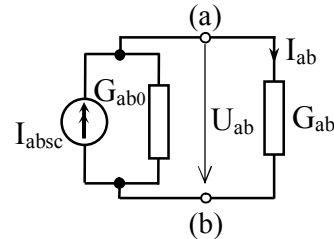


Fig. 4.26.

Relația obținută reprezintă **teorema generatorului echivalent Norton** și care se enunță astfel: *tensiunea  $U_{ab}$  la bornele (a), (b) ale unei laturi pasive oarecare a unei rețele liniare active este dată de raportul dintre curentul de scurtcircuit  $I_{absc}$  al laturii respective (cu rezistența scurtcircuitată) și suma dintre conductanța laturii  $G_{ab}$  și conductanța echivalentă  $G_{ab0}$  a rețelei pasivizate între bornele (a) și (b) în lipsa laturii.*

#### 4.4.2. Teorema suprapunerii efectelor (a superpoziției). Teorema reciprocității.

Considerând o rețea electrică liniară în care acționează mai multe surse de tensiune, *teorema superpoziției* se enunță astfel: *curentul care se stabilește într-o latură oarecare a rețelei este egal cu suma algebrică a curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte dacă ar acționa singură în rețea, celelalte fiind scurtcircuitate sau înlocuite cu rezistența lor interioară (dacă au rezistența interioară diferită de zero).*



Pentru demonstrație se separă laturile j și k ale rețelei și se presupune că în rețea acționează câte o singură sursă de tensiune electromotoare, conectată pe rând în laturile j și k, așa cum se arată în fig 4.27.

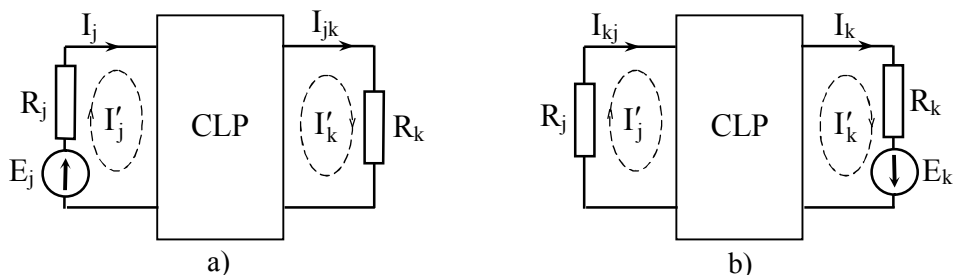


Fig. 4.27.

Se aplică teorema curenților ciclici, alegându-se astfel buclele fundamentale (ochiurile independente) încât curenții reali prin laturile j și k să fie dați numai de curenții ciclici ai celor două bucle la care aparțin aceste laturi. Astfel, pentru schema echivalentă din figura 4.18,a) rezultă:

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + \dots + R_{1k}I'_k + \dots + R_{1o}I'_o = 0 \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + \dots + R_{2k}I'_k + \dots + R_{2o}I'_o = 0 \\ \dots \\ R_{j1}I'_1 + R_{j2}I'_2 + \dots + R_{jk}I'_k + \dots + R_{jo}I'_o = E_j \\ \dots \\ R_{o1}I'_1 + R_{o2}I'_2 + \dots + R_{ok}I'_k + \dots + R_{oo}I'_o = 0 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem de ecuații după regula lui Cramer, se obține:

$$I_{jk} = I'_k = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} E_j,$$

în care  $\Delta$  este determinantul sistemului,  $\Delta_{jk}$  este complementul algebric al termenului  $R_{jk}$  luat cu semnul corespunzător,  $\Delta_{jk} = (-1)^{j+k} |\Delta_{jk}|$ .

Aplicând același procedeu pentru schema echivalentă din fig. 4.18,b), rezultă:

$$I_{kj} = I'_j = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} E_k.$$

Prin definiție,

$$G_{jk} = \frac{I_{jk}}{E_j} \Big|_{\substack{E_k=0 \\ k \neq j}} = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta}; \quad G_{kj} = \frac{I_{kj}}{E_k} \Big|_{\substack{E_j=0 \\ j \neq k}} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta}$$

sunt conductanțele de transfer dintre laturile k și j respectiv j și k ale rețelei.

Deoarece rezistențele din sistemele de ecuații corespunzătoare metodei curenților ciclici satisfac condiția de reciprocitate,  $R_{jk} = R_{kj}$ , rezultă că  $\Delta_{jk} = \Delta_{kj}$  și

$$G_{jk} = G_{kj},$$

relație ce reprezintă prima formă a teoremei reciprocității: *conductanța de transfer dintre laturile j și k este egală cu conductanța de transfer dintre laturile k și j.*

Dacă aceeași sursă de tensiune este plasată pe rând în laturile j și k,  $E_j = E_k = E$ , rezultă în mod evident:

$$I_{jk} = I_{kj},$$

relație ce reprezintă a doua formă a teoremei reciprocității: *curentul stabilit într-o latură oarecare k a unei rețele liniare de o sursă de tensiune plasată în latura j și acționând singură în rețea, este egal cu curentul stabilit în latura j dacă aceeași sursă de tensiune este plasată în latura k și acționează singură în rețea.*

Conform teoremei superpoziției, curentul dintr-o latură oarecare a unei rețele active liniare poate fi calculat cu relația:

$$I_j = \sum_{k=1}^{l_E} I_{kj} = \sum_{k=1}^{l_E} G_{kj} E_k, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

unde  $l$  este numărul de laturi ale rețelei, iar  $l_E$  este numărul laturilor cu surse de t.e.m.

*Calculul curenților electrici din laturile unui rețele active liniare folosind conductanțele de transfer dintre laturi se numește metoda conductanțelor de transfer.*

Este important de observat că, odată calculați curenții  $I_{jk}$  produși în toate laturile rețelei de sursa  $E_j$  din latura j (acționând singură în rețea), rezultă imediat, pe baza teoremei reciprocității și a teoremei superpoziției și curentul  $I_j$  produs în latura j cu sursă de către toate sursele din rețea:

$$I_j = \sum_{k=1}^{l_E} G_{kj} E_k = \sum_{k=1}^{l_E} G_{jk} E_k = \sum_{k=1}^{l_E} \frac{I_{jk}}{E_j} E_k$$

relație utilă deoarece calculul curenților într-un circuit cu o singură sursă se face, în general, mai ușor decât calculul curenților în circuitele cu mai multe surse.

### 4.4.3. Aplicații și probleme

4.4.1. Să se determine direct curentul  $I_5$  prin rezistența  $R_5$  a rețelei electrice din fig. 4.28. Sunt date următoarele valori:  $E_1=185 \text{ V}$ ,  $E_2=80 \text{ V}$ ,  $E_3=75 \text{ V}$ ,  $R_1=3 \Omega$ ,  $R_2=6 \Omega$ ,  $R_3=5 \Omega$ ,  $R_4=20 \Omega$ ,  $R_5=12 \Omega$ .

Se aplică teorema generatorului echivalent de curent astfel:

$$I_5 = \frac{U_{310}}{R_5 + R_{310}}$$

Schema de calcul a rețelei fără latura cu rezistorul  $R_5$  este dată în figura 4.29

$$U_{310} = -U_{23} + U_{12}$$

$$U_{23} = R_4 \cdot I_{34}$$

$$U_{12} = E_2 + R_2 \cdot I_{12}$$

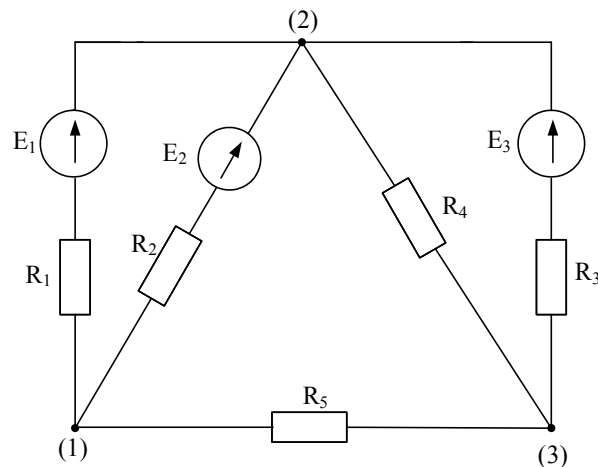


Fig. 4.28.

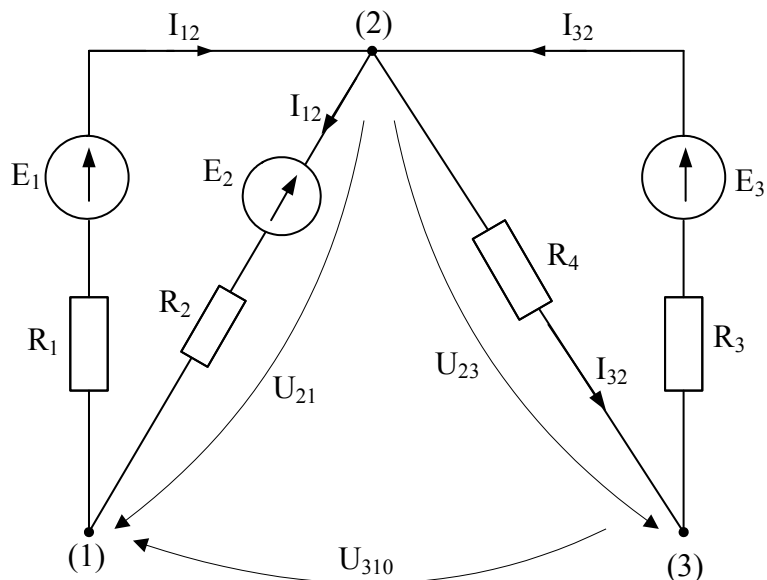


Fig. 4.29.

$$I_{12} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{35}{3} \text{ A}; \quad I_{34} = \frac{E_3}{R_3 + R_4} = 3 \text{ A}.$$

$$U_{23} = 60 \text{ V}, \quad U_{21} = 80 + 70 = 150 \text{ V}, \quad U_{310} = 90 \text{ V},$$

$$R_{310} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 6 \Omega, \quad I_5 = \frac{90}{12 + 6} = 5 \text{ A}.$$

4.4.2. *Puntea Whetstone* este formată din rezistoarele  $R_1, R_2, R_3, R_4$  care alcătuiesc un patrulater;  $R_5$  - este rezistența galvanometrului (indicator de nul). Sistemul este alimentat de la o sursă de tensiune electromotoare  $E$ , unde cu rezistența internă  $R_i$ .

Să se determine condiția în care  $I_5$  este nul. *Puntea Wheatstone* de c.c. este utilizată pentru măsurarea rezistențelor fig. 4.30.

*Metoda 1.* Teorema generatorului echivalent de tensiune.

$$I_5 = \frac{U_{230}}{R_5 + R_{230}},$$

evident  $I_5 = 0$  dacă  $U_{230} = 0$

$$U_{230} = -U_{12} + U_{13} \quad (\text{în lipsa galvanometrului})$$

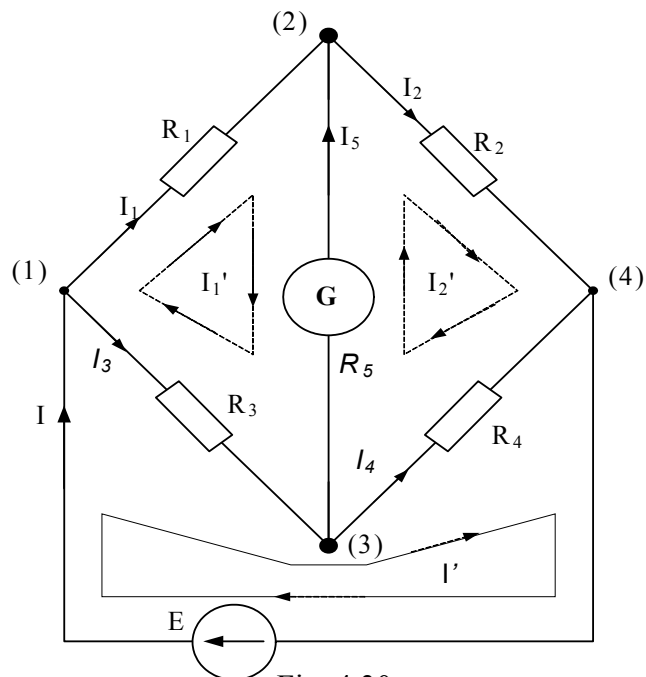


Fig. 4.30.

$$U_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_{14}, \quad U_{13} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot U_{14}, \quad U_{14} = E - R_i \cdot I,$$

$$I = \frac{E}{R_i + \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}},$$

$$U_{14} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) E}{N \rightarrow R_i (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)},$$

$$U_{12} = \frac{R_1 (R_3 + R_4) E}{N}; \quad U_{13} = \frac{R_3 (R_1 + R_2) E}{N}.$$

$$\text{Din } U_{230} = 0 \Rightarrow U_{12} = U_{13} \Rightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

*Metoda 2. Metoda curenților ciclici.*

$$\begin{cases} (R_i + R_3 + R_4)I'_1 - R_3I'_2 - R_4I'_3 = E \\ -R_3I'_1 + (R_1 + R_3 + R_5)I'_2 - R_5I'_3 = 0 \\ -R_4I'_1 - R_5I'_2 + (R_2 + R_4 + R_5)I'_3 = 0 \end{cases}$$

Prin regula lui Cramer,

$$I_5 = I'_1 - I'_2 = \frac{E}{\Delta} (R_2 R_3 - R_1 R_4) \text{ și din } I_5 = 0 \Rightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3$$

Practic, la puntea Wheatstone trei rezistențe sunt cunoscute și una este rezistența care se măsoară, de exemplu  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{R_2}{R_4} \cdot R_3$$

4.4.3. Se dă sistemul din fig. 4.31. Să se determine direct curentul  $I_4$  și apoi  $U_4$ . Valorile tensiunilor electromotoare ale surselor, respectiv ale rezistențelor sunt date mai jos.

$$E_1 = 60V, \quad E_2 = 40V, \quad R_1 = 10\Omega, \quad R_2 = 5\Omega, \quad R_3 = 15\Omega, \quad R_4 = 2\Omega, \quad R_5 = 4\Omega, \quad R_6 = 8\Omega.$$

$$I_4 = \frac{U_{120}}{R_4 + R_{120}}; \quad U_4 = \frac{I_{4sc}}{E_{14} + G_{120}};$$

$$I_4 = \frac{I_{4sc} \cdot R_{120}}{R_4 + R_{120}}.$$

Curentul  $I_{4sc}$  (fig. 4.32) se determină printr-o metodă oarecare (de exemplu cu teoremele lui Kirchhoff, prin metoda curenților ciclici, a potențialelor la noduri, metoda suprapunerii efectelor, etc.)

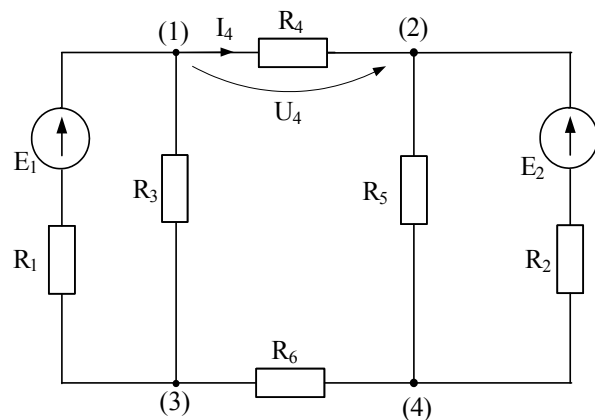


Fig. 4.31.

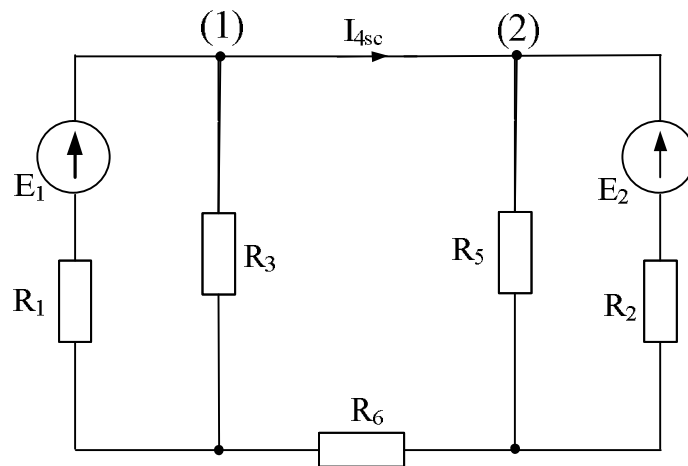


Fig. 4.32.

De exemplu, prin metoda suprapunerii efectelor:

Curentul dintr-o latură se obține prin suprapunerea curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte acționând singură în rețea.

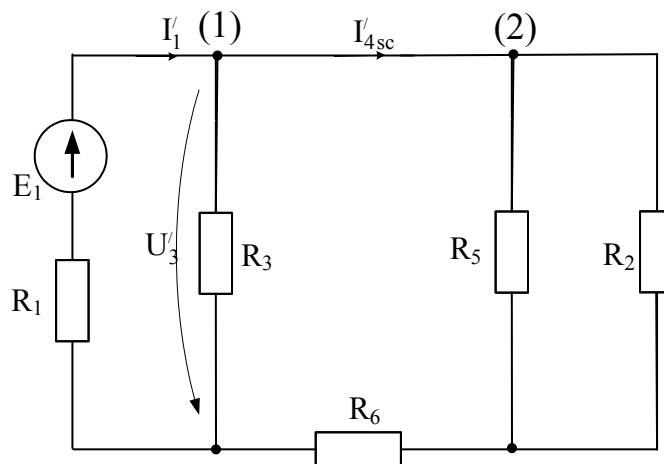


Fig. 4.33.

Astfel considerând primul caz, când avem numai sursa  $E_1$ , figura 4.33, rezultă:

$$U'_3 = E_1 - R_1 I'_1$$

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_3 \left( R_6 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} \right)}{R_3 + R_6 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5}}}, \quad I'_{4sc} = \frac{U'_3}{\frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + R_6}$$

Similar se calculează curentul  $I''_{4sc}$  când avem numai sursa  $E_2$ , figura 4.34.

Curentul de scurtcircuit al laturii 4 rezultă:

$$I_{4sc} = I'_{4sc} - I''_{4sc}$$

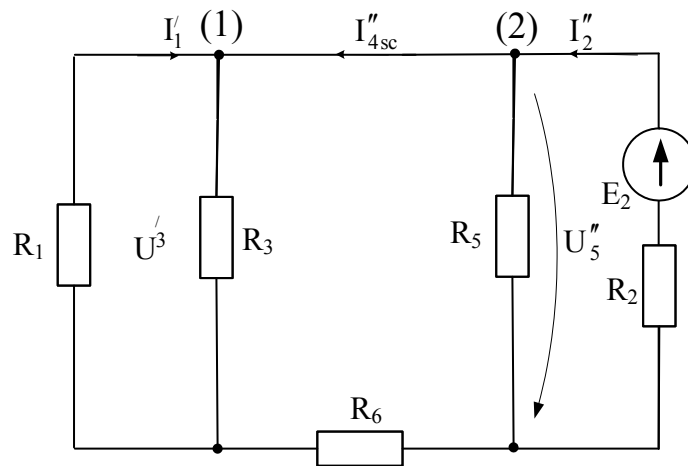


Fig. 4.34.

Conductanța  $G_{120}$  se calculează între (1) și (2) pentru rețeaua pasivizată (cu sursele scurtcircuitate și în lipsa laturii 4).

$$\frac{1}{G_{120}} = \frac{1}{G_1 + G_3} + \frac{1}{G_2 + G_5} + \frac{1}{G_6}$$

4.2.4. *Puntea electrică dublă – puntea Thomson, este formată din rezistențele  $R_{12}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{24}$ ,  $R_{34}$ , și  $R_3$  de valoare cunoscută, fig. 4.35. Rezistența de valoare necunoscută se conectează între bornele A – B. Se cere să se calculeze rezistența  $R_2$ , funcție de rezistențele cunoscute, în ipoteza că intensitatea curentului prin legătura în punte  $R_{23}$ , în care este conectat galvanometrul G, este nulă.*

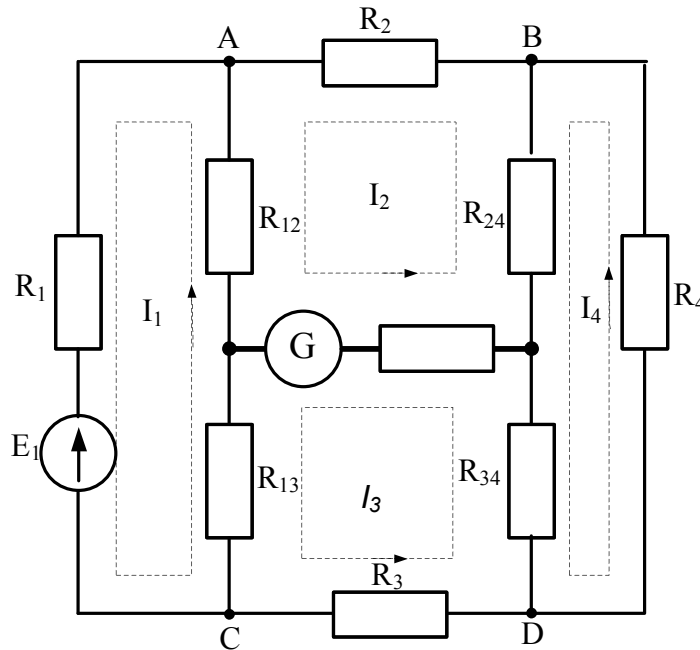


Fig. 4.35.

Din teorema reciprocității se poate obține că intensitatea curentului prin rezistența  $R_{23}$ , produs de sursa din latura care conține rezistența  $R_1$ , este egală cu intensitatea curentului prin rezistența  $R_1$ , produsă de aceeași sursă conectată în serie cu rezistența  $R_{23}$ .

Numărul laturilor fiind 9 și numărul nodurilor fiind de 6, se obține un număr de 4 ochiuri independente de rețea.

Pentru determinarea curentului  $I_1$ , prin rezistența  $R_1$  se poate aplica, de exemplu, teorema curenților ciclici.

$$\begin{cases} R_{11}i_1 - R_{12}i_2 - R_{13}i_3 = 0, \\ -R_{12}i_1 + R_{22}i_2 - R_{23}i_3 - R_{24}i_4 = E, \\ -R_{13}i_1 - R_{23}i_2 + R_{33}i_3 - R_{44}i_4 = -E \\ -R_{24}i_2 - R_{34}i_3 + R_{44}i_4 = 0, \end{cases}$$

unde s-a notat:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_{12} + R_{13}, \\ R_{22} &= R_2 + R_{12} + R_{23} + R_{24}, \\ R_{33} &= R_3 + R_{13} + R_{23} + R_{34}, \\ R_{44} &= R_4 + R_{24} + R_{34}. \end{aligned}$$

Din fig. 4.35. se observă că  $I_1 = i_1$ . Aplicăm regula lui Cramer, unde ne interesează numai curentul  $i_1$ ,

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_{12} & -R_{13} & 0 \\ E & R_{22} & -R_{23} & -R_{24} \\ -E & -R_{23} & R_{33} & -R_{34} \\ 0 & -R_{24} & -R_{34} & R_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & 0 \\ -R_{12} & R_{22} & -R_{23} & -R_{24} \\ -R_{13} & -R_{23} & R_{33} & -R_{34} \\ 0 & -R_{24} & -R_{34} & R_{44} \end{vmatrix}} = \frac{E}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & -R_{12} & -R_{13} & 0 \\ 1 & R_{22} & -R_{23} & -R_{24} \\ -1 & -R_{23} & R_{33} & -R_{34} \\ 0 & -R_{24} & -R_{34} & R_{44} \end{vmatrix}.$$

Dacă intensitatea curentului prin galvanometru este nulă, din teorema reciprocității rezultă că și  $I_1 = 0$ . Deci:

$$I_1 = i_1 = 0, \text{ sau: } \begin{vmatrix} 0 & -R_{12} & -R_{13} & 0 \\ 1 & R_{22} & -R_{23} & -R_{24} \\ -1 & -R_{23} & R_{33} & -R_{34} \\ 0 & -R_{24} & -R_{34} & R_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Adunând liniile I, a II-a și a IV-a cu linia a III-a, se obține condiția:

$$\begin{vmatrix} -R_{12} & -R_{13} & 0 \\ R_2 & R_3 & R_4 \\ -R_{24} & -R_{34} & R_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând după minorii ultimei coloane, se obține:

$$R_4(-R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24}) + R_{44}(R_2R_{13} - R_{12}R_3) = 0.$$

Pentru ca relația precedentă să fie independentă de  $R_4$  și  $R_{44}$ , este necesar ca:

$$-R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} = 0;$$

$$R_2R_{13} + R_{12}R_3 = 0;$$

sau,

$$\frac{R_{12}}{R_{13}} = \frac{R_{24}}{R_{34}} = \frac{R_2}{R_3}.$$

Dacă se variază la fel repoartele rezistențelor  $R_{12}$  și  $R_{13}$ , respectiv  $R_{24}$  și  $R_{34}$ , puntea se poate echilibra, iar rezistența  $R_2$  se determină:

$$R_2 = \frac{R_{12}}{R_{13}} R_3 = \frac{R_{24}}{R_{34}} R_3.$$



## 5. MĂRIMI SINUSOIDALE

### 5.1. NOȚIUNI TEORETICE.

#### 5.1.1. Mărimi periodice, mărimi alternative, mărimi sinusoidale

Mărimile variabile în timp, care iau valori egale după trecerea de intervale de timp egale:

$$y(t) = y(t + T) = y(t + nT); \quad (n - \text{întreg}), \quad (5.1)$$

unde,  $T$  – perioada mărimii, este intervalul de timp minim după care mărimea își reia valorile, se numesc mărimi periodice, iar numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp se numește frecvența lor,

$$f = \frac{1}{T}, \quad (5.2)$$

*Valorile instantanee* pe care mărimile variabile, periodice, le au în diferitele momente se notează cu literă minusculă.

*Valoarea medie*  $Y_{med}$ , care se determină ca media aritmetică a valorilor instantanee ale mărimii periodice pe intervalul de timp al unei perioade,

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2+T} y \, dt \quad (5.3)$$

se notează cu majuscula simbolului literal.

Mărimile periodice ale căror valori medii pe o perioadă sunt nule se numesc mărimi alternative (fig. 5.1,a),

$$Y_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T y \, dt = \frac{S_1 - S_2}{T} = 0 \quad (5.4)$$

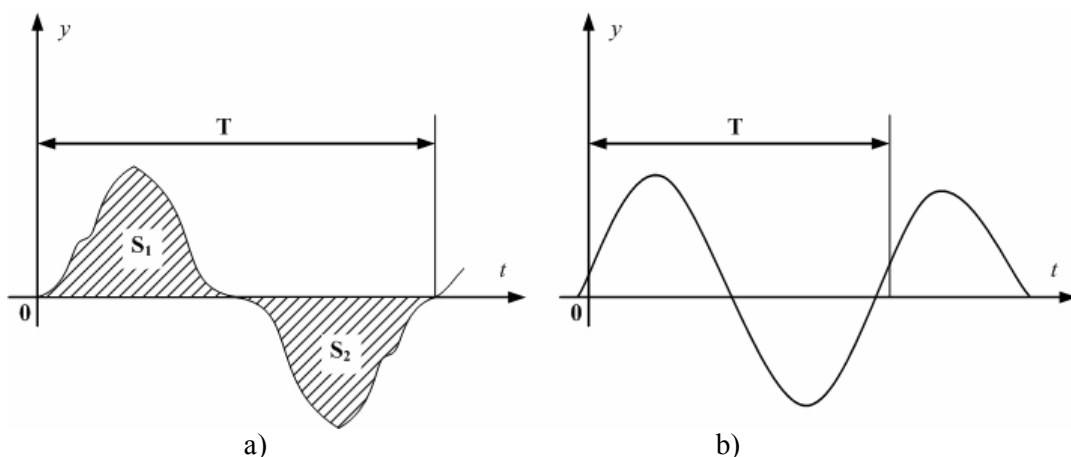


Fig. 5.1. Reprezentarea mărimilor periodice a), respectiv a mărimilor sinusoidale b).

*Mărimile sinusoidale* sau armonice sunt mărimi alternative funcții sinusoidale de timp, (fig. 5.1,b),

$$y = y(t) = Y_{\max} \sin(\omega t + \gamma) = \sqrt{2} \cdot Y \sin(\omega t + \gamma) \quad (5.5)$$

unde:  $y$  - funcția de timp care dă valoarea instantanee a mărimii sinusoidale;  $Y_{\max}$  - amplitudinea (valoarea instantanee maximă a mărimii sinusoidale);  $\omega$  - pulsația sau frecvența unghiulară, relația care exprimă legătura dintre pulsație și frecvență:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \quad (5.6)$$

$(\omega t + \gamma)$  - faza, reprezintă argumentul funcției sinus din expresia (5) a mărimii armonice, care depinde liniar de timp;  $\gamma$  - faza inițială (la  $t = 0$ ), iar  $Y$  reprezintă valoarea efectivă a mărimii sinusoidale:

$$Y = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (5.7)$$

valoare pentru care o mărime periodică are expresia:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} y^2 dt} > 0, \quad (5.8)$$

este pozitivă și notată cu majuscula literei ce simboleză mărimea considerată.

Un exemplu, valoarea efectivă a intensității unui curent electric periodic este egală cu intensitatea unui curent continuu care, dacă străbate aceeași rezistență ca și curentul periodic, dezvoltă aceeași căldură ca și el în timp de o perioadă.

*Defazajul* dintre două mărimi sinusoidale de aceeași perioadă este diferența dintre fazele acelor mărimi într-un moment dat, egală cu diferența dintre fazele lor inițiale.

*Factorul de formă* al unei mărimi alternative cu alternanțe egale este raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie a mărimii pe o alternanță ce ocupă o jumătate de perioadă:

$$K_f = \frac{Y}{Y_{\text{med}}} \quad (5.9)$$

$K_f = 1,11$  pentru mărimi armonice.

*Factorul de vârf* al unei mărimi periodice cu alternanțe egale este raportul dintre valoarea maximă și valoarea efectivă a mărimii:

$$K_v = \frac{Y_{\max}}{Y} \quad (5.10)$$

$K_v = 1,41$  pentru mărimi armonice.

### 5.1.2. Reprezentarea simbolică a mărimilor sinusoidale.

**Reprezentarea geometrică** a unei mărimi armonice asociază biunivoc mărimii sinusoidale (curent, tensiune) drept simbol grafic, un vector liber în plan,

$$y(t) = \sqrt{2} \cdot Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow F(y), \quad (5.11)$$

vectorii reprezentativi  $F(y)$  se numesc fazori.

Reprezentarea cinematică a unei mărimi armonice sau reprezentarea ei prin vectori rotitori constă în reprezentarea printr-un fazor într-un plan care-i este asociat și are modulul constant, egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale și are o orientare variabilă, care formează în fiecare moment, cu o axă fixă de referință din acel plan, un unghi egal cu faza mărimii reprezentate,

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \overline{OA} \begin{cases} |\overline{OA}| = \sqrt{2}Y \\ \widehat{AOX} = (\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (5.12)$$

Fazorul se rotește în sensul trigonometric direct, cu viteza unghiulară constantă  $\omega$ . Astfel, operațiile cu mărimi sinusoidale care apar în ecuațiile integro-diferențiale liniare ale fenomenelor dintr-un circuit sunt convertite în operații elementare efectuate cu vectori (diagrame fazoriale). convertite în operații elementare efectuate cu vectori (diagrame fazoriale).

Valoarea instantanee a mărimii sinusoidale reprezentate printr-un anumit fazor dat la momentul  $t$ , se poate obține grafic, proiectând fazorul pe o axă fixă  $OY$ , defazată cu un unghi drept ( $\pi/2$ ), în sens direct, față de axa de referință  $OX$  (fig. 5.2,a).

Reprezentarea polară sau prin vectori fiși a unei mărimi sinusoidale se realizează prin fazorul asociat mărimii sinusoidale, de modul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și de argument egal cu faza inițială a mărimii (fig. 5.2,b),

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \overline{OA} \begin{cases} |\overline{OA}| = Y \\ \widehat{AOX} = \gamma \end{cases} \quad (5.13)$$

Mărimea imagine sau simbolul conservă din mărimea sinusoidală dată numai elementele care o individualizează în raport cu celelalte, de aceeași frecvență, respectiv, valoarea efectivă și faza inițială.

Valoarea instantanee a mărimii se obține prin înmulțirea cu  $\sqrt{2}$  a proiecției fazorului pe axa  $OY'$ , axele  $OX'$  și  $OY'$  rotindu-se cu viteza unghiulară constantă  $\omega$  în sens contrar celui trigonometric direct.

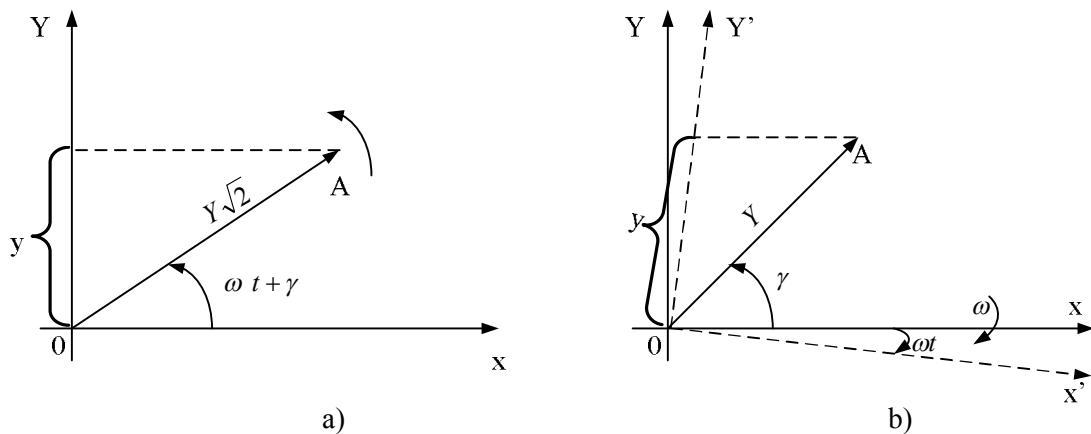


Fig. 5.3. Reprezentarea geometrică a mărimii sinusoidale:  
a – reprezentarea cinematică; b – reprezentarea polară.

### Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale.

Această reprezentare stabilește o corespondență biunivocă între mulțimea funcțiilor sinusoidale și mulțimea numerelor complexe,

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow C(y) \quad (5.14)$$

unde  $C(y)$  este reprezentarea în complex a mărimii  $Y$ .

În reprezentarea în complex nesimplificată, planul complex este identificat cu planul reprezentării cinematice. Imaginea în complex nesimplificată a mărimii sinusoidale este o funcție complexă de timp, de modul constant și egal cu amplitudinea mărimii sinusoidale.

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \sqrt{2}Y e^{j(\omega t + \gamma)} = \dot{Y}; \quad j = \sqrt{-1}, \quad (5.15)$$

astfel încât:

$$y(t) = \text{Im}[Y] = \text{Im}\{\sqrt{2}Y e^{j(\omega t + \gamma)}\} \quad (5.16)$$

Fazorul corespunzător mărimii  $y(t)$  este vectorul reprezentativ al imaginii în complex  $C(y)$  din planul complex a lui Gauss.

În aplicații se utilizează odată cu calculul în complex reprezentarea geometrică ce ilustrează sugestiv relațiile de fază, iar în diagrame fazorii sunt notați adeseori cu simbolurile reprezentărilor în complex (fig. 5.4, a).

În reprezentarea în complex simplificată planul complex este identificat cu planul reprezentării polare. Imaginea în complex simplificată a mărimii sinusoidale este un număr complex constant, de modul egal cu valoarea efectivă a mărimii și de argument egal cu faza ei inițială (fig. 5.4, b).

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow Y e^{j\gamma} = \underline{Y} \quad (5.17)$$

$$y(t) = \text{Im}[\sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{Y}] \quad (5.18)$$

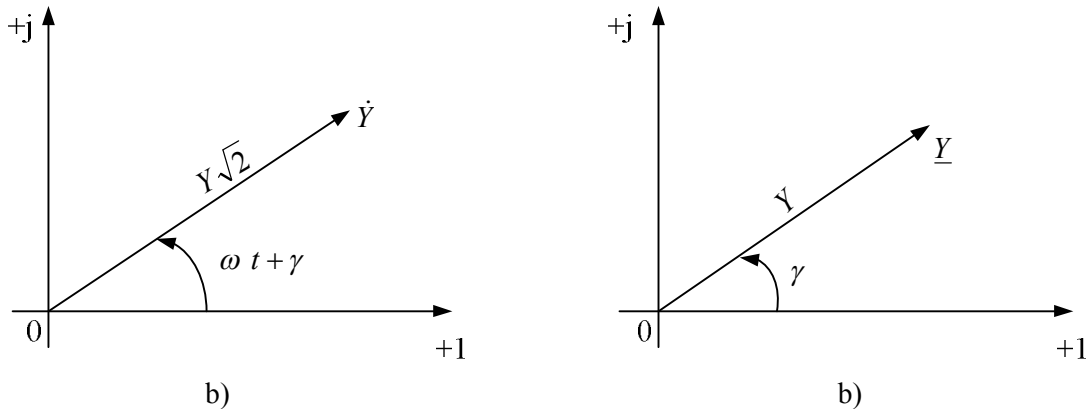


Fig. 5.4. Reprezentarea geometrică a mărimii sinusoidale în complex:  
a – nesimplificat; b – simplificat.

Reprezentarea în complex prezintă avantajul că transformă ecuațiile integro-diferențiale lineare și cu coeficienți constanți ale fenomenelor din circuite, satisfăcute de curenți și tensiuni sinusoidale, în ecuații algebrice lineare de gradul întâi satisfăcute de imaginile în complex ale acestor curenți și tensiuni.

Reprezentările prin fazori, respectiv în complex, reduc operațiile de matematică superioară din ecuații integro-diferențiale lineare la construcții elementare, respectiv la ecuații algebrice, deoarece, produsele funcțiilor sinusoidale prin scalari constanți, precum și derivatele și integralele lor în raport cu timpul, se obțin în aceste reprezentări prin operații geometrice, respectiv algebrice, elementare, din reprezentările respective ale funcțiilor sinusoidale.

Astfel, *produsul funcției sinusoidale*  $y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma)$  prin scalarul  $a$  fiind:

$$ay(t) = \sqrt{2} a Y \sin(\omega t + \gamma), \quad (5.19)$$

este reprezentat cinematic, respectiv polar, printr-un fazor în fază, respectiv în opoziție cu fazorul funcției  $y(t)$  și de  $|a|$  ori mai lung decât acesta, după cum  $a > 0$  sau  $a < 0$ , iar în complex prin produsul dintre imaginea în complex a funcției  $y(t)$  și scalarul  $a$ .

*Derivata mărimii sinusoidale*  $y(t)$  în raport cu timpul,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \omega \sqrt{2} Y \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.20)$$

este reprezentată cinematic, respectiv polar, printr-un fazor defazat cu un unghi drept înaintea fazorului funcției și cu o amplitudine de  $\omega$  ori mai mare decât a acestuia, iar în complex, respectiv complex simplificat, prin produsul dintre imaginea în complex a funcției și produsul dintre unitatea imaginară  $j$  și pulsația  $\omega$ .

*Integrala mărimii sinusoidale*  $y(t)$  în raport cu timpul și cu constanta de integrare nulă:

$$\int y(t) dt = \frac{\sqrt{2} Y}{\omega} \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.21)$$

este reprezentată cinematic, respectiv polar, printr-un fazor defazat cu un unghi drept în urma fazorului funcției și cu o amplitudine de  $\omega$  ori mai mică decât a acestuia, iar în complex, respectiv complex simplificat, prin raportul dintre imaginea în complex a funcției  $y(t)$  și produsul d unității imaginare  $j$  prin pulsația  $\omega$ .

### 5.1.3. Aplicații și probleme.

5.1. *Un curent sinusoidal are amplitudinea  $I_{\max} = 10A$  și frecvența  $f = 50Hz$ .*

*Să se determine:*

a) *valoarea efectivă  $I$ , perioada  $T$ , pulsația  $\omega$  în rad/s și pulsația în grade/s*

$$\left( \omega' = \omega \frac{180^\circ}{\pi} \right);$$

b) *să se scrie expresia valorii instantanee a curentului și să se reprezinte grafic, considerând ca origine punctele în care:*

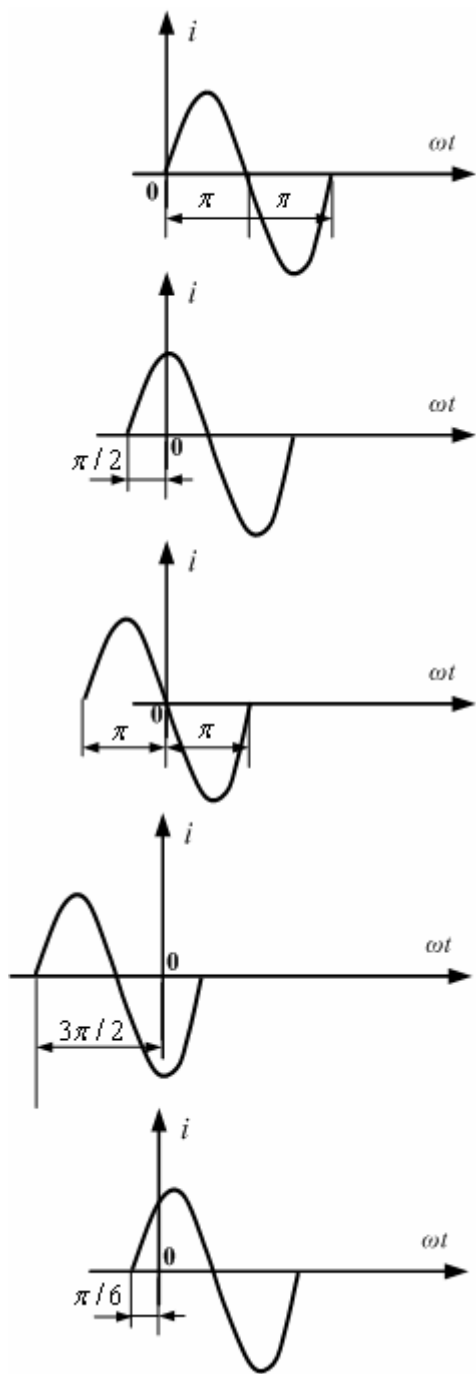


Fig. 5.5.

$$\begin{aligned}
 i &= 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &= 10 \sin\left(1,8 \cdot 10^4 t + 90\right) = 10 \sin\left[1,8 \cdot 10^4 \left(t + 5 \cdot 10^{-3}\right) \frac{\pi}{180}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 10 \sin(\omega t + \pi) = 10 \sin(100\pi t + \pi) = \\
 &= 10 \sin\left(1,8 \cdot 10^4 t + 180\right) = 10 \sin\left[1,8 \cdot 10^4 \left(t + 10^{-2}\right) \frac{\pi}{180}\right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 0 \text{ (funcția crește), } i = I_{\max}; \\
 i &= 0 \text{ (funcția descrește), } i = -I_{\max}
 \end{aligned}$$

$$i = \frac{I_{\max}}{2} \text{ (funcția crește).}$$

c) să se exprime defazațele respective în radiani, grade și secunde și se scrie expresiile corespunzătoare.

Soluție.

a) valoarea efectivă a curentului alternativ sinusoidal a cărei amplitudine este  $I_{\max}$  este:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,1 \text{ A.}$$

Perioada,  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s.}$

Pulsația,  $\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$

$$\omega' = 1,8 \cdot 10^4 \text{ grade/s.}$$

b) Valoarea instantanee a curentului alternativ sinusoidal este în fiecare din cele 5 cazuri următoarea:

$$i = 10 \sin(\omega t + 0)$$

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = 10 \sin(\omega t + \pi)$$

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Reprezentarea grafică este reprezentată pentru toate cele cinci cazuri în fig.5.5.

c) Expresiile corespunzătoare defazațelor sunt următoarele:

$$i = 10 \sin \omega t ;$$

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = 10 \sin\left(100\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 10 \sin\left(1,8 \cdot 10^4 t + 270\right)^\circ =$$

$$10 \sin\left[1,8 \cdot 10^4 \left(t + 1,5 \cdot 10^{-3}\right) \frac{\pi}{180}\right];$$

$$i = 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 10 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 10 \sin\left(1,8 \cdot 10^4 t + 30\right)^\circ =$$

$$10 \sin\left[1,8 \cdot 10^4 \left(t + \frac{5}{3} \cdot 10^{-3}\right) \frac{\pi}{180}\right].$$

5.2. Sunt date două tensiuni electromotoare sinusoidale,

$$e_1 = 30 \sin\left(2512 \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos\left(2512 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Se cere:

- perioada, frecvența, valoarea maximă, valoarea efectivă și valoarea instantanee pentru fiecare dintre cele două tensiuni pentru  $t = \frac{1}{600} s$ ;
- faza inițială a fiecărei tensiuni, defazajul dintre ele și reprezentarea grafică.
- Să se determine și să se reprezinte grafic funcțiile considerând o nouă origine  $O'$  a timpului, situată înaintea celei precedente cu  $\frac{1}{2400} s$ .
- Să se scrie expresia valorilor instantanee ale celor două tensiuni, pentru cazul când originea de timp coincide cu momentul în care  $e_e = E_1$ , funcțiile menținându-și defazajul între ele.

Soluție.

- cunoscând pulsația, frecvența este:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2512}{2\pi} = \frac{800\pi}{2\pi} = 400 \text{ Hz}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{400} = 2,5 \cdot 10^{-3},$$

$$E_{1\max} = 30 \text{ V}; \quad E_1 = \frac{E_{1\max}}{\sqrt{2}} = 21,3 \text{ V}; \quad E_{2\max} = \sqrt{2} \cdot 10 = 14,1 \text{ V}; \quad E_2 = \frac{E_{2\max}}{\sqrt{2}} = 10 \text{ V}$$

$$e_1' = 30 \cdot \sin\left(800\pi \frac{1}{600} - \frac{2\pi}{3}\right) = 30 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 26 \text{ V};$$

$$e_2' = \sqrt{2} \cdot 10 \cos\left(800\pi \frac{1}{600} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot 10 \cos \frac{5\pi}{3} = 7,05 \text{ V}.$$

- faza inițială a fiecărei tensiuni, defazajul dintre ele și reprezentarea grafică se determină astfel:

$$\varphi_{10} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad sau } \frac{1}{1200} s$$

$$e_1 = 30 \sin\left(800\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 30 \sin 800 \pi \left(t - \frac{1}{1200}\right)$$

$$\varphi_{20} = -150^{\circ} = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad sau } -\frac{1}{960} s$$

$$e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos\left(800\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin 800 \pi \left(t + \frac{1}{960}\right)$$

$$\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 120^{\circ} - (-150^{\circ}) = 270^{\circ} \text{ sau}$$

$$\varphi_{12} = -90^{\circ} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad sau } -\frac{3}{1600} s$$

Tensiunea electromotoare  $e_1$  este în urmă cu  $270^{\circ}$  față de tensiunea electromotoare  $e_2$ , sau înainte cu  $90^{\circ}$ , adică  $e_1$  și  $e_2$  sunt în cuadratură (fig. 5.6. a).

c) considerând o nouă origine  $O'$  a timpului situată înaintea celei precedente cu  $\frac{1}{2400}$  sec sau  $\frac{\pi}{3}$  rad, tensiunile electromotoare devin:

$$e_1' = 30 \sin 800 \pi \left(t - \frac{1}{1200} - \frac{1}{2400}\right) = 30 \sin(800\pi t - \pi)$$

$$e_2' = \sqrt{2} \cdot 10 \sin 800 \pi \left(t + \frac{1}{960} - \frac{1}{2400}\right) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin\left(800 \pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Cele două tensiuni electromotoare se mențin, bineînțeles, în cuadratură, reprezentarea grafică este ilustrată în fig. 5.6. b.

d)  $e_1 = 30 \sin(800\pi t - \varphi_1)$

Trebuie determinat unghiul  $\varphi_1$  astfel încât la  $t = 0$ ,  $e_1 = E_1$ . Deci:

$$e_1 = E_1 = \frac{30}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{30}{\sqrt{2}} \sin(-\varphi_1)$$

$$\sin \varphi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$$

Rezultă,

$$e_1 = 30 \sin\left(800 \pi t + \frac{\pi}{4}\right); \quad e_2 = \sqrt{2} \cdot 10 \sin\left(800 \pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

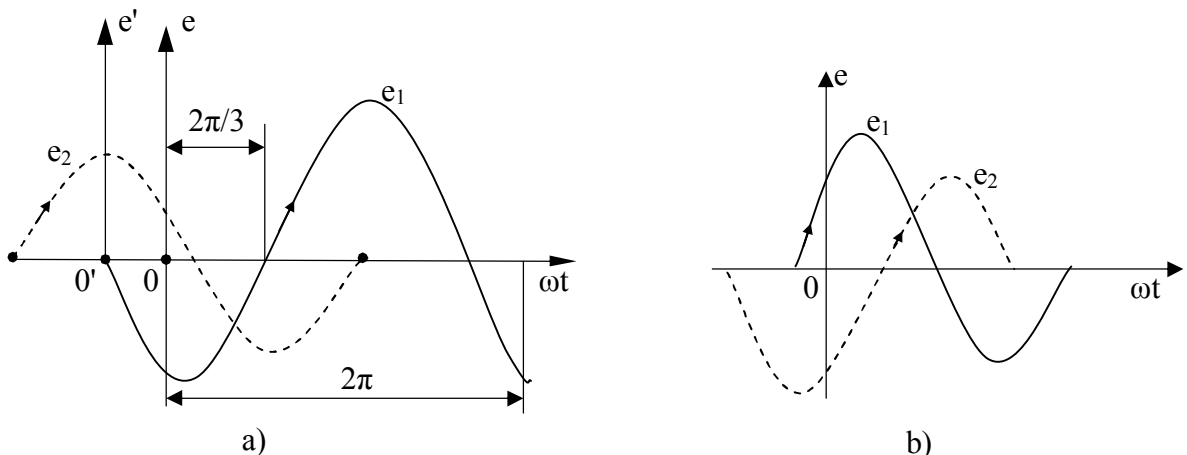


Fig. 5.6.



## 6. ANALIZA CIRCUITELE MONOFAZATE LINIARE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 6.1. NOȚIUNI TEORETICE

Rețele electrice liniare cu parametri concentrați reprezintă o asociație de elemente de circuit ideale, care au caracteristici liniare (rezistoare, bobine, condensatoare, generatoare de curent sau tensiune), de elemente electrice liniarizate, adică având caracteristici approximate prin caracteristici liniare. O rețea electrică cu un număr mic de borne de acces și de generatoare îndeplinind o funcție determinată în instalația din care face parte, se numește circuit electric.

Parametrii care definesc configurația topologică a rețelelor electrice sunt: numărul de laturi  $l$ , numărul de noduri  $n$  în care se unesc cel puțin două laturi și numărul de ochiuri independente  $o$ . Între ele există următoarea relație, cunoscută sub numele de teorema lui Euler:

$$o = l - n + 1. \quad (6.1)$$

#### **Parametrii circuitelor liniare în regim armonic permanent.**

Impedanța  $Z$  și defazajul  $\varphi$  al unui circuit liniar cu două borne sunt: raportul  $Y = \frac{U}{I} = f(\omega, R, L, C)$ , definit de valorile efective ale tensiunii aplicate la bornele rețelei,  $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma)$  și curentului pe care-l absoarbe în aceste condiții pe la bornele considerate,  $i = \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma - \varphi)$ , precum și de diferența  $\varphi$  dintre faza tensiunii la borne și faza curentului. Unitatea de măsură în S.I. este ohm-ul  $[\Omega]$ . Impedanța și defazajul rețelelor liniare nu depind de tensiune și curent, ci numai de frecvență și de parametrii rezistență, inductivitate și capacitatea laturilor lor.

*Rezistența  $R$  și reactanța  $X$  a unui circuit electric liniar,*

$$R = \frac{U \cdot \cos \varphi}{I} = Z \cdot \cos \varphi > 0 \quad (6.2)$$

$$X = \frac{U \cdot \sin \varphi}{I} = Z \cdot \sin \varphi > 0 \quad (6.3)$$

Se definesc componentele activă și reactivă ale tensiunii aplicate circuitului,

$$U_R = U \cdot \cos \varphi \quad \text{și} \quad U_X = U \cdot \sin \varphi \quad (6.4)$$

Între mărimile  $R, X, Z, \varphi$  există relațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{X}{R}; \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}; \\ Z &= \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (6) \end{aligned}$$

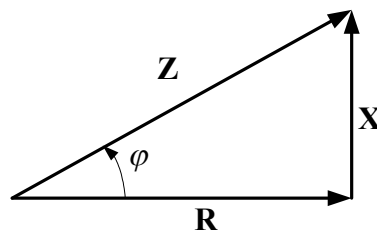


Fig. 6.1. Triunghiul impedanțelor

Aceste relații se deduc cu ajutorul triunghiului impedanțelor (fig.1).

Admitanța  $Y$  și defazajul  $\varphi$  al circuitului liniar.

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} > 0 \quad [S] \quad (6.5)$$

Unitatea de măsură în S.I. a admitanței este siemens-ul [S]. Între mărimile  $R, X, Y$  și  $\varphi$  există relațiile:

$$R = \frac{\cos \varphi}{Y}; \quad X = \frac{\sin \varphi}{Y}; \quad Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}}. \quad (6.6)$$

Conductanța  $G$  și susceptanța  $B$  a circuitului liniar.

$$G = \frac{I \cdot \cos \varphi}{U} = Y \cos \varphi > 0 \quad (6.7)$$

$$B = \frac{I \cdot \sin \varphi}{U} = Y \sin \varphi >> 0 \quad (6.8)$$

Mărimile  $I \cdot \cos \varphi$  și  $I \cdot \sin \varphi$  sunt componentele activă și reactivă ale curentului aplicate circuitului.

Între mărimile  $G, B, Y$  și  $\varphi$  există relațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{G}{B}; \quad \cos \varphi = \frac{G}{Y}; \\ \sin \varphi &= \frac{B}{Y}; \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

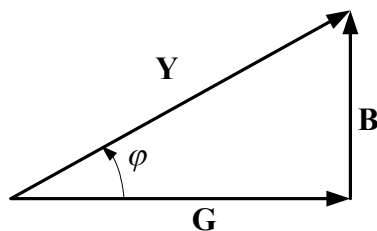


Fig. 6.2. Triunghiul admitanțelor

Aceste relații se deduc cu ajutorul triunghiului admitanțelor (fig.2).

Între mărimile  $Z, Y, R, G, X, B$  există relațiile:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}}; \quad G = \frac{R}{Z^2}; \quad B = \frac{X}{Z^2}; \quad R = \frac{G}{Y^2}; \quad X = \frac{B}{Y^2} \quad (6.10)$$

Impedanța complexă,

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{U}{\underline{I}} = Z e^{j\varphi} = R + jX = f(\omega, R, L, C), \quad (6.11)$$

are modulul egal cu impedanța circuitului,  $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  și argumentul egal cu defazajul circuitului:  $\arg \{ \underline{Z} \} = \varphi$  astfel încât,

$Re(\underline{Z}) = R$  este rezistența circuitului și  
 $Im(\underline{Z}) = X$  este reactanța circuitului.

*Admitanța complexă,*

$$\underline{Y} = \frac{I}{U} = \frac{I}{\underline{U}} = \underline{Z}e^{-j\varphi} = G - jB = f(\omega, R, L, C), \quad (6.14)$$

are modulul egal cu impedanța circuitului,  $|\underline{Y}| = Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  și argumentul egal cu defazajul circuitului:  $\arg \{ \underline{Y} \} = -\varphi$  astfel încât,

$Re(\underline{Y}) = G$  este conductanța circuitului și  
 $Im(\underline{Y}) = B$  este susceptanța circuitului.

### **Teorema conservării puterilor complexe, active și reactive**

Energia electromagnetică absorbită sau cedată de un circuit electric, raportată la unitatea de timp, se numește putere instantanee. Se consideră o rețea electrică liniară, conexă și izolată, cu  $n$  noduri și  $l$  laturi în regim permanent sinusoidal.

Pentru puterea complexă a unei laturi complete de circuit se consideră expresia:

$$\underline{S}_j = \underline{U}_j \underline{I}_j^* \quad (6.15)$$

Dacă se transformă generatoarele de curent în generatoare echivalente de tensiune și se aplică teorema a I-a Kirchhoff la cele  $n$  noduri ale rețelei, se obțin ecuațiile:

$$\sum_{j \in (k)} \underline{I}_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.16)$$

Luând valorile complexe conjugate ale celor doi membri ai fiecărei ecuații, avem:

$$\sum_{j \in (k)} \underline{I}_j^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.17)$$

Înmulțind fiecare din aceste relații cu valoarea complexă  $\underline{V}_k$  a potențialului sinusoidal al nodului ( $k$ ) și adunând membru cu membru ecuațiile astfel obținute, rezultă:

$$\sum_{k=1}^n \underline{V}_k \sum_{j \in (k)} \underline{I}_j^* = 0. \quad (6.18)$$

În aceasta relație fiecare curent  $\underline{I}_j^*$  este conținut de doi termeni: unul cu semnul "+" pentru nodul ( $k$ ) din care iese curentul și altul cu semnul minus "-" pentru nodul ( $i$ ) în care intră curentul (fig. 3). Dând factor comun curentul din cei doi termeni care-l conțin, se obțin termeni de forma:  $(\underline{V}_k - \underline{V}_i) \cdot \underline{I}_k^* = \underline{U}_j \cdot \underline{I}_k^*$ , unde  $\underline{U}_j = \underline{V}_k - \underline{V}_i$  este tensiunea la bornele laturii. În acest fel, relația (18) se scrie:

$$\sum_{j=1}^l \underline{U}_j \underline{I}_j^* = 0, \quad \text{respectiv:} \quad \sum_{j=1}^l \underline{S}_j = 0. \quad (6.19)$$

Separând părțile reale și imaginare ale puterilor complexe, rezultă prima formă a teoremei de conservare a puterilor active și reactive:

$$\sum_{j=1}^l P_j = 0 ; \quad \sum_{j=1}^l Q_j = 0. \quad (6.20)$$

Puterile complexă  $\underline{S}$ , activă  $P$  și reactivă  $Q$  ale unei rețele conexe și izolate, egale cu sumele puterilor complexe  $\underline{S}_j$ , active  $P_j$  și reactive  $Q_j$  ale laturilor sunt nule:

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^l \underline{U}_j \underline{I}_j^* = 0 ; \quad P = \sum_{j=1}^l U_j I_j \cos \varphi_j = 0 ; \quad Q = \sum_{j=1}^l U_j I_j \sin \varphi_j = 0. \quad (6.21)$$

Teorema conservării puterilor complexe se poate scrie și sub o altă formă dacă tensiunile la bornele laturilor se exprimă pe baza formei generalizate a legii lui Ohm. Astfel, pentru o latură ca cea din fig. 6.3, legea lui Ohm în complex se scrie:

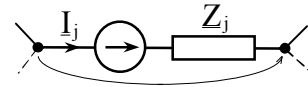


Fig. 6.3.

$$\underline{U}_j + \underline{E}_j = \underline{Z}_j \underline{I}_j, \quad \text{respectiv:} \quad \underline{U}_j = \underline{Z}_j \underline{I}_j - \underline{E}_j. \quad (22)$$

Multiplicând ambii membri ai ultimei ecuații cu  $\underline{I}_j^*$  și adunând membru cu membru ecuațiile pentru toate laturile rețelei, se obține

$$\sum_{j=1}^l \underline{U}_j \underline{I}_j^* = \sum_{j=1}^l \underline{Z}_j \underline{I}_j \underline{I}_j^* - \sum_{j=1}^l \underline{E}_j \underline{I}_j^* = 0, \quad (6.22)$$

respectiv:

$$\sum_{j=1}^l \underline{E}_j \underline{I}_j^* = \sum_{j=1}^l \underline{Z}_j \underline{I}_j^2, \quad (6.23)$$

Separând părțile reală și imaginară, rezultă:

$$\sum_{j=1}^l E_j I_j \cos \psi_j = \sum_{j=1}^l R_j I_j^2 ; \quad \sum_{j=1}^l E_j I_j \sin \psi_j = \sum_{j=1}^l X_j I_j^2. \quad (6.24)$$

Suma puterilor complexe ale surselor de energie din rețea este egală cu suma puterilor complexe ale elementelor pasive (impedanțelor). Corespunzător se formulează și teoremele de conservare ale puterilor active și reactive.

Pentru o rețea deschisă, pasivă, alimentată din exterior pe la  $m$  borne de acces, teorema conservării puterilor se formulează în mod adecvat: puterile activă  $P_b$  și reactivă  $Q_b$  transmise rețelei pe la bornele de acces sunt egale cu suma puterilor active  $P_j$ , respectiv reactive  $Q_j$  din laturile rețelei:

$$P_b = \sum_{k=1}^m V_k I_k \cos \psi_k = \sum_{j=1}^l U_j I_j \cos \varphi_j ; \quad Q_b = \sum_{k=1}^m V_k I_k \sin \psi_k = \sum_{j=1}^l U_j I_j \sin \varphi_j. \quad (6.25)$$

Ținând cont de proprietatea de separare a puterilor pe elementele de circuit în regim sinusoidal, bilanțul puterilor active și reactive poate fi scris și sub forma:

$$P_b = \sum_{k=1}^m V_k I_k \cos \psi_k = \sum_{j=1}^l R_j I_j^2 ; \quad Q_b = \sum_{k=1}^m V_k I_k \sin \psi_k = \sum_{j=1}^l X_j I_j^2. \quad (6.26)$$

## 6.2. APLICAȚII ȘI PROBLEME

6.1. Tensiunea alternativă sinusoidală aplicată la bornele unui circuit are expresia:  $u=60\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)$ , iar curentul care-l strabate:  $i=3\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$ .

a) Să se scrie și să se reprezinte în complex nesimplificat și simplificat tensiunea  $u$  și curentul  $i$ . Să se calculeze impedanța complexă  $\underline{Z}$ , admitanța complexă  $\underline{Y}$ , puterea aparentă complexă  $\underline{S}$ .

b) Cum se modifică expresiile complexe ale tensiunii și curentului, impedanța  $\underline{Z}$ , admitanța  $\underline{Y}$  puterea aparentă  $\underline{S}$ , dacă axele se rotesc cu  $\pm\frac{\pi}{4}$ .

Rezolvare.

$$a) u=60\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\underline{u}=60e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)};$$

$$\underline{U}=\frac{60}{\sqrt{3}}e^{j\frac{\pi}{3}}=\frac{60}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right)=15\cdot\sqrt{2}(1+j\sqrt{3}).$$

$$i=3\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\underline{i}=3e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)};$$

$$\underline{I}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6}-j\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-j).$$

$$\underline{Z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{60}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=20e^{j\frac{\pi}{2}}=j20;$$

$$\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{\underline{i}}{\underline{u}}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=\frac{1}{20e^{j\frac{\pi}{2}}}=0,05e^{j\frac{\pi}{2}}=-j0,05.$$

b) Presupunând că axele se rotesc cu unghiul  $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$ , figura 6.4, expresiile devin:

$$\underline{U}=\frac{60}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{60}{\sqrt{2}}e^{j15^0\pi\cdot 180^0}$$

$$\underline{I}=\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-j\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot e^{-j75^0\pi\cdot 180^0}$$

$$\underline{Z}=20e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=20e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$\underline{Y}=\frac{1}{20}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{20}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$\underline{S}=90e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=90e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

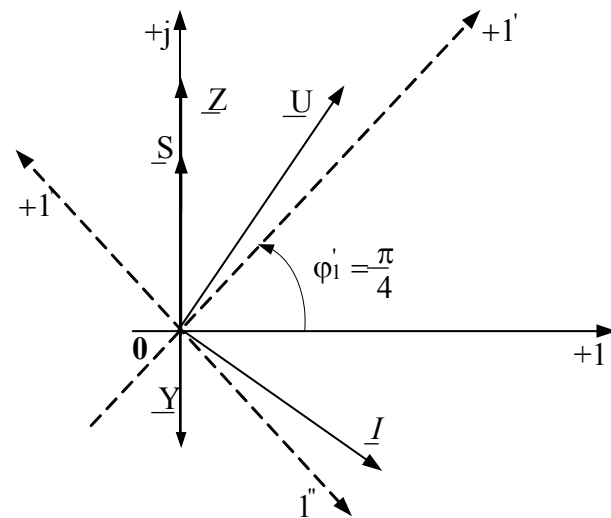


Fig. 6.4.

Considerând unghiul de rotire al axelor  $\varphi_1'' = -\frac{\pi}{4}$ ,

$$\underline{U} = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{j\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{60}{\sqrt{2}} e^{j105^\circ \pi/180^\circ}$$

$$\underline{I} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{j15^\circ \pi/180^\circ}; \quad \underline{Z} = 20 e^{j\frac{3\pi}{4}}; \quad \underline{S} = 90 e^{j\frac{3\pi}{4}}; \quad \underline{Y} = \frac{1}{20} e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

6.2. Se dă circuitul din fig. 6.5. alimentat de o tensiune alternativă sinusoidală  $u = \sqrt{2} \cdot 100 \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{4}\right)$ . Parametrii circuitului:  $R = 10 \Omega$ ;  $L = \frac{0,1}{\pi} \text{H}$ ;  $C = \frac{10^{-3}}{\pi} \text{F}$ .

Să se calculeze:

- Impedanța echivalentă a rețelei, rezistența și reactanța echivalentă.
- Admitanța, susceptanța și conductanța echivalentă.
- Valorile instantanee ale curenților  $i_c$ ,  $i_R$ ,  $i_L$  și a tensiunii  $u_{AB}$ .
- Să se efectueze bilanțul puterilor.
- Să se rezolve utilizând diagrama polară a circuitului.

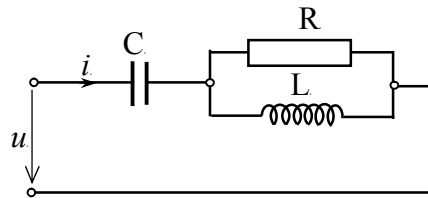


Fig. 6.5.

Reprezentarea în complex simplificat a tensiunii sinusoidale:

$$u = \sqrt{2} \cdot 100 \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\underline{U} = 100 e^{j\frac{5\pi}{4}} = -50 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + j)$$

a) Impedanța complexă echivalentă,

$$\underline{Z}_e = jX_c + \frac{R(jX_L)}{R + jX_L} = 5 - j5 = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = R_e + jX_c$$

$$R_e = 5 \Omega$$

$$X_c = -5 \Omega$$

Circuitul are caracter capacitiv.

b) Admitanța complexă echivalentă,

$$\underline{Y}_e = \frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{5 - j5} = \frac{1}{10} + j\frac{1}{10} = G_e - jB_e$$

$$G_e = \frac{1}{10} \text{S}; \quad B_e = -\frac{1}{10} \text{S}$$

$$c) \quad \underline{I}_C = \frac{U}{Z_e} 10 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{3}} = -j \cdot 10\sqrt{2}$$

Utilizând regula divizorului de curent, rezultă:

$$\underline{I}_L = \underline{I} \frac{R}{R + j\omega L} = 10 \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}} = -5 \cdot \sqrt{2}(1 + j)$$

$$\underline{I}_R = \underline{I} \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = 10 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{4}} = 5 \cdot \sqrt{2}(1 - j)$$

Valorile instantanee ale curenților  $i_c$ ,  $i_R$ ,  $i_L$  și a tensiunii  $u_{AB}$ .

$$i_C = \sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_L = \sqrt{2} \cdot 10 \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$i_R = \sqrt{2} \cdot 10 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$u_{AB} = R i_R = \sqrt{2} \cdot 100 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

d) Bilanțul puterilor.

Puterea aparentă complexă absorbită de circuit pe la borne este:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_C^* = 1000 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{7\pi}{4}} = 1000 - j1000$$

$$P = R \cdot i_R^2 = 1000 \text{ W}$$

$$Q = \omega L \cdot I_C^* - \frac{1}{\omega C} \cdot I_C^2 = 100 \text{ VAR}$$

f) Diagrama polară a circuitului este prezentată în fig. 6.6.

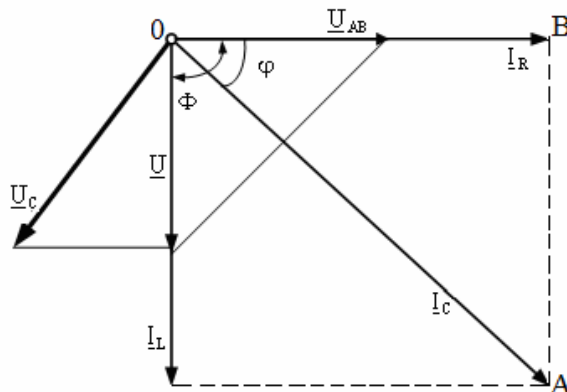


Fig. 6.6.

6.3. Câtă energie electrică consumă o lampă alimentată la o tensiune de 220 V prin care trece un curent de 0,3A dacă ea funcționează timp de 15 minute.

$$R: W = UI t = 220 \cdot 0,3 \cdot 15 \cdot 60 = 59400 \text{Ws} = 59400/3600 \text{ Wh} = 16,5 \text{ Wh} = 0,0165 \text{ kWh}.$$

6.4. Un radiator electric având rezistența  $R=20 \Omega$  este străbătut de un curent  $I=10 \text{ A}$  și funcționează timp de două ore și 45 de minute. Câtă energie consumă?

$$R: W = RI^2 t = 20 \cdot 100 \cdot (2 + 3/4) = 5500 \text{ Wh} = 5,5 \text{ kWh}.$$

6.5. Să se determine pierderea de tensiune în volți și procente pentru o porțiune dintr-un conductor având rezistența de  $0,5 \Omega$ , prin care trece un curent de 8A, tensiunea de alimentare fiind de 220 V.

$$R: \Delta U = RI = 0,5 \cdot 8 = 4 \text{V}; \Delta u = 4/220 \cdot 100 = 1,8 \%. W = 0,0165 \text{ kWh}.$$

6.6. La temperatura mediului ambiant  $t_1 = 15^0$ , rezistența unui bobinaj al unei mașini electrice este  $R_1 = 40 \Omega$ . După o funcționare mai îndelungată, rezistența bobinajului crește la valoarea  $R_2 = 50 \Omega$ . Să se calculeze temperatura  $t_2$  la care a ajuns bobinajul după funcționare, știind că bobinajul este făcut din cupru cu coeficient de temperatură  $\alpha = 0,004$ .

$$R: R_2 = R_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)]; t_2 = t_1 + (R_2 - R_1)/\alpha/R_1 = 77,5^0 \text{C}.$$

6.7. Pe plăcuța unui electromotor monofazat sunt trecute următoarele date:  $P = 2 \text{ kW}$ ,  $I = 5 \text{ A}$ ,  $\cos \varphi = 0,8$ . Să se determine tensiunea la care lucrează acest electromotor.

$$R: P = UI \cos \varphi; U = P/I/\cos \varphi = 2000/5/0,8 = 500 \text{V}.$$

6.8. Ce curent maxim se absoarbe printr-un bransament monofazat de 220 V de către o instalație electrică dintr-o locuință în care sunt instalate : 5 lămpi de câte 100 W, un aparat TV de 30 W și un frigider de 100 W ?

$$R: P = UI \cos \varphi \approx UI; I = P/U = (500+30+100)/220 \approx 2,86 \text{ A}.$$

6.9. Să se calculeze impedanța și defazajul între tensiune și curent ale unei bobine cu rezistența activă de  $1,5 \Omega$  și cu o reactanță de  $2 \Omega$ .

$$R: Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \Omega; \cos \varphi = R/Z = 0,6; \varphi \approx 53^0.$$

6.10. Un abonat consumă energie electrică prin utilizarea unei plite electrice cu rezistența de  $30 \Omega$  ce absoarbe un curent electric de 8 A și a 4 becuri a câte 75 W, funcționând toate timp de o oră și 15 minute. Să se determine energia electrică totală consumată de abonat în acest interval de timp.

$$R: \text{Puterea plitei electrice este } P_1 = R I^2 = 30 \cdot 8^2 = 1920 \text{W},$$

$$\text{Puterea becurilor este } P_2 = 4 \times 75 = 300 \text{W}.$$

Energia electrică totală consumată în intervalul de timp considerat este:

$$W = (P_1 + P_2) \cdot t = (1,920 + 0,3) \cdot (1 + 15/60) = 2,22 \cdot 1,25 = 2,775 \text{ kWh}$$



## 7. CIRCUITE TRIFAZATE LINIARE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 7.1. CIRCUITE TRIFAZATE ECHILIBRATE ALIMENTATE CU TENSIUNI SIMETRICE SINUSOIDALE. PROBLEME REZOLVATE

7.1.1. *Un generator electric trifazat cu tensiuni simetrice sinusoidale alimentează două receptoare trifazate echilibrate conectate în triunghi și respectiv în stea ca în figura 7.1. Să se determine curenții totali de linie și puterile activă, reactivă și aparentă debitate de generator. Se neglijează impedanța liniei de alimentare. Impedanțele receptoarelor sunt:  $Z_1 = (2 + j3)\Omega$ ;  $Z_2 = (3 + j2)\Omega$ .*

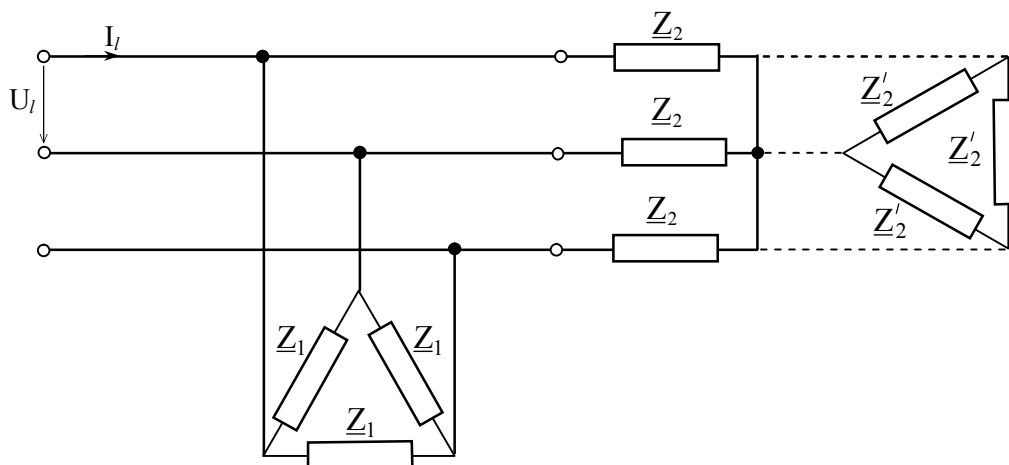


Fig. 7.1.

Se transfigurează receptorul conectat în stea într-un receptor echivalent conectat în triunghi cu impedanțele  $Z_2^I = 3Z_2 = 3(3 + j2)\Omega$ . În acest fel, cele două receptoare în triunghi au laturile în paralel, astfel încât, prin compunere, se ajunge la un receptor echivalent unic în triunghi cu impedanțele fazelor

$$\underline{Z} = \frac{Z_1 \cdot Z_2^I}{Z_1 + Z_2^I} = \frac{3(2 + j2)(3 + j2)}{11 + j9} = \frac{j39}{11 + j9} \approx (1,74 + j2,19)\Omega,$$

$$Z = |\underline{Z}| \approx 2,74\Omega, \quad \varphi = \arctg \frac{\Im\{\underline{Z}\}}{\Re\{\underline{Z}\}} = \frac{11}{9}.$$

Curenții din laturile receptorului în triunghi au valoarea efectivă:

$$I_f = \frac{U_f}{Z} = \frac{380}{2,74} \approx 138,7\text{A}.$$

Curenții debitați de generator au valoarea efectivă

$$I_l = \sqrt{3}I_f \approx 240\text{A},$$

iar puterile aparentă, activă și respectiv reactivă sunt:

$$S = \sqrt{3} U_l I_l \approx 158 \text{ kVA};$$

$$P = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 240 \cdot 0,633 \approx 100 \text{ kW};$$

$$Q = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 240 \cdot 0,774 \approx 122,6 \text{ kVAR}.$$

7.1.2. O linie trifazată echilibrată având lungimea  $l = 500 \text{ m}$ , rezistența specifică  $R_s = 2 \cdot 10^{-4} \Omega/\text{m}$  și inductivitatea specifică  $L_s = 6,38 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ , alimentează sub tensiuni simetrice,  $3 \times 380/220 \text{ V}$ ,  $50 \text{ Hz}$ , următorii consumatori: un motor electric cu puterea  $P_M = 10 \text{ kW}$  și factorul de putere  $\cos \varphi_M = 0,5$ ; trei bobine identice cu inductivitatea  $L = 0,01 \text{ H}$ , trei condensatoare conectate în triunghi de capacitate  $C_\Delta = 10^3/9 \text{ F}$  și o instalație de iluminat cu puterea instalată  $P_i = 30 \text{ kW}$  ca în figura 7.2.

Se cer: curenții de linie, factorul de putere total la consumator și tensiunile ce trebuie aplicate la intrarea liniei ca tensiunile la consumator să fie cele prescrise.

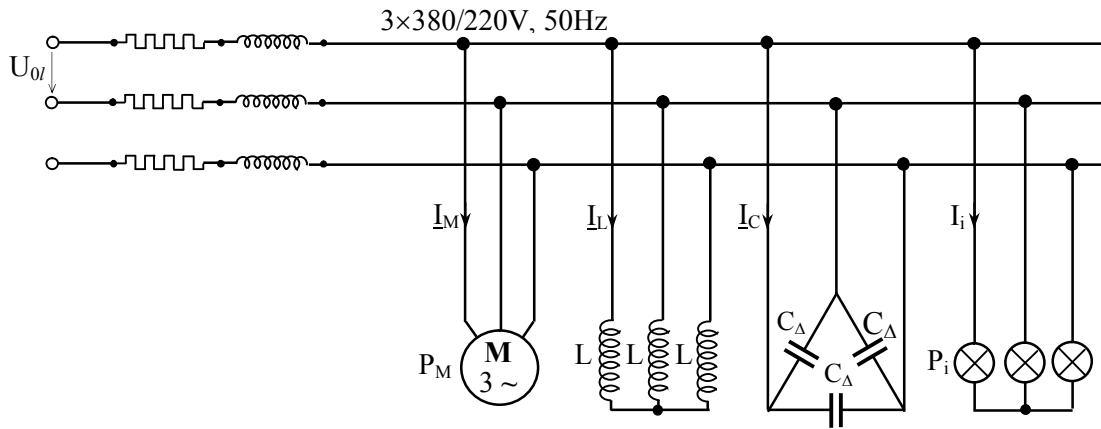


Fig. 7.2.

Curentul de linie absorbit de motor are valoarea efectivă

$$I_M = \frac{P_M}{\sqrt{3} U_l \cos \varphi_M} = \frac{10000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,5} \approx 30,4 \text{ A},$$

iar în complex este

$$\underline{I}_M = I_M (\cos \varphi_M + j \sin \varphi_M) = 30,4 (0,5 + j0,87) \approx (15,2 + j26,4) \text{ A}.$$

Curentul complex al bobinelor este

$$I_L = \frac{U_f}{j\omega L} = \frac{220}{j314 \cdot 0,01} = -j70,084 \text{ A}.$$

Condensatoarele conectate în triunghi se pot înlocui cu condensatoare conectate în stea cu capacitatea echivalentă

$$C_{\text{stea}} = 3C_\Delta = \frac{1}{3} \cdot 10^3 \mu\text{F}.$$

Astfel, curentul complex al condensatoarelor rezultă:

$$I_C = j\omega C_{\text{stea}} U_f = j \frac{10^3}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 314 \cdot 220 = j23,027 \text{ A}.$$

Curentul absorbit de instalația de iluminat este real și are valoarea efectivă

$$I_i = \frac{P_i}{3U_f} = \frac{30000}{3 \cdot 220} = 45,45 \text{ A.}$$

Curentul total, de linie rezultă:  $I_l = I_M + I_L + I_C + I_i = (60,65 - j20,68) \text{ A}$ ,  
cu valoarea efectivă  $I_l = \sqrt{60,65^2 + 20,68^2} \approx 64,08 \text{ A}$ .

Factorul de putere la consumator este

$$\cos\varphi = \frac{\Re\{I_l\}}{|I_l|} = \frac{60,65}{64,08} = 0,95.$$

Căderea complexă de tensiune pe fiecare conductor al liniei se calculează astfel:

$$\Delta \underline{U}_l = \underline{Z}_l I_l = 500(2 \cdot 10^{-4} + j314 \cdot 6,38 \cdot 10^{-7})(60,65 + j20,68) = (8,13 + j3,97) \text{ V}.$$

Tensiunea de fază la bornele de intrare a liniei este

$$\underline{U}_{0f} = \underline{U}_f + \Delta \underline{U}_l = (228,13 + j3,97) \text{ V},$$

cu valoarea efectivă,  $U_{0f} = \sqrt{228,13^2 + 3,97^2} \approx 228 \text{ V}$ .

Valoarea efectivă a tensiunii de linie ce trebuie aplicată la intrarea liniei este

$$U_{0l} = \sqrt{3} \cdot 228 \approx 395 \text{ V}.$$

O altă metodă de rezolvare a problemei se bazează pe calculul puterilor și este prezentată în tabelul următor.

Consumator	Puterea activă P [W]	Puterea reactivă [VAR]	Relații de calcul
Motor	10 000 W	17 320,5 VAR	$Q_M = P_M \operatorname{tg}\varphi_M =$ $= P_M \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_M}}{\cos \varphi_M}$
Bobină	0	46 242 VAR	$Q_L = 3 \frac{U_f^2}{\omega L}$
Condensator		- 45 341,6 VAR	$ Q_C  = 3\omega C_\Delta U_f^2$
Iluminat	30 000 W		
Total consumator	40 000 W	18 221 VAR	$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 43954,6 \text{ VA}$ $I = \frac{S}{3U_f} = 66,6 \text{ A},$ $\cos\varphi_1 = \frac{P}{S} = 0,91$
Linie	1330,7 W	1333 VAR	$P_l = 3/R_s I^2 = 1330,7 \text{ W}$ $Q_l = 3/L_s \omega I^2 = 1333 \text{ VAR}$
TOTAL	41 330,7	19 554 VAR	$S_0 = \sqrt{P^2 + Q^2} = 45 723 \text{ VA}$ $U_{0l} = \frac{S_0}{\sqrt{3}I} = 396 \text{ V}$ $\cos\varphi_0 = \frac{P}{S} = 0,9$

7.1.3. Un transformator de forță trifazat de putere  $S_n = 10 \text{ MVA}$  are tensiunile nominale  $U_{1n} = 20 \text{ kV}$  și  $U_{2n} = 6,3 \text{ kV}$ . Să se calculeze curentul nominal primar.

$$R: S_n = S_{1n} = \sqrt{3} U_{1n} I_{1n}; I_{1n} = S_n / (1,73 \cdot U_{1n}) = 10 / (1,73 \cdot 20) \approx 0,289 \text{ kA} = 289 \text{ kA}.$$

7.1.4. Un electromotor trifazat de  $1500 \text{ W}$  (putere nominală) absoarbe un curent de  $4,9 \text{ A}$  la un factor de putere  $\cos \varphi = 0,85$ . Să se determine tensiunea la care funcționează electromotorul.

$$R: P = \sqrt{3} UI \cos \varphi, U = P / (\sqrt{3} I \cos \varphi), U = 1500 / (\sqrt{3} \cdot 4,9 \cdot 0,85) = 208 \text{ V}.$$

7.1.3. O linie electrică trifazată echilibrată având lungimea  $L = 100 \text{ m}$  și secțiunea  $S = 25 \text{ mm}^2$ , alimentează un electromotor de  $15 \text{ kW}$ ,  $3 \times 380 \text{ V}$ ,  $\cos \varphi = 0,8$ , randamentul  $\eta = 0,9$ ; se consideră  $\rho = 1/32 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ . Să se determine: a) curentul electric  $I_n$  absorbit de electromotor; b) pierderea de tensiune pe linie până la electromotor; c) valoarea maximă a curentului la care poate fi reglat releul termic al întrerupătorului automat al electromotorului, știind că, conform normativelor, releul termic poate fi reglat la un curent cuprins între  $(1,05 - 1,2) I_n$ .

$$a) P_{\text{nominală motor}} = P_n = P_{\text{utilă la arbore}} = \eta \cdot P_{\text{electrică absorbită}} = \eta \cdot P_{\text{abs}}$$

$$P_{\text{abs}} = P_n / \eta = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi; I_n = P_n / (\eta \cdot \sqrt{3} U_n \cos \varphi) = 15000 / (0,9 \cdot \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8).$$

$$\text{Deci, } I_n \approx 31,65 \text{ A}.$$

b) Facem ipoteza că la bornele motorului alimentat prin linia trifazată de lungime  $L$  avem tensiunea și curentul nominal. Utilizând curentul nominal calculat mai sus, determinăm căderea de tensiune pe linie.

$$\Delta U = \sqrt{3} \cdot I_n \cdot \frac{\rho L}{S} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 31,65 \cdot \frac{100}{32 \cdot 25} \cdot 0,8 = 5,48 \text{ V}.$$

$$c) I_{\text{max}} = 1,2 I_n = 1,2 \cdot 31,65 \approx 38 \text{ A}.$$

7.1.4. Într-un atelier se înlocuiește un polizor cu un strung. Știind că circuitul care alimentează polizorul are 4 conductoare izolate de aluminiu de  $2,5 \text{ mm}^2$ , montate în tub, să se verifice dacă prin acest circuit se poate alimenta strungul și în caz contrar să se redimensioneze circuitul. Se verifică căderea de tensiune și densitatea de curent, în regim normal și la pornirea electromotorului strungului. Se cunosc: puterea electromotorului strungului  $7 \text{ kW}$ , tensiunea de alimentare  $380/220 \text{ V}$ ,  $\cos \varphi = 0,8$ , randamentul  $\eta = 0,9$ , curentul de pornire  $I_p = 6 I_{\text{nominal}}$ , lungimea circuitului  $20 \text{ m}$ , rezistivitatea  $\rho = 1/34 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ , pierderea de tensiune la pornirea electromotorului  $< 10\%$ , densitatea admisibilă de curent pentru Al în regim permanent este  $\delta_n = 6 \text{ A/mm}^2$ , iar în regim de pornire  $\delta_p = 20 \text{ A/mm}^2$ .

$$P_{\text{nominală motor}} = P_n = P_{\text{utilă la arborele mașinii}} = \eta \cdot P_{\text{electrică absorbită}} = \eta \cdot P_{\text{abs}}$$

$$P_{\text{abs}} = \frac{P_n}{\eta} = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi_n; I_n = \frac{P_n}{\eta \sqrt{3} U_n \cos \varphi_n} = \frac{7000}{0,9 \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,8} = 14,77 \text{ A}.$$

$$I_{\text{pornire}} = 6I_n = 6 \cdot 14,77 = 88,62\text{A}.$$

În conformitate cu normativul I7/2000 anexa 6, conductorul de Al de 2,5 mm<sup>2</sup> poate fi utilizat pentru realizarea circuitelor de forță trifazate din interiorul clădirilor – se verifică pierderile de tensiune, densitatea de curent și se face calculul de încălzire:

a) Verificarea conductorului de alimentare din punct de vedere al căderii maxim admisibile de tensiune și d.p.d.v. al încălzirii maxime în regimul de funcționare de durată.

$$\text{Căderea de tensiune: } \Delta U = \sqrt{3} R I_n \cos\varphi_n \text{ unde, } R = \frac{\rho L}{S}.$$

$$\Delta U = \sqrt{3} \frac{20}{34 \cdot 2,5} \cdot 14,77 \cdot 0,8 \approx 5,4\text{V}, \text{ respectiv } \Delta u = 5,4 \cdot 100/380 = 1,42\% < \Delta u_{\text{max.adm.}}$$

Pentru brânșamente alimentate din rețeaua stradală  $\Delta u_{\text{max.adm.}} = 5\%$ , deci conductorul îndeplinește cerința de cădere de tensiune maxim admisibilă.

În conformitate cu art 4.8 din I7/2002,  $I_{\text{max.adm.}}$  pentru 3 conductoare de Al izolate cu PVC montate în tub este  $I_{\text{max.adm.}} = 15\text{A}$ .

$I_{\text{abs.motor}} = 14,77\text{A} < I_{\text{max.adm.}} = 15\text{A}$  pe cale, în consecință conductorul îndeplinește cerința de încălzire maxim admisibilă.

b) Verificarea conductorului de alimentare d.p.d.v. al căderii maxim admisibile de tensiune și d.p.d.v. al densității de curent maxim admisibile în regimul de pornire.

$$\text{b1) } I_p = 6 I_n \cdot \Delta U_p = 6 \cdot \Delta U_{\text{reg.funct.durata}} = 6 \times 5,4 = 32,4\text{V}$$

$\Delta u_p[\%] = 6 \cdot 1,42 = 8,52\% < 10\%$  (valoarea maxim admisibilă conform enunțului problemei) și conductorul îndeplinește cerința de cădere de tensiune maxim admisibilă în regim de pornire a motorului

b2) În conformitate cu art 5.1.17 din I7/2002 densitatea maxim admisibilă pentru conductoarele de aluminiu în regimul de pornire al motoarelor este de 20A/mm<sup>2</sup>.

Densitatea curentului de pornire

$$\delta_p = I_p/S = 6 \cdot 14,77 / 2,5 = 35,448\text{A/mm}^2 > 20\text{A/mm}^2,$$

deci conductorul nu îndeplinește cerința de densitate maxim admisibilă de curent în regim de pornire. Secțiunea minimă a conductorului ce rezultă din această condiție este

$$S_{\text{min}} = I_p/\delta_{p,\text{max.}} = 6 \cdot 14,77 / 20 = 4,43\text{mm}^2.$$

Este necesară alegerea unui conductor de Al cu secțiunea standard  $S = 6\text{mm}^2$  pentru care rezultă densitatea de curent la pornire  $\delta_p = 14,77\text{A/mm}^2 < 20\text{A/mm}^2$ .

7.1.5. O coloană electrică de 380/220V cu conductoare de aluminiu în lungime de 25m alimentează un tablou secundar de la care pleacă trei circuite pentru:

- un electromotor trifazat de 4kW
- un electromotor monofazat de 2kW
- 20 de lămpi de câte 100W fiecare.

Electromotoarele au pornire directă și absorb la pornire de șase ori curentul nominal  $I_n$ . Pierderea de tensiune admisă în coloană este de 2%, iar la pornirea

electromotoarelor maximum 10%; conductivitatea  $\gamma = 34\text{m}/\Omega\text{mm}^2$ ,  $\cos \varphi = 0,7$  și randamentul  $\eta = 0,9$ . Curentul maxim admisibil în regim permanent, pentru conductoare de Al cu secțiunea de  $6\text{ mm}^2$  este de  $30\text{A}$ , iar densitatea admisibilă de curent pentru Al, în regim de pornire  $\delta_p = 20\text{A}/\text{mm}^2$ . Ținându-se seama de încărcarea echilibrată a fazelor și de un mers simultan la plină sarcină a tuturor receptoarelor, să se determine secțiunea coloanei. Se va face verificarea la densitate de curent în regim de pornire și la căderea de tensiune.

Pentru echilibrarea sarcinilor pe cele trei faze, electromotorul monofazat se conectează la faza R, câte 10 lămpi se conectează la faza S, respectiv la faza T. Cea mai încărcată va rezulta, în acest caz, faza R; se va calcula secțiunea coloanei luând în considerare curentul total din faza R, unde este racordat electromotorul monofazat.

$$\begin{aligned} P_{\text{abs motor trifazat}} &= P_n / \eta = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi_n \rightarrow I_n = P_n / (\eta \sqrt{3} U_n \cos \varphi_n) = \\ &= 4000 / (0,9 \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,7) = 9,65\text{A}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{abs motor monofazat}} &= P_n / \eta = U_n I_n \cos \varphi_n \rightarrow I_n = P_n / (\eta U_n \cos \varphi_n) = \\ &= 2000 / (0,9 \cdot 380 \cdot 0,7) = 8,35\text{A}. \end{aligned}$$

Curentul absorbit pe faza R are valoarea efectivă:

$$I_R = I_{\text{motor trifazat}} + I_{\text{motor monofazat}} = 9,65 + 8,35 = 18\text{A},$$

În regim permanent, la încărcare maximă (ambele motoare în funcțiune la sarcină nominală),  $I_R = 18\text{A} < I_{\text{admisibil}} = 30\text{A}$ .

Căderea de tensiune pe coloana de alimentare:  $\Delta U = \sqrt{3} R I_n \cos \varphi_n$  unde,  $R = \frac{L}{\gamma S}$ .

$$\Delta U = \sqrt{3} \frac{25}{34 \cdot 6} \cdot 18 \cdot 0,7 \approx 2,67\text{V}, \text{ respectiv } \Delta u = 2,67 \cdot 100 / 380 = 0,7\% < \Delta u_{\text{max.adm.}} = 2\%.$$

În cazul cel mai solicitant, la pornirea simultană a motoarelor, curentul pe faza R poate avea valoarea maximă:

$$I_{pR} = 6 I_n = 6 \cdot 18 = 108\text{A}.$$

Pentru conductorul de aluminiu cu secțiunea de  $6\text{ mm}^2$  rezultă o densitate de curent la pornire:

$$\delta_p = 108 / 6 = 18\text{A}/\text{mm}^2 < \delta_{p,\text{admisibil}} = 20\text{A}/\text{mm}^2.$$

Căderea de tensiune pe coloană în aceasta situație rezultă:

$$\Delta U = \sqrt{3} \frac{25}{34 \cdot 6} \cdot 108 \cdot 0,7 \approx 16,02\text{V}, \Delta u = 16,02 \cdot 100 / 380 = 4,2\% < \Delta u_{\text{max.adm.p}} = 10\%.$$

## 7.2. METODA COMPONENTELOR SIMETRICE. APLICAȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE.

### 7.2.1. Considerații teoretice

Metoda componentelor simetrice constă în descompunerea unui sistem trifazat nesimetric în trei sisteme simetrice, numite *componente simetrice* și apoi în suprapunerea regimurilor de funcționare produse de fiecare sistem simetric în parte. Metoda se poate aplica deci numai circuitelor electrice liniare, unde este valabil principiul suprapunerii efectelor.

Fie sistemul trifazat nesimetric dat de mărimile

$$\begin{cases} y_1(t) = \sqrt{2}Y_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ y_2(t) = \sqrt{2}Y_2 \sin(\omega t + \gamma_2) , \\ y_3(t) = \sqrt{2}Y_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \end{cases} \quad (7.1)$$

cu reprezentarea în complex:

$$\underline{Y}_1 = Y_1 e^{j\gamma_1}, \underline{Y}_2 = Y_2 e^{j\gamma_2}, \underline{Y}_3 = Y_3 e^{j\gamma_3} . \quad (7.2)$$

Sistemul nesimetric se descompune în trei sisteme simetrice:

- sistemul simetric de succesiune directă

$$\underline{Y}_{1d} = \underline{Y}_d; \underline{Y}_{2d} = a^2 \underline{Y}_d; \underline{Y}_{3d} = a \underline{Y}_d ; \quad (7.2)$$

- sistemul simetric de succesiune inversă

$$\underline{Y}_{1i} = \underline{Y}_i; \underline{Y}_{2i} = a \underline{Y}_i; \underline{Y}_{3i} = a^2 \underline{Y}_i ; \quad (7.3)$$

- sistemul omopolar

$$\underline{Y}_{1h} = \underline{Y}_h; \underline{Y}_{2h} = \underline{Y}_h; \underline{Y}_{3h} = \underline{Y}_h . \quad (7.4)$$

Relațiile dintre componentele corespunzătoare sistemului nesimetric și cele ale sistemelor simetrice sunt:

$$\begin{cases} \underline{Y}_1 = \underline{Y}_d + \underline{Y}_i + \underline{Y}_h \\ \underline{Y}_2 = a^2 \underline{Y}_d + a \underline{Y}_i + \underline{Y}_h . \\ \underline{Y}_3 = a \underline{Y}_d + a^2 \underline{Y}_i + \underline{Y}_h \end{cases} \quad (7.5)$$

Rezolvând invers sistemul de ecuații (7.5), se obține:

$$\begin{cases} \underline{Y}_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + a \underline{Y}_2 + a^2 \underline{Y}_3) \\ \underline{Y}_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + a^2 \underline{Y}_2 + a \underline{Y}_3) . \\ \underline{Y}_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \end{cases} \quad (7.6)$$

## 7.2.2. Aplicații și probleme

7.2.2.1. Se dă rețeaua trifazată echilibrată din figura 7.3 alimentată cu un sistem de tensiuni sinusoidale nesimetrice:  $\underline{U}_{S0} = 300V$ ,  $\underline{U}_{S0} = j 100V$ ,  $\underline{U}_T = -j 100V$ . Impedanțele complexe au valorile:  $\underline{Z}' = j20\Omega$ ;  $\underline{Z}'' = j30\Omega$ ;  $\underline{Z}''_N = j10\Omega$ . Se cer curenții din ramurile rețelei.

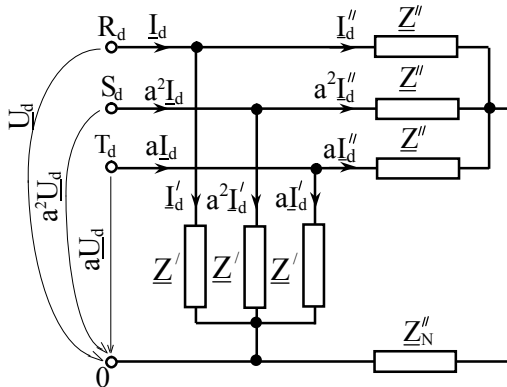
Componentele simetrice ale sistemului de tensiuni de alimentare este

$$\begin{cases} \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_{R0} + a\underline{U}_{S0} + a^2\underline{U}_{T0}) = 42,3V \\ \underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_{R0} + a^2\underline{U}_{S0} + a\underline{U}_{T0}) = 157,7V. \\ \underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_{R0} + \underline{U}_{S0} + \underline{U}_{T0}) = 100V \end{cases}$$

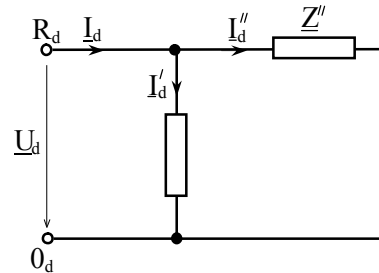
Schemele trifazate și corespunzător, schemele monofazate pentru componentele simetrice sunt date în figura 7.4.

Componentele simetrice ale curenților se determină ușor utilizând schemele monofazate de secvență directă  $\mathcal{S}_d$  (fig. 7.4,a2), inversă  $\mathcal{S}_i$  (fig. 7.4,b2) și homopolară  $\mathcal{S}_h$  (fig. 7.4,c2). Rezultă astfel:

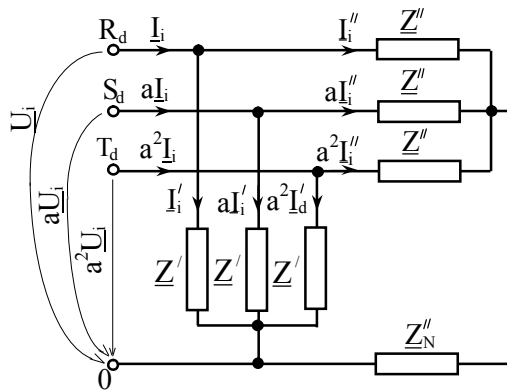
$$\underline{I}'_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}'} = -j2,12A, \quad \underline{I}''_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}''} = 1,41A; \quad \underline{I}_d = \underline{I}'_d + \underline{I}''_d = (1,41 - j2,12)A;$$



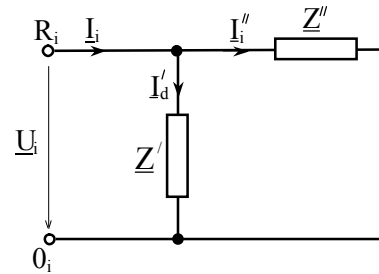
a1) Regimul simetric direct.



a2) Schema monofazată  $\mathcal{S}_d$



b1) Regimul simetric invers.



b2) Schema monofazată  $\mathcal{S}_i$

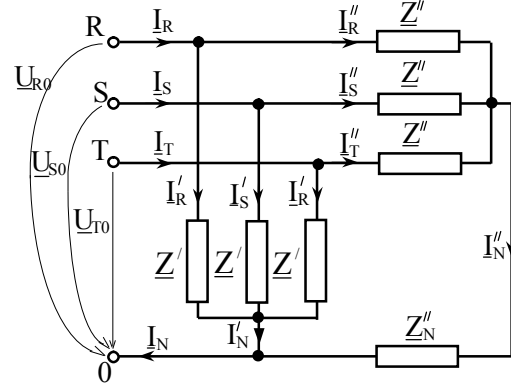


Fig.7.3.



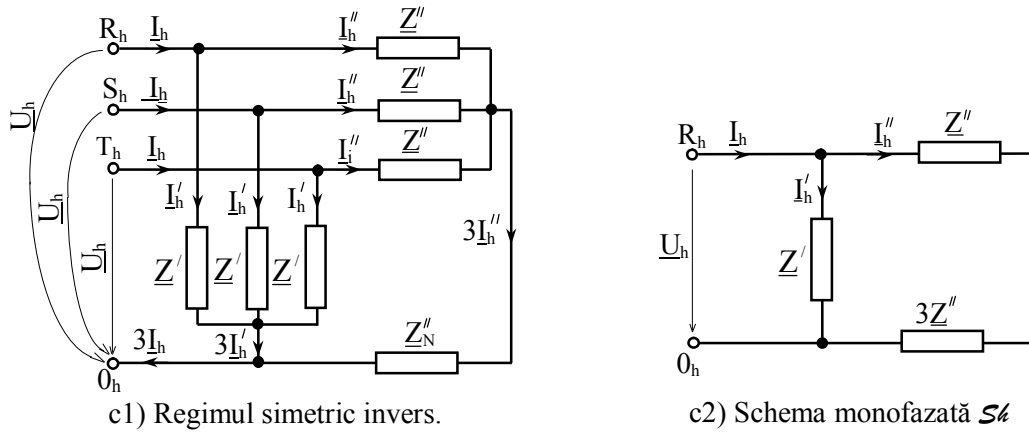


Fig. 7.4. Schemele rețelei corespunzătoare componentelor simetrice.

$$\begin{aligned} \underline{I}'_i &= \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}'} = -j7,88\text{A}, \quad \underline{I}''_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}''} = 5,25\text{A}; \quad \underline{I}_d = \underline{I}'_i + \underline{I}''_i = (5,25 - j7,88)\text{A}; \\ \underline{I}'_h &= \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}'} = -j5\text{A}, \quad \underline{I}''_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z}'' + \underline{Z}'_N} = 1,66\text{A}; \quad \underline{I}_h = \underline{I}'_h + \underline{I}''_h = (1,66 - j5)\text{A}. \end{aligned}$$

Curenții reali din rețea se determină astfel:

$$\begin{cases} \underline{I}_R = \underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h = (8,32 + j15)\text{A} \\ \underline{I}_S = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h = (3,32 + j3,32)\text{A} \\ \underline{I}_T = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h = (-6,65 - j3,32)\text{A} \end{cases} ; \begin{cases} \underline{I}'_R = \underline{I}'_d + \underline{I}'_i + \underline{I}'_h = -j15\text{A} \\ \underline{I}'_S = a^2 \underline{I}'_d + a \underline{I}'_i + \underline{I}'_h = 4,98\text{A} \\ \underline{I}'_T = a \underline{I}'_d + a^2 \underline{I}'_i + \underline{I}'_h = -4,98\text{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{I}''_R = \underline{I}''_d + \underline{I}''_i + \underline{I}''_h = 8,32\text{A} \\ \underline{I}''_S = a^2 \underline{I}''_d + a \underline{I}''_i + \underline{I}''_h = (-1,66 + j3,32)\text{A} \\ \underline{I}''_T = a \underline{I}''_d + a^2 \underline{I}''_i + \underline{I}''_h = (-1,66 - j3,32)\text{A} \end{cases} ; \begin{cases} \underline{I}'_N = \underline{I}'_R + \underline{I}'_S + \underline{I}'_T = -j15\text{A} \\ \underline{I}''_N = \underline{I}''_R + \underline{I}''_S + \underline{I}''_T = 5\text{A} \\ \underline{I}_N = \underline{I}'_N + \underline{I}''_N = (5 - j15)\text{A} \end{cases}$$

7.2.2.2. Un receptor trifazat este format din trei impedanțe  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  conectate în stea ca în figura 7.5. Să se determine curenții din rețea prin metoda componentelor simetrice în două situații: a) întrerupătorul K deschis (conexiunea stea fără fir neutru); b) întrerupătorul K închis (conexiunea stea cu fir neutru).

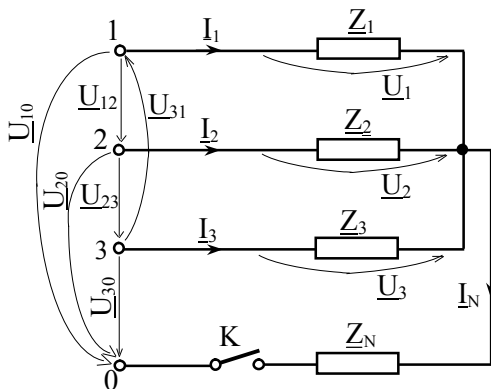


Fig. 7.5.

Tensiunile pe fazele receptorului  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  se scriu:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1; \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2; \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3. \quad (7.7)$$

Dacă se înlocuiesc curenții în funcție de componentele lor simetrice, se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 (\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 (a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i + \underline{I}_h) \\ \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 (a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i + \underline{I}_h) \end{cases} \quad (7.8)$$

Componentele simetrice ale tensiunilor pe fazele receptorului se determină astfel:

$$\begin{aligned}\underline{U}_d &= \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1\underline{I}_1 + a\underline{Z}_2\underline{I}_2 + a^2\underline{Z}_3\underline{I}_3) = \\ &= \frac{1}{3}[\underline{Z}_1(\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) + a\underline{Z}_2(a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i + \underline{I}_h) + a^2\underline{Z}_3(a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i + \underline{I}_h)] = \\ &= \frac{1}{3}[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_i + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}_h] .\end{aligned}$$

În același mod se stabilesc relațiile pentru componentele inversă și omopolară ale tensiunilor. Prin analogie cu componentele simetrice, se notează cu  $\xi_d, \xi_i$  și  $\xi_h$  impedanțele complexe de calcul:

$$\begin{aligned}\xi_d &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) \quad - \text{impedanța directă} \\ \xi_i &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) \quad - \text{impedanța inversă} \\ \xi_h &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \quad - \text{impedanța omopolară} \quad (7.9)\end{aligned}$$

Pentru componentele simetrice ale tensiunilor se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\underline{U}_d &= \xi_h \underline{I}_d + \xi_i \underline{I}_i + \xi_d \underline{I}_h \\ \underline{U}_i &= \xi_d \underline{I}_d + \xi_h \underline{I}_i + \xi_i \underline{I}_h \\ \underline{U}_h &= \xi_i \underline{I}_d + \xi_d \underline{I}_i + \xi_h \underline{I}_h\end{aligned} \quad (7.10)$$

**a) Cazul rețelei fără fir neutru.** Se dau tensiunile de linie nesimetrice:  $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$  pentru care se determină componentele simetrice

$$\underline{U}_{ld} = \frac{1}{3}(\underline{U}_{23} + a\underline{U}_{31} + a^2\underline{U}_{12}); \quad \underline{U}_{li} = \frac{1}{3}(\underline{U}_{23} + a^2\underline{U}_{31} + a\underline{U}_{12}).$$

Deoarece  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ , curenții nu au componenta homopolară,  $\underline{I}_h = 0$ , din (7.10) rezultă:

$$\underline{U}_d = \xi_h \underline{I}_d + \xi_i \underline{I}_i; \quad \underline{U}_i = \xi_d \underline{I}_d + \xi_h \underline{I}_i; \quad \underline{U}_h = \xi_i \underline{I}_d + \xi_d \underline{I}_i. \quad (7.11)$$

Dacă se alege ca fazor fundamental al tensiunilor de linie fazorul  $\underline{U}_{23}$ , componentele simetrice a acestor tensiuni rezultă:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ld} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{23} + a\underline{U}_{31} + a^2\underline{U}_{12}) = \frac{1}{3}[\underline{U}_2 - \underline{U}_3 + a(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) + a^2(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)] = \\ &= \frac{1}{3}(\underline{U}_2 + a\underline{U}_3 + a^2\underline{U}_1) - \frac{1}{3}(\underline{U}_3 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2) = \frac{1}{3}a^2(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) - \\ &- \frac{1}{3}a(\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3) = (a^2 - a)\underline{U}_d = -j\sqrt{3}\underline{U}_d = \sqrt{3}\underline{U}_d e^{-j\frac{\pi}{2}}; \\ \underline{U}_{li} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{23} + a^2\underline{U}_{31} + a\underline{U}_{12}) = \frac{1}{3}[\underline{U}_2 - \underline{U}_3 + a^2(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) + a(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)] = \\ &= j\sqrt{3}\underline{U}_d = \sqrt{3}\underline{U}_d e^{j\frac{\pi}{2}}; \\ \underline{U}_{lh} &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} + \underline{U}_{12}) = (\underline{U}_2 - \underline{U}_3 + \underline{U}_3 - \underline{U}_1 + \underline{U}_1 - \underline{U}_2) = 0.\end{aligned}$$

Avem așadar  $\underline{U}_{ld} = -j\sqrt{3}\underline{U}_d$ ,  $\underline{U}_{li} = j\sqrt{3}\underline{U}_i$  și utilizând ecuațiile (7.11) obținem:

$$\begin{cases} \underline{U}_{ld} = -j\sqrt{3}(\xi_h \underline{I}_d + \xi_i \underline{I}_i) \\ \underline{U}_{li} = j\sqrt{3}(\xi_d \underline{I}_d + \xi_h \underline{I}_i) \end{cases}$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații se obține

$$\begin{cases} \underline{I}_d = \frac{j}{\sqrt{3}} \frac{\underline{U}_{ld} \xi_h + \underline{U}_{li} \xi_i}{\xi_h^2 - \xi_d \xi_i} \\ \underline{I}_i = -\frac{j}{\sqrt{3}} \frac{\underline{U}_{ld} \xi_d + \underline{U}_{li} \xi_h}{\xi_h^2 - \xi_d \xi_i} \end{cases}$$

cu care se determină curenții pe fazele receptorului:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_i \\ \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i \\ \underline{I}_3 = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i \end{cases}$$

**b) b) Cazul rețelei cu fir neutru.** Se dau tensiunile de alimentare prin componentele lor de fază nesimetrice  $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$  pentru care se determină componentele simetrice

$$\begin{cases} \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_{10} + a \underline{U}_{20} + a^2 \underline{U}_{30}) \\ \underline{U}_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_{10} + a^2 \underline{U}_{20} + a \underline{U}_{30}) \\ \underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_{10} + \underline{U}_{20} + \underline{U}_{30}) \end{cases}$$

Componentele simetrice ale tensiunilor de pe fazele receptorului  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  sunt:

$$\begin{cases} \underline{U}'_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + a^2 \underline{U}_3) \\ \underline{U}'_i = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + a \underline{U}_3) \\ \underline{U}'_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3) \end{cases}$$

Sistemele de fazori  $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$  și  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  au vârfuri comune și origini diferite, ca în figura 7.6. Între componentele simetrice ale acestora există relațiile:

$$\begin{aligned} \underline{U}_d - \underline{U}'_d &= \frac{1}{3}[(\underline{U}_{10} - \underline{U}_1) + a(\underline{U}_{20} - \underline{U}_2) + a^2(\underline{U}_{30} - \underline{U}_3)] = \\ &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{N0} + a \underline{U}_{N0} + a^2 \underline{U}_{N0}) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_i - \underline{U}'_i &= \frac{1}{3}[(\underline{U}_{10} - \underline{U}_1) + a^2(\underline{U}_{20} - \underline{U}_2) + a(\underline{U}_{30} - \underline{U}_3)] = \\ &= \frac{1}{3}(\underline{U}_{N0} + a^2 \underline{U}_{N0} + a \underline{U}_{N0}) = 0; \end{aligned}$$

$$\underline{U}_h - \underline{U}'_h = \frac{1}{3}[(\underline{U}_{10} - \underline{U}_1) + (\underline{U}_{20} - \underline{U}_2) + (\underline{U}_{30} - \underline{U}_3)] = \underline{U}_{N0}.$$

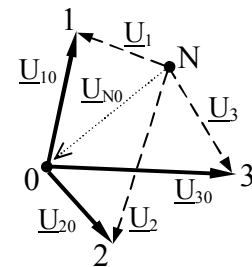


Fig. 7.6.

Așadar componentele simetrice directă și inversă sunt egale,  $\underline{U}'_d = \underline{U}_d, \underline{U}'_i = \underline{U}_i$ , iar componentele homopare diferă,  $\underline{U}'_h = \underline{U}_{N0} - \underline{U}_h$ .

Utilizând impedanțele complexe de calcul, ec. 7.10, avem:

$$\begin{cases} \underline{U}_d = \underline{U}'_d = \xi_h \underline{I}_d + \xi_i \underline{I}_i + \xi_d \underline{I}_h \\ \underline{U}_i = \underline{U}'_i = \xi_d \underline{I}_d + \xi_h \underline{I}_i + \xi_i \underline{I}_h \\ \underline{U}_h = \underline{U}'_h + \underline{U}_{N0} = \xi_i \underline{I}_d + \xi_d \underline{I}_i + \xi_h \underline{I}_h \end{cases}$$

Din acest sistem de ecuații se determină componentele simetrice  $\underline{I}_d$ ,  $\underline{I}_i$ ,  $\underline{I}_h$  și apoi se pot calcula curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  prin fazele receptorului. Curentul prin firul neutru este

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_h,$$

iar tensiunea dintre neutrul receptorului N și neutrul rețelei de alimentare 0 (deplasarea neutrului) se determină cu relația

$$\underline{U}_{N0} = \underline{Z}_N \underline{I}_N = 3\underline{Z}_N \underline{I}_h.$$

Poate fi determinată acum și componenta homopolară  $\underline{U}'_h = \underline{U}_{N0} - \underline{U}_h$  și apoi, cunoscând toate componentele simetrice  $\underline{U}'_d$ ,  $\underline{U}'_i$ ,  $\underline{U}'_h$ , se pot calcula tensiunile pe fazele receptorului  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ , și  $\underline{U}_3$ .

### 7.2.3. Aplicații la studiul regimurilor de avarie în rețelele trifazate cu metoda componentelor simetrice.

7.2.3.1. Se consideră scurtcircuitul monofazat la bornele unui generator trifazat cu tensiunile electromotoare simetrice  $\underline{E} = \underline{E}_d, \underline{E}_i = \underline{E}_h = 0$  și cu impedanțele dinamice  $\underline{Z}_d, \underline{Z}_i$  și  $\underline{Z}_h$ , acesta reprezentând partea echilibrată a rețelei  $R_e$  (fig. 7.7).

Dacă scurtcircuitul este net, acest defect se modelează cu impedanțele transversale

$$\underline{Z}_R = 0; \quad \underline{Z}_S = \underline{Z}_T = \infty.$$

La locul defectului se pot scrie următoarele ecuații:

$$\underline{U}_R = 0; \quad \underline{I}_S = \underline{I}_T = 0.$$

Chiar dacă fizic fazele S și T nu sunt întrerupte, producerea unui scurtcircuit pe faza R duce la creșterea puternică a curentului pe această fază și la micșorarea curenților pe fazele S și T, aceștia putând fi neglijați.

Dacă scurtcircuitul este cu arc electric, impedanța de modelare  $\underline{Z}_R$  este egală cu impedanța arcului,  $\underline{Z}_R = \underline{Z}_a$  (fig. 7.8) și ecuațiile la locul defectului devin:

$$\underline{U}_R = \underline{Z}_a \underline{I}_R; \quad \underline{I}_S = \underline{I}_T = 0; \quad \underline{I}_R = \underline{I}_{sc}.$$

Acestor ecuații le corespund următoarele ecuații în componente simetrice:

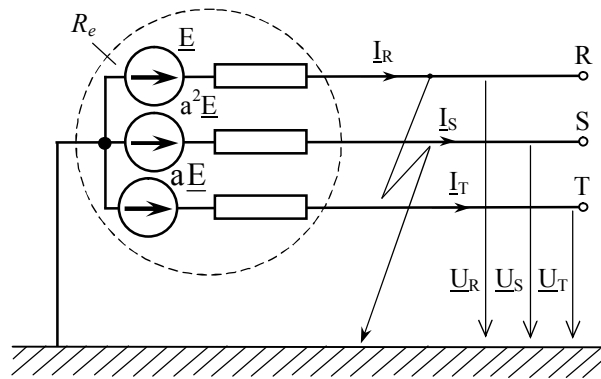


Fig. 7.7.

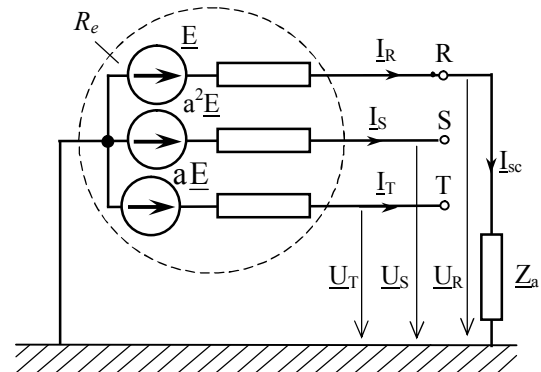


Fig. 7.8.

$$\begin{aligned} \underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h &= \underline{Z}_a(\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h) \\ a^2\underline{I}_d + a\underline{I}_i + \underline{I}_h &= a\underline{I}_d + a^2\underline{I}_i + \underline{I}_h = 0 \end{aligned}$$

Din ultima ecuație rezultă  $\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h$  și

$$\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h = 3\underline{Z}_a\underline{I}_d; \quad \underline{I}_{sc} = \underline{I}_R = 3\underline{I}_h .$$

Schemele monofazate de succesiune directă  $SM_d$ , inversă  $SM_i$  și omopolară  $SM_h$  se pot conecta astfel încât să satisfacă aceste relații ca în figura 7.10. Curentul prin rețeaua monofazată astfel obținută este

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}_d}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_a} ,$$

iar relația de calcul a curentului de scurtcircuit rezultă:

$$\underline{I}_{sc} = \frac{3\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_a} .$$

Pentru determinarea tensiunilor se determină mai întâi componentele simetrice ale acestor tensiuni:

$$\underline{U}_d = \underline{E}_d - \underline{Z}_d\underline{I}_d; \quad \underline{U}_i = -\underline{Z}_i\underline{I}_i; \quad \underline{U}_h = -\underline{Z}_h\underline{I}_h .$$

Tensiunile rezultă:

$$\begin{cases} \underline{U}_R = \underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h = 3\underline{Z}_a\underline{I}_h = \frac{3\underline{Z}_a\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_a} \\ \underline{U}_S = a^2\underline{U}_d + a\underline{U}_i + \underline{U}_h = \frac{(a^2 - a)\underline{Z}_i + (a^2 - 1)\underline{Z}_h}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_a} \underline{E} \\ \underline{U}_T = a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i + \underline{U}_h = \frac{(a - a^2)\underline{Z}_i + (a - 1)\underline{Z}_h}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_a} \underline{E} \end{cases}$$

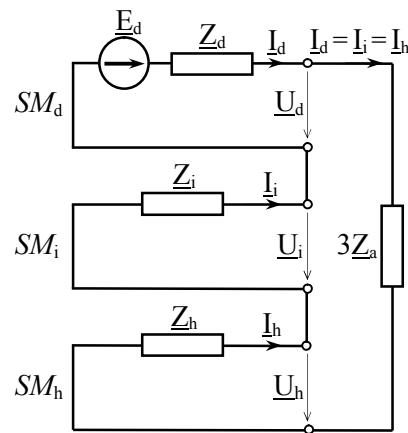


Fig. 7.10.

Pentru a limita sau eventual chiar anula curentul de scurtcircuit  $\underline{I}_{sc}$ , unica posibilitate practică constă în creșterea până la valori infinite a impedanței omopolare  $\underline{Z}_h$ . Modificarea impedanțelor  $\underline{Z}_d$  sau  $\underline{Z}_i$  ar atrage după sine modificarea corespunzătoare a curenților pe fazele S și T la funcționarea în sarcină a generatorului. Cum numai componentele omopolare ale curenților se închid prin pământ la neutrul generatorului, curentul poate fi limitat introducând între neutrul generatorului și pământ o impedanță, de obicei o bobină, numită *bobină de stingere*, calculată astfel încât curenții de scurtcircuit să fie limitați la valori nepericuloase.

7.2.3.2. Se consideră scurtcircuitul net pe fazele 2, 3 cu întreruperea fazei 1 la bornele unui generator trifazat cu tensiunile electromotoare simetrice  $\underline{E} = \underline{E}_d, \underline{E}_i = \underline{E}_h = 0$  și cu impedanțele dinamice  $\underline{Z}_d, \underline{Z}_i$  și  $\underline{Z}_h$ .

Rețeaua electrică se compune din partea echilibrată  $\underline{R}_e$  (generatorul trifazat) și din elementul trifazat dezechilibrat care modelează defectul cu impedanțele

$$\underline{Z}_1 = \infty, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = 0, \quad \underline{Z}_N = \infty ,$$

asa cum se poate vedea în figura 7.11.

Ecuațiile la locul defectului sunt:

$$\underline{U}_S = \underline{U}_T; \quad I_R = 0; \quad I_S = -I_T,$$

care, în componente simetrice, se scriu:

$$a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i + \underline{U}_h = a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i + \underline{U}_h;$$

$$I_d + I_i + I_h = 0; \quad a^2 I_d + a I_i + I_h = -a I_d - a^2 I_i - I_h.$$

Din aceste ecuații rezultă:

$$\underline{U}_d = \underline{U}_i; \quad \underline{U}_h = 0; \quad I_h = 0; \quad I_d = -I_i.$$

Pe baza acestor relații, schema echivalentă monofazăată în componente simetrice a scurtcircuitului bifazat fără punere la pământ este cea din fig. 7.12. Din această schemă se determină componentele simetrice ale curenților și tensiunilor:

$$I_d = \frac{\underline{E}}{Z_d + Z_i} = -I_i; \quad \underline{U}_d = \underline{U}_i = \underline{E} - Z_d I_d = \frac{Z_i}{Z_d + Z_i} \underline{E}.$$

Curentul de scurtcircuit rezultă:

$$I_{sc} = I_S = -I_T = a^2 I_d + a I_i = \frac{(a^2 - a) \underline{E}}{Z_d + Z_i}.$$

Tensiunile la locul defectului sunt:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_d + \underline{U}_i = 2 Z_i I_d = \frac{2 Z_i \underline{E}}{Z_d + Z_i};$$

$$\underline{U}_S = \underline{U}_T = a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i = (a^2 + a) \underline{U}_d = -\underline{U}_d = -\frac{Z_i \underline{E}}{Z_d + Z_i}.$$

### 7.2.3.2. Scurtcircuitul trifazat (cu sau fără punere la pământ).

Dacă într-o rețea simetrică se produce un scurtcircuit trifazat, regimul este echilibrat (fig. 7.13), ecuațiile la locul defectului fiind:  $\underline{U}_R = \underline{U}_S = \underline{U}_T = 0$ .

Prin urmare și componentele simetrice ale tensiunilor sunt de asemenea nule:

$$\underline{U}_h = \underline{U}_d = \underline{U}_i = 0.$$

Schema monofazăată pentru componentele simetrice se dă în figura 7.14. Numai componenta directă a curentului este nenulă:

$$I_d = \frac{\underline{E}}{Z_d}$$

Pentru curenții de scurtcircuit rezultă relațiile:

$$I_R = I_d = \frac{\underline{E}}{Z_d};$$

$$I_S = a^2 I_d = a^2 \frac{\underline{E}}{Z_d};$$

$$I_T = a I_d = a \frac{\underline{E}}{Z_d}.$$

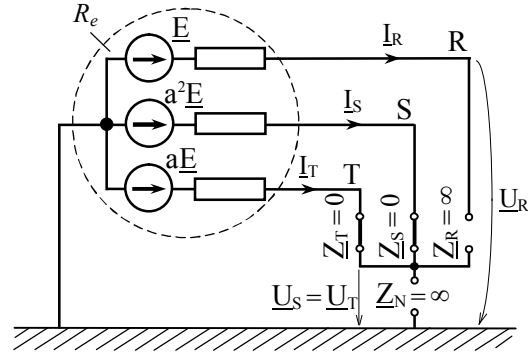


Fig. 7.11.

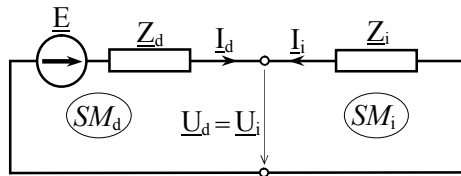


Fig. 7.12.

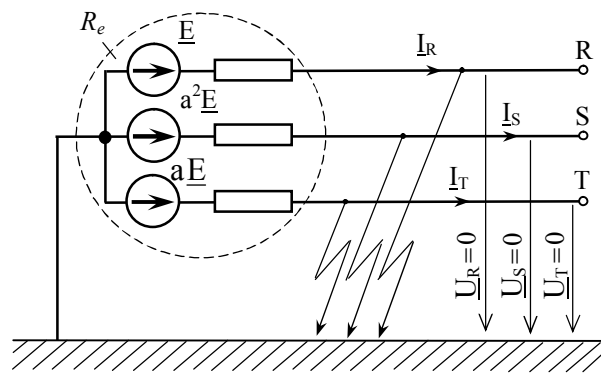


Fig. 7.13.

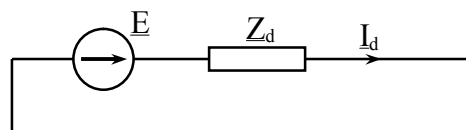


Fig. 7.14.

## 8. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

### 8.1. NOȚIUNI TEORETICE

Regimurile tranzitorii pot fi întâlnite la închiderea sau deschiderea unor întrerupătoare care alimentează circuitul considerat sau în cazul în care parametrii circuitului (R, L, M, C) variază brusc datorită unor condiții speciale de lucru sau unor avarii (scurtcircuite, întreruperi).

Circuitele liniare și invariabile în timp (cu parametrii constanți) sunt descrise de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. După cum se știe, soluția generală a unor astfel de ecuații se poate scrie sub forma unei sume de două soluții și anume

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_p(t), \quad (8.1)$$

în care:

- $y_{tr}(t)$  este soluția generală a ecuației diferențiale date, obținute prin anularea termenului liber al acesteia (soluția ecuației omogene) și se numește *soluție de regim liber sau componentă tranzitorie*.
- $y_p(t)$  este o soluție particulară a ecuației diferențiale a circuitului – numită *soluție de regim forțat sau componentă permanentă*.

În mod obișnuit prin *componentă permanentă*  $y_p$  se înțelege expresia soluției generale  $y(t)$  pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Folosirea acestor denumiri este potrivită dacă semnalul excitație (tensiune sau curent) acționează un timp relativ îndelungat față de intervalul de timp cât există și componenta liberă. În aceste condiții, componenta liberă e potrivit să se numească *componenta tranzitorie*  $y_{tr}$ , deoarece este vorba de o componentă de scurtă durată, respectiv trecătoare. În regim tranzitoriu sunt prezente ambele componente, deci semnalul răspuns va fi de forma:

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_p(t) \quad (8.2)$$

După un interval de timp după care componenta tranzitorie  $y_{tr}(t)$  poate fi neglijată (se consideră practic nulă), rămâne numai componenta permanentă  $y(t) = y_p(t)$ ; regimul se numește *regim permanent*.

#### **Teoremele Comutării.**

La baza analizei circuitelor liniare în regim tranzitoriu stau teoremele comutării, valabile și pentru circuitele neliniare sau parametrice și care se sprijină pe considerente energetice.

**Prima teoremă a comutării:** *într-o ramură a unui circuit liniar care conține bobine, fluxul magnetic și intensitatea curentului conservă, la comutare, valorile avute în acel moment, variațiile lor ulterioare începând cu aceste valori inițiale (fig. 8.1):*

$$\begin{aligned} \psi_L(0+) &= \psi_L(0-) = \psi_L(0) \\ i_L(0+) &= i_L(0-) = i_L(0) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Dacă la comutare curentul  $i$  ar varia prin salt, atunci tensiunea la bornele bobinei

$$u_L(0+) = \left. \frac{d\psi_L}{dt} \right|_{0+} = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{0+} \quad (8.4)$$

ar fi nedeterminată,  $u_L(0+) \rightarrow \infty$ , ceea ce nu este posibil.

De asemenea, o creștere bruscă a intensității curentului sau a fluxului magnetic ar conduce la o creștere bruscă a energiei câmpului magnetic:

$$W_m = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi_L^2}{L} \quad (8.5)$$

încât puterea furnizată de sursă ar rezulta nedeterminată, ceea ce din punct de vedere fizic este lipsit de sens.

Tensiunea la bornele bobinei poate varia prin salt (fig. 8.2).

**A doua teoremă a comutării:** într-o ramură a unui circuit liniar care conține condensatoare, sarcina electrică de pe armaturile condensatoarelor și tensiunile la bornele acestora conservă, la comutare, valorile avute în acel moment, variațiile lor ulterioare începând cu aceste valori inițiale (fig. 8.3):

$$\begin{aligned} q_c(0+) &= q_c(0-) = q_c(0); \\ u_c(0+) &= u_c(0-) = u_c(0). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Dacă la comutare sarcina condensatorului sau tensiunea la bornele sale ar varia prin salt, atunci curentul prin condensator

$$i_c(0+) = \left. \frac{dq_c}{dt} \right|_{0+} = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0+} \quad (8.7)$$

ar fi nedeterminat,  $i_c(0+) \rightarrow \infty$ , ceea ce nu este posibil.

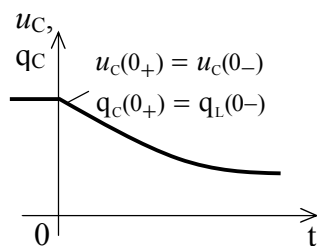


Fig. 8.3.

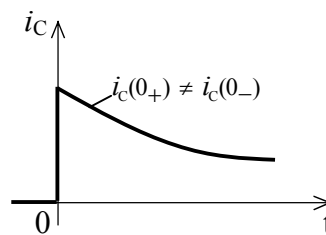


Fig. 8.4.

O creștere bruscă a tensiunii la bornele condensatorului sau a sarcinii electrice de pe armăturile sale ar implica o creștere bruscă a energiei câmpului electric,

$$W_e = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{1}{2} \frac{q_c^2}{C}, \quad (8.8)$$

încât puterea furnizată de surse rezulta nedeterminată, ceea ce este lipsit de sens din punct de vedere fizic. Curentul condensatorului poate varia însă prin salt (fig. 8.4).



## 8.2. PROBLEME REZOLVATE

8.1. Să se determine intensitatea curentului dintr-o bobină cu inductivitatea  $L$  și rezistența  $R$ , care se cuplează la o sursă ideală de curent continuu având tensiunea electromotoare  $E_0$ , figura 8.1.

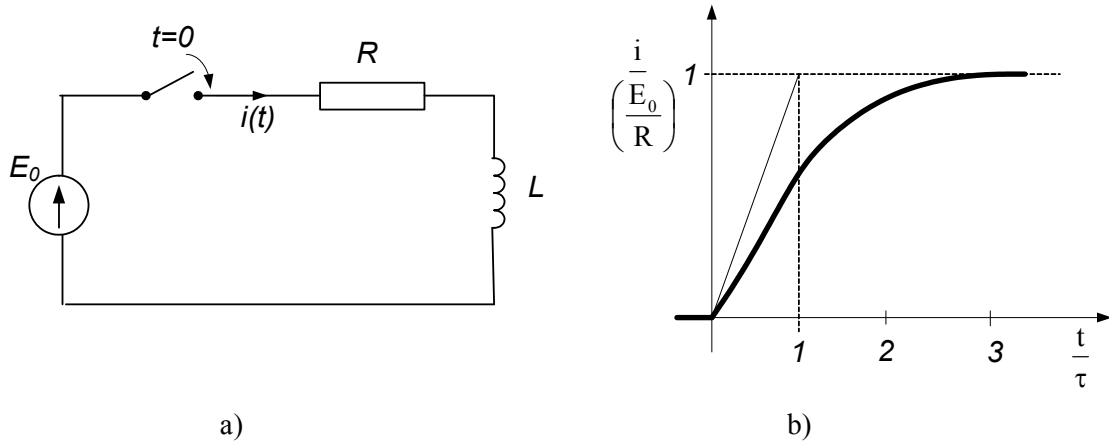


Fig. 8.1.

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff, se obține ecuația diferențială:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0$$

Soluția generală a acestei ecuații se compune din doi termeni,

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

din care,  $i_1(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$  este soluția generală a ecuației omogene, iar  $i_2(t) = \frac{E_0}{R}$  este o soluție particulară a ecuației omogene.

Constanta  $A$  se determină prin condiția inițială care exprimă continuitatea fluxului magnetic din bobină în momentul  $t = 0$  al cuplării:

$$Li_{(0+\varepsilon)} = Li_{(0-\varepsilon)} = 0$$

Se obține soluția :

$$i(t) = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

în care  $\tau$  este constanta de timp a circuitului,  $\tau = \frac{L}{R}$ .

În fig. 8.1,b) a fost pusă în evidență proprietatea funcțiilor exponențiale de a avea subtangenta constantă, egală cu constanta de timp. În practică, se apreciază că regimul tranzitoriu se amortizează după  $3 \div 5$  constante de timp. Într-adevăr, valoarea curentului în momentul  $t = 3\tau$  este

$$i(3\tau) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-3\tau})$$

diferă de valoarea de regim staționar cu 5%.

8.2. Un circuit R-L, (fig. 8.2, a) funcționează în regim staționar sub tensiunea la borne  $E_0$ . Să se studieze regimul tranzitoriu produs prin scurtcircuitarea bornelor de alimentare.

Ecuția diferențială a circuitului care cuprinde rezistorul, bobina și întreruptorul, considerând scurtcircuitul net (fără arc electric), este:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0; \quad t > 0$$

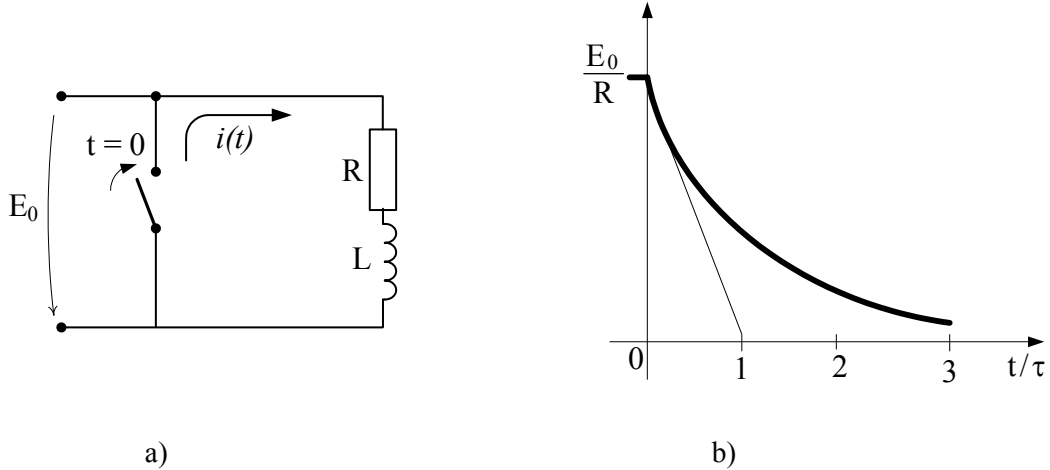


Fig. 8.2.

Soluția acestei ecuații, cu condiția inițială  $i_{(0+\epsilon)} = i_{(0-\epsilon)} = \frac{E_0}{R}$

este,

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

8.3. Circuitul din fig. 8.3, a funcționează în regim staționar cu întreruptorul K deschis. Să se determine variația în timp a curentului din bobină, în urma scurtcircuitării rezistorului  $R_1$ .

Aplicație numerică:  $E_0 = 120 \text{ V}$ ,  $R = 10 \text{ } \Omega$ ,  $R_1 = 30 \text{ } \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$ .

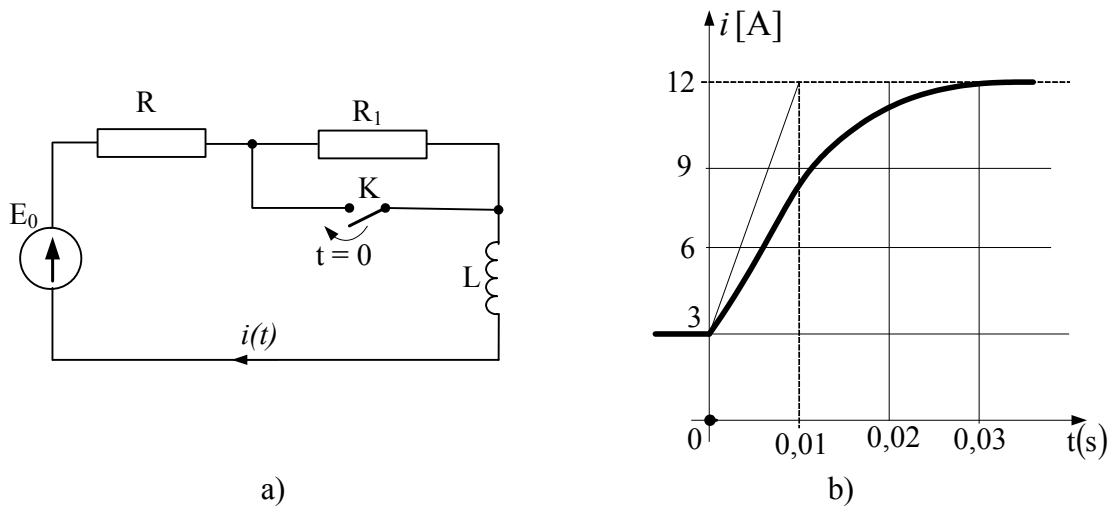


Fig. 8.3.

Ecuția diferențială a circuitului în urma închiderii întreruptorului K este

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0$$

Soluția acestei ecuații este  $i(t) = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$ .

Din condiția inițială  $i_{(0+\varepsilon)} = i_{(0-\varepsilon)} = \frac{E_0}{R+R_1}$  se obține rezultatul

$$i(t) = \frac{E_0}{R} - \left( \frac{E_0}{R} - \frac{E_0}{R+R_1} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = 12 - 9e^{-100t}$$

Variația curentului este reprezentată în fig. 8.3, b.

8.4. Un releu electromagnetic a cărui înfășurare are inductivitatea (în situația în care armătura este atrasă)  $L=1H$  și rezistența  $R=50\Omega$ , este legat în paralel cu un rezistor  $R=200\Omega$  și este alimentat de la o sursă de t.e.m.  $E_0=100V$ , legată în serie cu un rezistor  $R=60\Omega$ , Fig. 8.4. Să se determine după cât timp de la decuplarea de la sursă va începe să fie eliberată armătura mobilă a releului, știind că acest fapt se petrece în momentul în care intensitatea curentului din înfășurarea releului scade la valoarea  $i_d=0,2A$ .

După decuplarea de la sursă, curentul din înfășurarea releului scade exponențial,

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

unde  $\tau = \frac{L}{R+R_p}$  este constanta de timp a circuitului de descărcare a energiei

acumulate în câmpul magnetic al bobinei L a releului.

Condiția inițială este următoarea:

$$i_{L(0+\varepsilon)} = i_{L(0-\varepsilon)} = \frac{E_0}{R_1 + \frac{RR_p}{R+R_p}} \cdot \frac{R_p}{R+R_p} = \frac{E_0}{R+R_1 + \frac{RR_1}{R_p}}$$

Rezultă valoarea curentului

$$i(t) = \frac{E_0}{R+R_1 + \frac{RR_1}{R_p}} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,8 \cdot e^{-250t}$$

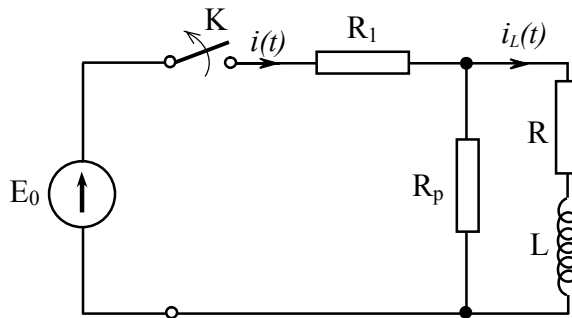


Fig. 8.4.

Releul va declanșa la momentul

$$t_1 = \tau \ln \frac{E_0}{i_d \left( R + R_1 + \frac{RR_1}{R_p} \right)} = 5,55 \text{ ms}$$

5. Pentru a limita supratensiunea care apare la bornele unei bobine la întreruperea curentului, fig. 8.5, în paralel cu ea se leagă un rezistor  $R_p$ . Să se determine variația în timp a tensiunii la bornele bobinei, în situația simplificată și totodată cea mai defavorabilă, în care se neglijează arcul electric care se formează între bornele întreruptorului.

Intensitatea curentului din circuit satisface ecuația diferențială:

$$L \frac{di}{dt} + (R + R_p) i = 0$$

Soluția acestei ecuații, cu condiția inițială  $i(0 + \varepsilon) = i(0 - \varepsilon) = \frac{E_0}{R}$  este

$$i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = \frac{L}{R + R_p}.$$

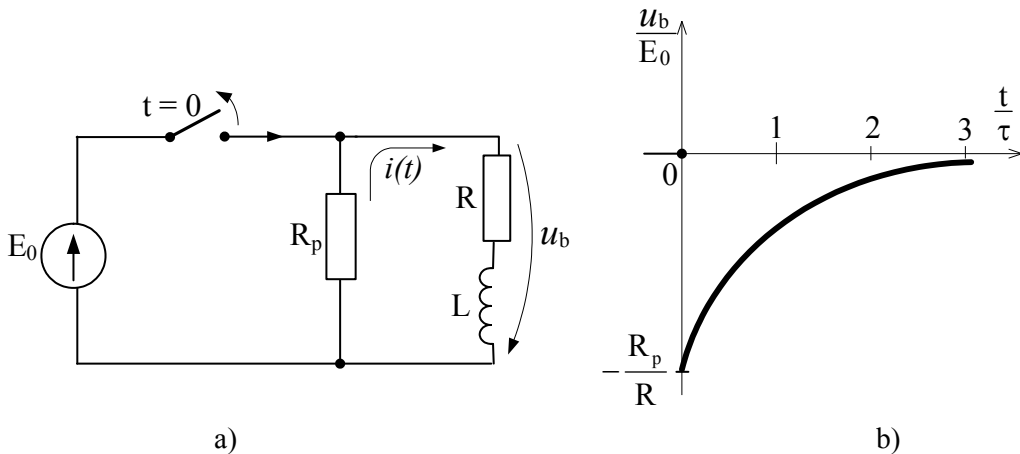


Fig. 8.5.

Tensiunea la bornele bobinei este:

$$u_b(t) = -R_p i(t) = -\frac{R_p}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Supratensiunea maximă se produce în momentul decuplării și are valoarea:

$$\left| \frac{u_b(0)}{E_0} \right| = \frac{R_p}{R}$$

Această tensiune este cu atât mai mică, cu cât raportul  $\frac{R_p}{R}$  este mai mic.

Valoarea rezistenței  $R_p$  nu poate fi însă micșorată prea mult deoarece cresc pierderile în regim permanent.

## PARTEA A II-A

# LUCRĂRI PRACTICE DE LABORATOR

### Lucrarea nr. 1

## DETERMINAREA CARACTERISTICILOR DE MAGNETIZARE ALE MATERIALELOR FEROMAGNETICE

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Materialele feromagnetice sunt o categorie aparte de materiale magnetice care au proprietatea de a se magnetiza puternic când sunt introduse în câmpuri magnetice.

În general, starea de magnetizare a substanțelor este caracterizată de mărimea vectorială  $\bar{M}$ , numită *magnetizație*. Magnetizarea corpurilor poate fi *temporară* sau *permanentă*, după cum starea lor de magnetizare este condiționată, respectiv independentă, de prezența unui câmp magnetic din exterior.

Vectorul magnetizație are două componente:

$$\bar{M} = \bar{M}_t + \bar{M}_p \quad (L1.1)$$

unde  $\bar{M}_t$  este *magnetizația temporară*, iar  $\bar{M}_p$  – *magnetizația permanentă*

Pentru materialele magnetice liniare există legea de material

$$\bar{M}_t = \chi_m \bar{H} \quad (L1.2)$$

numită *legea magnetizației temporare*, în care:

- $\chi_m$  este o mărime de material (adimensională), numită *susceptivitate magnetică*;
- $\bar{H}$  este *intensitatea câmpului magnetic*.

Susceptivitatea magnetică poate avea valori pozitive – pentru materialele numite *paramagnetice*, sau negative – pentru materialele numite *diamagnetice*.

La materialele magnetice neliniare, magnetizația temporară depinde de intensitatea câmpului magnetic și dependența  $M_t(H)$  este neliniară, nemaiputând fi scrisă sub forma (L1.2). Cu excepția materialelor feromagnetice, pentru care susceptivitatea magnetică are valori foarte mari ( $10^2 \div 10^5$ ), pentru restul materialelor aceasta are valori foarte mici, negative sau pozitive, foarte apropiate de zero.

În general, pentru câmpul electromagnetic este satisfăcută relația vectorială

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} + \bar{M}, \quad (L1.3)$$

numită *legea legăturii dintre inducție  $\bar{B}$ , intensitate  $\bar{H}$  și magnetizație  $\bar{M}$  în câmp magnetic*.

Pentru medii lipsite de magnetizare permanentă ( $M_p = 0$ ,  $M = M_t$ ), ținând cont de relația (L1.2), relația (L1.3) devine

$$\bar{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu \bar{H} \quad (L1.4)$$

în care:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m este *permeabilitatea magnetică* a vidului;  
 $\mu_r = 1 + \chi_m = \mu / \mu_0$  este *permeabilitatea magnetică relativă*;  
 $\mu$  este *permeabilitatea magnetică absolută*.

Magnetizarea materialelor feromagnetice depinde de compoziția chimică, de modul de prelucrare mecanică, de tratamentul termic aplicat și de starea de magnetizare anterioară.

Curbele care prezintă grafic variația inducției magnetice sau magnetizației în funcție de intensitatea câmpului magnetic se numesc *curbe de magnetizare* sau *caracteristici de magnetizare*:  $B = B(H)$ , respectiv  $M = M(H)$ .

Principalele caracteristici ale materialelor feromagnetice sunt:

- a) caracteristica de primă magnetizare  $B(H)$ ;
- b) ciclul de magnetizare  $B(H)$ ;
- c) variația permeabilității magnetice cu intensitatea câmpului  $\mu(H)$ .

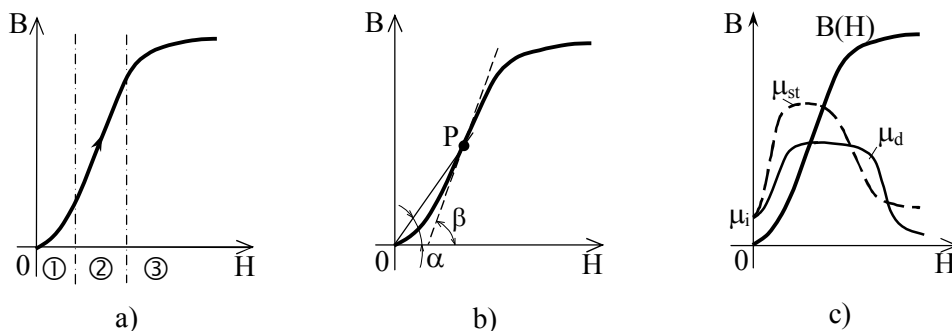


Fig. L1.1. Caracteristicile materialelor feromagnetice: a) caracteristica de primă magnetizare; b) explicativă pentru permeabilități; c) caracteristicile  $\mu_{st}(H)$  și  $\mu_d(H)$ .

Caracteristica de primă magnetizare (fig. L1.1,a) reprezintă curba de variație a inducției magnetice  $B$  cu intensitatea câmpului  $H$  pentru o probă de material care nu a mai fost magnetizată sau care, inițial, a fost demagnetizată. Curba este neliniară și prezintă trei zone principale:

- ① - zona magnetizării inițiale
- ② - zona magnetizării liniare;
- ③ - zona de saturație.

Permeabilitatea magnetică a substanțelor feromagnetice este dependentă de intensitatea câmpului magnetic:  $\mu = f(H)$ . Pentru fiecare punct de pe caracteristica  $B(H)$ , figura L1.1,b), se definesc:

- *permeabilitatea magnetică statică*  $\mu_{st} = \frac{B}{H} = \text{tg}\alpha$ ; (L1.5)

- *permeabilitatea magnetică dinamică*  $\mu_d = \frac{dB}{dH} = \text{tg}\beta$ . (L1.6)

Variația acestor permeabilități cu intensitatea câmpului magnetic  $H$  se prezintă în figura L1.1,c).

Dacă după parcurgerea curbei de primă magnetizare se scade strict monoton intensitatea câmpului magnetic  $H$ , punctul de funcționare se deplasează pe o curbă situată deasupra celei de primă magnetizare și la anularea câmpului magnetic, inducția magnetică are o valoare nenulă  $B_r$ , numită *inducție magnetică remanentă* (fig. L1.2). Inversând sensul câmpului magnetic, inducția scade și se anulează pentru o valoare a intensității câmpului magnetic  $H_c$ , numit *câmp coercitiv*. În continuare se parcurge curba închisă  $-H_c, -B_s, -B_r, +H_c, +B_s$ , numită *ciclu de magnetizare sau ciclu de histerezis magnetic*.

Ciclu de magnetizare obținut după parcurgerea în prealabil a curbei de primă magnetizare și care corespunde la două valori de semne opuse ale *inducției magnetice de saturație*,  $\pm B_s$ , se numește *ciclu fundamental* sau *ciclu limită de magnetizare*, respectiv *ciclu fundamental de histerezis*.

Oricare din ciclurile care se obțin în aceleași condiții, dar între valori ale inducției magnetice mai mici decât cea de saturație  $B_s$ , se numesc *cicluri parțiale* și sunt cuprinse în interiorul ciclului fundamental, cu vârfurile pe curba de primă magnetizare.

Experimental se dovedește că aria ciclului fundamental de magnetizare este proporțională pierderea de energie în unitatea de volum pentru magnetizarea materialului la parcurgerea unui ciclu de magnetizare.

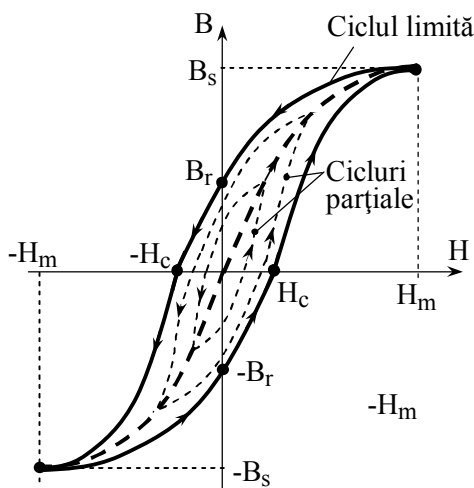


Fig. L1.2.

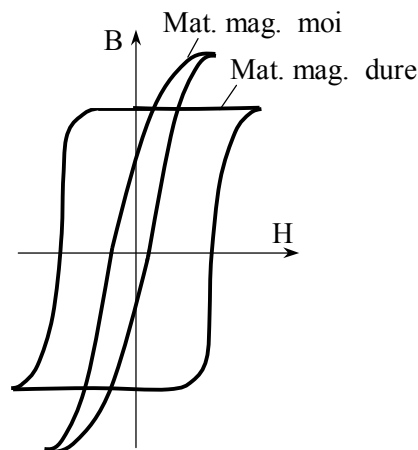


Fig. L1.3.

Din punct de vedere a intensității câmpului coercitiv, materialele feromagnetice se împart în două categorii:

① *Materialele magnetice moi* – au câmpul coercitiv mic ( $H_c < 100\text{A/m}$ ), ciclul de histerezis îngust (fig. 3), prezintă pierderi mici de magnetizare și se utilizează pentru confecționarea circuitelor magnetice ale transformatoarelor și mașinilor electrice. Din această categorie fac parte: fierul pur, oțelul moale, aliajele fier – siliciu, fonta albă, cenușie, maleabilă, etc.

② *Materialele magnetice dure* – au valori mari ale câmpului coercitiv ( $H_c > 4000\text{A/m}$ ), ciclul de histerezis dreptunghiular, cu valori mari ale inducției remanente și se utilizează pentru confecționarea magneților permanenți. Din această categorie fac parte: aliajele fier-cobalt, molibdenul, nichelul, etc.

## 2. PRINCIPIUL METODEI

În scopul determinării caracteristicilor de magnetizare se folosește un cadru dreptunghiular (cadru Epstein) constituit din bobine în interiorul cărora se realizează un miez din tolele materialului feromagnetic de studiat. Una din bobine, cu  $N_1$  spire, se alege ca înfășurare primară (de magnetizare), iar alta, cu  $N_2$  spire, înfășurare secundară. Cu dispozitivul astfel construit, cu schema de principiu din fig. L1.4,a), se poate trasa prin puncte caracteristica fundamentală de magnetizare (curba de primă magnetizare din cadrulanul I) pe care sunt situate vârfurile ciclurilor parțiale în c.a. (fig. L1.4.b).

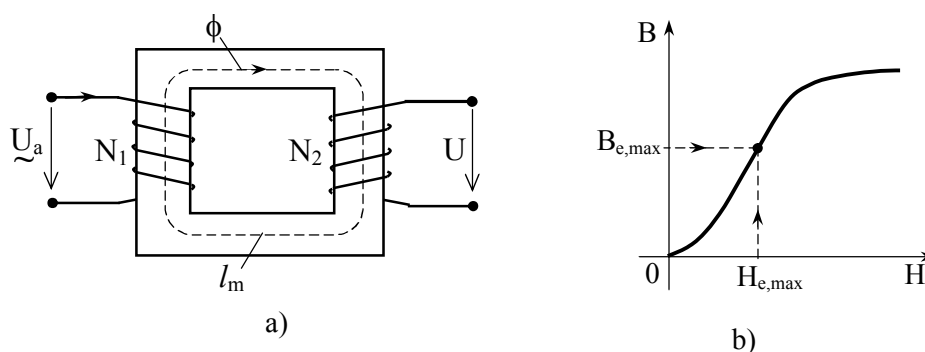


Fig. L1.4.

Intensitatea câmpului magnetic  $H$  este determinată prin valoarea maximă a câmpului sinusoidal echivalent  $H_{e,max}$  ce se calculează pe baza legii circuitului magnetic cu relația

$$H = H_{e,max} = \frac{\sqrt{2}N_1 I}{l_m} = K_H I, \quad (L1.7)$$

în care:

- $I$  – valoarea efectivă a intensității curentului de magnetizare,
- $l_m$  – lungimea medie a unei linii de câmp,
- $N_1$  – numărul de spire.

Inducția magnetică în miez  $B$ , corespunzătoare câmpului magnetic  $H$ , este calculată conform legii inducției electromagnetice cu relația

$$B = B_{e,max} = \frac{\sqrt{2}U}{\omega N_2 S} = K_B U, \quad (L1.8)$$

în care:

- $U$  – valoarea efectivă a tensiunii măsurată la bornele înfășurării cu  $N_2$  spire,
- $\omega = 2\pi f$  – pulsația,  $f = 50\text{Hz}$  fiind frecvența tensiunii rețelei de alimentare,
- $S$  – aria efectivă a secțiunii transversale a miezului feromagnetic,  $S = N \cdot S_{tolă}$ , în care  $N$  este numărul de tole și  $S_{tolă}$  este aria secțiunii unei tole.



### 3. MODUL DE LUCRU

#### 3.1. Trasarea prin puncte a caracteristicii de magnetizare

Se realizează montajul din figura L1.5 pentru trasarea caracteristicilor  $B(H)$  și  $\mu(H)$  în curent alternativ. Se crește strict monoton tensiunea de la autotransformatorul reglabil ATR și se citesc valorile curentului indicat de ampermetrul A și tensiunea  $U$  indicată de voltmetrul V. Datele se trec în tabelul L1.1.

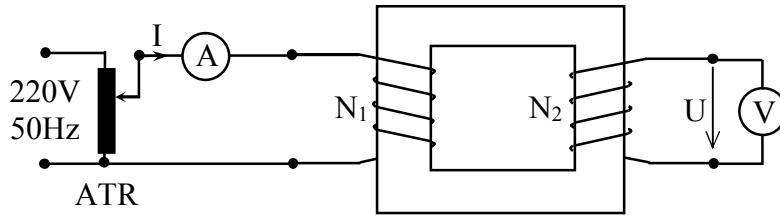


Fig. L1.5.

Tabelul L1.1.

I [A]				.....
U [V]				.....
H [A/m]				.....
B [T]				.....
$\mu$ [H/m]				.....

#### 3.2. Vizualizarea pe osciloscop a caracteristicii de magnetizare

Ciclul de magnetizare dinamic (în curent alternativ) poate fi vizualizat pe ecranul osciloscopului, realizând un montaj ca cel din figura L1.6.

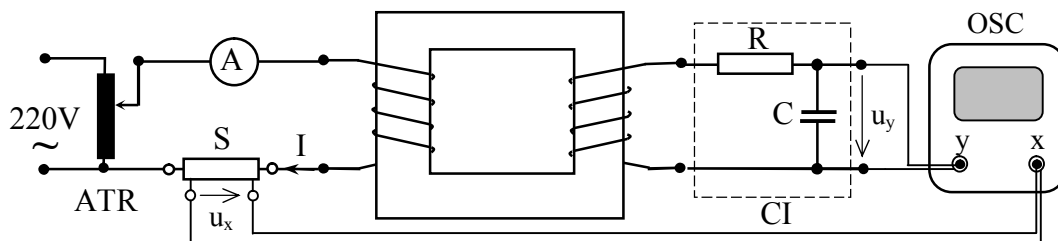


Fig. L1.6.

Semnalul  $u_x$  pentru deflexia pe orizontală a spotului osciloscopului catodic este luat de pe un rezistor, șuntul S, astfel că deviația spotului pe orizontală (axa x) este proporțională cu intensitatea instantanee a curentului prin bobina de magnetizare și deci, conform relației (L1.7), proporțională cu intensitatea câmpului magnetic H.

În circuitul secundar a dispozitivului se conectează un circuit de integrare CI, de tip RC, care realizează integrarea în timp a tensiunii induse, obținându-se astfel un semnal  $u_y$  proporțional în valoare instantanee cu inducția magnetică B, care se aplică plăcilor de deflexie pe verticală ale osciloscopului. În acest fel, deviația spotului pe verticală (axa y) este în orice moment proporțională cu inducția magnetică din miez.

Se vizualizează ciclurile obținute pornind de la valori reduse ale curentului (ciclurile parțiale), până la valori ale curentului pentru care se obține ciclul limită, când inducția magnetică ajunge la valoarea de saturație.

#### 4. PRELUCRAREA REZULTATELOR

Se calculează intensitatea câmpului H, inducția magnetică B și permeabilitatea magnetică statică  $\mu$ , astfel:

- se calculează constantele  $K_H$  și  $K_B$  din relațiile (L1.7) și (L1.8) pentru circuitul magnetic utilizat;
- pentru fiecare valoare măsurată a curentului și tensiunii din tabelul L1.1, se calculează valorile intensității și inducției magnetice cu relațiile (L1.7), respectiv (L1.8)
- se determină pentru fiecare punct valoarea permeabilității magnetice cu relația (L1.5).

Se trasează grafic, prin puncte, la scară, curba de magnetizare B(H) și curba de variație a permeabilității magnetice  $\mu(H)$  cu valorile calculate din tabelul L1.1.

Se desenează în referat câteva dintre ciclurile de magnetizare vizualizate pe ecranul osciloscopului.

## CARACTERISTICILE BOBINEI NELINIARE

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Bobina neliniară (bobina cu miez feromagnetic) este caracterizată prin faptul că, atât caracteristicile în valori instantanee, cât și cele în valori efective,  $B(H)$  sau  $\psi(i)$ , sunt neliniare; aceasta înseamnă că dacă semnalul de excitație este sinusoidal, semnalul răspuns este periodic și nesinusoidal, având un anumit conținut de armonici; dependența dintre valorile efective ale celor două semnale este neliniară.

Cel mai general circuit cu bobină neliniară, redat în figura L2.1, conține rezistența  $r$  ce include și rezistența de pierderi a bobinei cu miez feromagnetic (rezistență considerată liniară). Pentru analiza acestui circuit se aplică teorema de tensiuni a lui Kirchhoff și rezultă ecuația

$$u = r \cdot i + u_L \quad (L2.1)$$

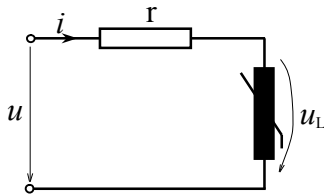


Fig. L2.1.

în care,

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} \quad (L2.2)$$

este căderea inductivă de tensiune, iar  $\psi = \psi(i)$  este fluxul magnetic al bobinei, dependent neliniar de curent. Rezultă că funcționarea circuitului este caracterizată de o ecuație diferențială neliniară de ordinul întâi, (L2.1), a cărei integrare este suficient de dificilă, având în vedere caracteristica  $\psi(i)$  neliniară. Din acest motiv se consideră următoarele două cazuri simplificatoare.

① Dacă rezistența bobinei este foarte mică și poate fi neglijată,  $r \approx 0$ , rezultă că  $u \approx u_L = d\psi/dt$  și dacă tensiunea  $u$  este sinusoidală și fluxul magnetic în miez  $\psi$  este tot sinusoidal dar, deoarece caracteristica bobinei  $\psi(i)$  este neliniară, curentul  $i$  rezultă periodic și nesinusoidal, așa cum se vede pe construcția grafică din fig. L2.2. Curba curentului fiind alternativ simetrică, descompunerea în serie Fourier a acestuia conține numai armonicile impare în sinus:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{m,2k+1} \sin[(2k+1)\omega t + \varphi_k], \quad (L2.3)$$

în care  $I_{m,2k+1}$  este amplitudinea armonicii de ordinal  $2k+1$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) a curentului.

② Dacă rezistența bobinei este foarte mare, astfel că  $r \cdot i \gg u_L$  și se poate considera  $u = r \cdot i$ , rezultă că, dacă tensiunea  $u$  este sinusoidală, atunci și curentul  $i$  este tot sinusoidal; în acest caz, deoarece  $\psi(i)$  este neliniară, fluxul magnetic în miez rezultă periodic și nesinusoidal, așa cum se arată grafic în figura L2.3.

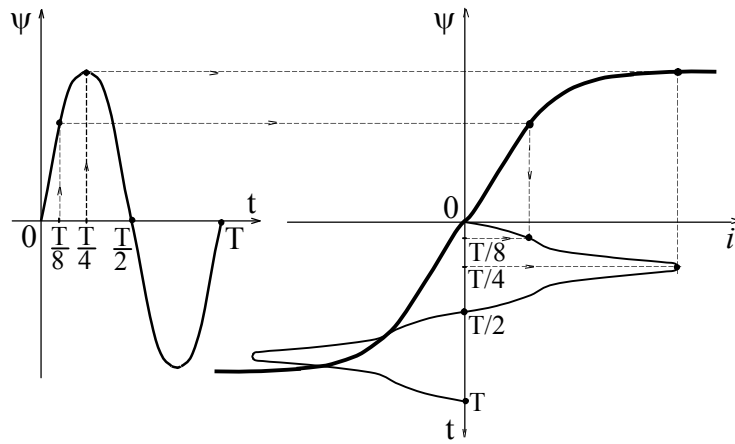


Fig. L2.2.

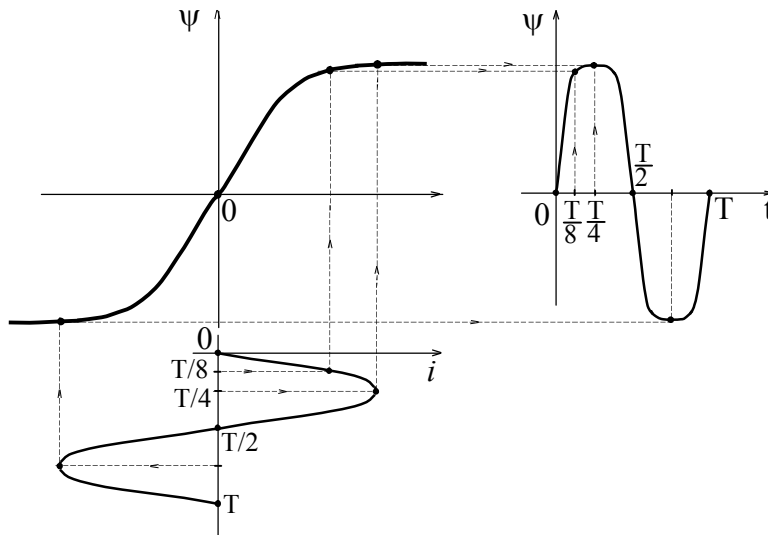


Fig. L2.3.

În ambele cazuri, semnalul răspuns rezultă periodic și nesinusoidal, cu dublă simetrie impară, deci conținând numai armonici impare în sinus.

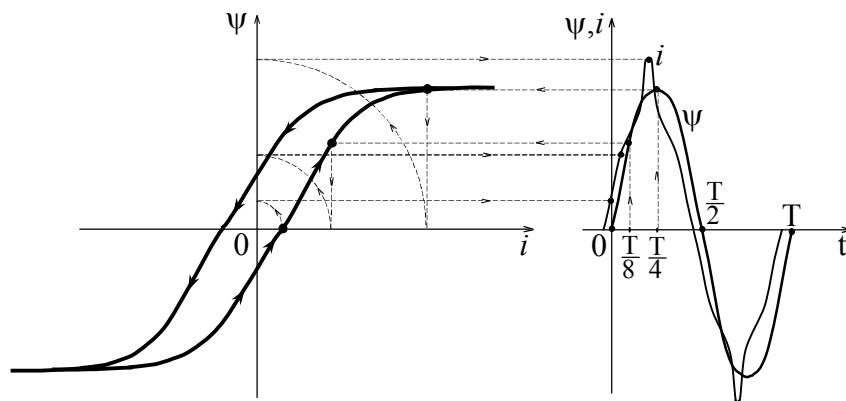


Fig. L2.4.

Când bobina neliniară este considerată cu pierderi prin histerezis, atunci, dacă fluxul magnetic este sinusoidal, curentul prin bobină rezultă periodic nesinusoidal, așa cum se arată în figura L2.4, având armonica trei preponderentă; de asemenea, se constată decalarea înainte a curentului față de fluxul magnetic.

În cazul bobinei neliniare comandată în curent continuu, caracteristica devine nesimetrică, figura L2.5.

În practică se utilizează bobina comandată în schema cu două miezuri magnetice ca în figura L2.6,a).

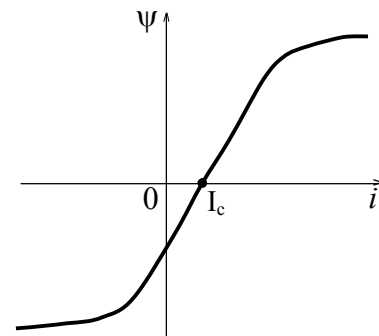


Fig. L2.5.

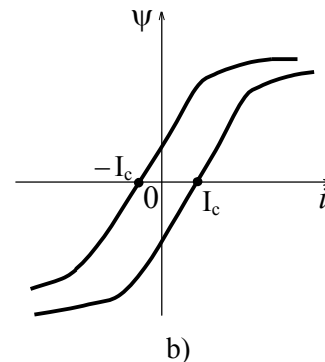
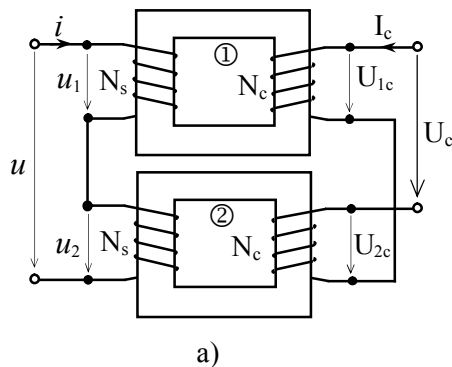


Fig. L2.6.

Deoarece unul dintre miezuri are bobina de comandă străbătută de curentul de comandă  $I_c$  într-un sens, iar celălalt miez are bobina sa de comandă străbătută de  $I_c$  în sens contrar și, având în vedere că în circuitul celor două bobine de comandă curenții sinusoidali induși sunt eliminați în mare măsură (*regim de magnetizare forțată*), caracteristicile celor două bobine pentru o anumită valoare a curentului de comandă, devin nesimetrice, fig. L2.6,b), translatate la stânga sau la dreapta față de caracteristica simetrică a bobinei necomandate (fig. L2.2).

Ecuatiile ce se pot scrie pentru circuitul de c.a. și circuitul de comandă sunt:

$$u = u_1 + u_2 = \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}[\psi_1(i) + \psi_2(i)] = \frac{d\psi_s(i)}{dt} \quad (\text{L2.4})$$

unde  $\psi_s(i)$  este caracteristica fluxului magnetic sumă în funcție de curentul  $i$ ;

$$u_c = u_{1c} - u_{2c} = \frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}[\psi_1(i) - \psi_2(i)] = \frac{d\psi_d(i)}{dt} \quad (\text{L2.5})$$

în care  $\psi_d(i)$  este caracteristica fluxului diferență în funcție de  $i$ .

Din rel.(L2.4) rezultă că, dacă tensiunea  $u$  de alimentare a circuitului de c.a. este sinusoidală, deci și  $\psi_s(i)$  este tot sinusoidal, atunci forma și conținutul de armonici al curentului  $i$  depind de forma caracteristicii  $\psi_s(i)$  care este obținută grafic în figura L2.7. Se observă că această caracteristică a devenit simetrică și, deoarece simetria este impară, rezultă că în toate circuitele în care bobinele sunt conectate în serie adițional (așa cum este circuitul bobinelor  $N_s$ ), curentul este periodic nesinusoidal, având numai armonici impare; dintre acestea, armonica fundamentală are amplitudinea mult mai mare decât amplitudinile harmonicilor a treia și a cincia care pot fi neglijate; deci se poate aprecia cu o bună aproximație că forma curentului  $i$  este sinusoidală și de aceeași frecvență cu cea a tensiunii de excitație  $u$ .

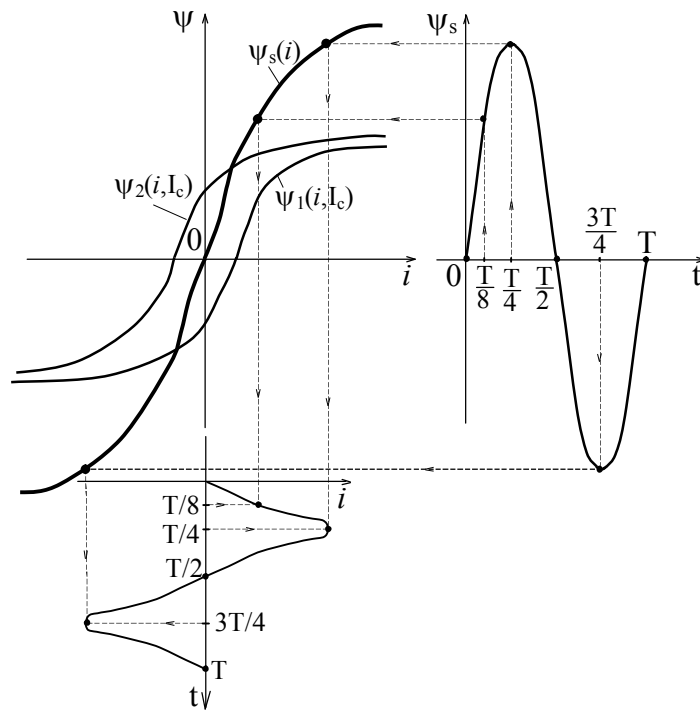


Fig. L2.7.

În ce privește circuitul de comandă, ecuația (L2.5) arată că tensiunea  $u_c$  indusă la bornele celor două bobine de comandă, conectate în serie diferențial, depinde ca formă a variației în timp și conținut de armonici de forma caracteristicii  $\psi_d(i)$ ; aceasta se obține grafic și arată ca în figura L2.8,a). Deoarece această caracteristică prezintă simetrie pară, rezultă că tensiunea  $u_c$  și deci curentul indus în circuitul de comandă conține armonici pare (2, 4, ...). Dintre acestea armonica a doua are amplitudinea cu mult mai mare, încât armonicile de rang 4, 6, etc. pot fi neglijate. Cu alte cuvinte în circuitul de comandă, în afară curentului  $I_c$  de comandă, mai circulă și un curent sinusoidal de frecvență dublă față de cea a tensiunii de alimentare. Amplitudinea acestui curent poate fi atenuată cu ajutorul unei impedanțe inductive care are o valoare foarte mare pentru armonica de rangul al doilea. Efectul acestui curent este opus celui de amplificare efectuat de curentul de comandă  $I_c$ , încât, ideal ar fi ca acest curent de armonica a doua să fie atenuat total; în acest caz bobina funcționează în *regim de magnetizare forțată*.

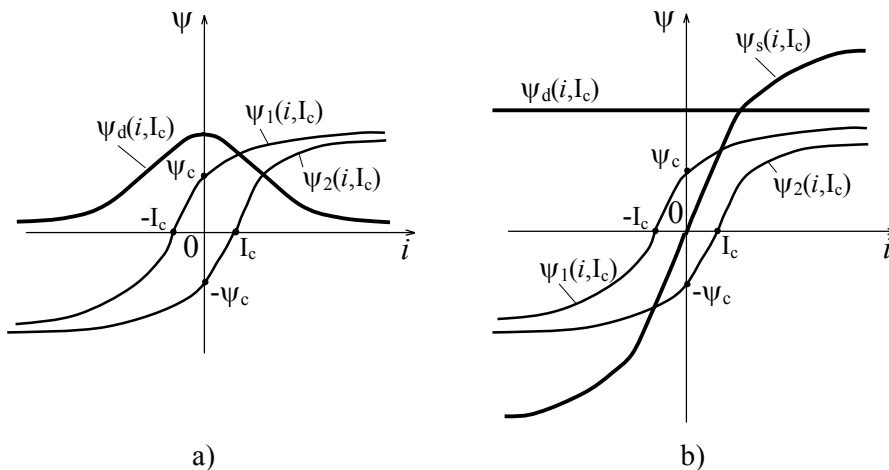


Fig. L2.8.

Dacă curentul de armonica a doua din circuitul de comandă este lăsat să circule, atunci poziția caracteristicilor  $\psi_1(i, I_c)$  și  $\psi_2(i, I_c)$  se modifică (translație după axa fluxului), fig. L2.8,b). Aceste caracteristici se obțin prin construcție grafică.

Se observă o mare diferență între formele acestor caracteristici și cele corespunzătoare regimului de magnetizare forțată și anume, lipsa neliniarității din origine la  $\psi_s(i, I_c)$  și constanța lui  $\psi_d(i, I_c)$ . În acest caz se spune că bobina funcționează în *regim de magnetizare liberă*.

**Observație.** În toate cazurile analizate mai sus bobina neliniară a fost considerată fără pierderi. În realitate bobina prezintă histerezis magnetic și toate caracteristicile  $\psi(i)$  sunt cu histerezis.

## 2. MODUL DE LUCRU

a) Se realizează montajul din figura L2.9, în care R și C sunt astfel aleși încât constituie un circuit integrator; în acest fel la plăcile y ale osciloscopului se aplică o tensiune proporțională cu fluxul magnetic dintr-unul sau ambele miezuri. La plăcile x se aplică o tensiune ce se culege potențiomtric de pe rezistorul  $R_s$  astfel încât ea este proporțională cu curentul  $i$  prin bobina sau bobinele de c.a. Pe ecranul osciloscopului se obține una sau alta dintre curbele  $\psi(i)$  cu histerezis.

b) Se scurtcircuitază una din bobinele  $N_s$  și se studiază  $\psi(i)$ ,  $\psi(t)$  și  $i(t)$  pentru bobina necomandată. Se vor identifica aceste caracteristici cu cele din fig. L2.3 și din fig. L2.5. Se vor studia aceleași caracteristici și pentru bobina comandată ( $I_c \neq 0$ ).

c) Se introduce în circuitul de c.a. bobina eliminată anterior și se studiază  $\psi_1(i)$ ,  $\psi_2(i)$ ,  $\psi_s(i)$ ,  $\psi_d(i)$ ,  $\psi(i)$  și  $i(t)$  în toate cazurile prezentate pentru bobina comandată cu două miezuri.

Se vor desena toate curbele obținute pe ecranul osciloscopului și se vor consemna în referat concluziile.

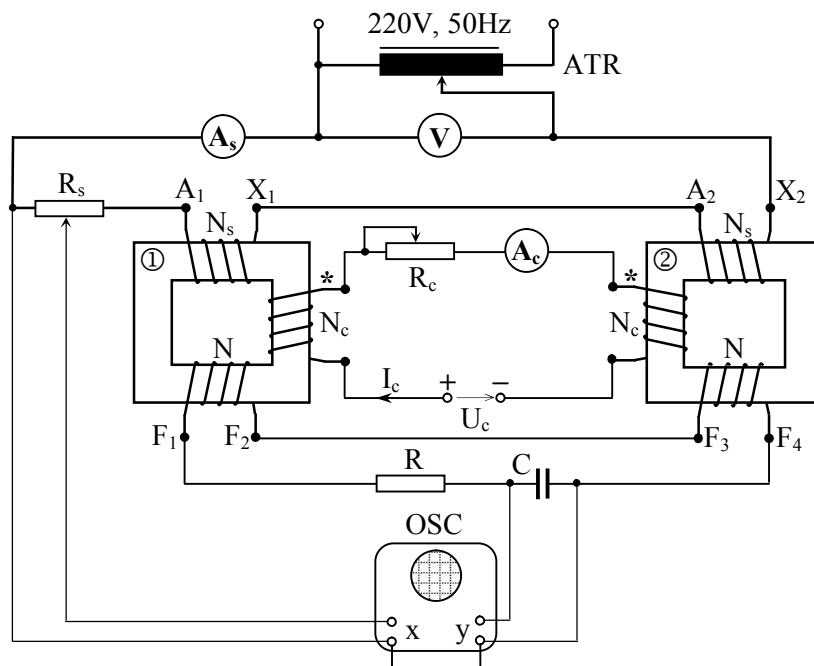
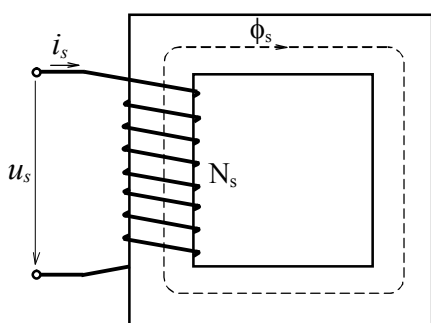


Fig. L2.9.

## BOBINA NELINIARA COMANDATA AMPLIFICATORUL MAGNETIC

### 1. CONSIDERAȚII GENERALE

Bobina cu miez feromagnetic, figura L3.1, este un element neliniar, neinerțial de circuit a cărei caracteristică esențială este cea care reprezintă modul de variație al fluxului magnetic din miez în funcție de solenație  $\psi(\theta)$  sau de curentul  $i$  prin bobina



$\psi(i)$ ,  $\theta = Ni$ . Această caracteristică este de aceeași formă cu caracteristica de magnetizare  $B(H)$ , figura L3.2. Dacă tensiunea  $u$  ce alimentează bobina este sinusoidală, atunci conform legii inducției electromagnetice, atât fluxul magnetic  $\psi$ , cât și inducția magnetică  $B$  sunt sinusoidale. Din cauza neliniarității caracteristicii  $\psi(i)$ , curentul  $i$  prin bobină rezultă, de asemenea periodic, dar nesinusoidal, figura L3.2, având armonici impare în sinus.

Fig. L3.1.

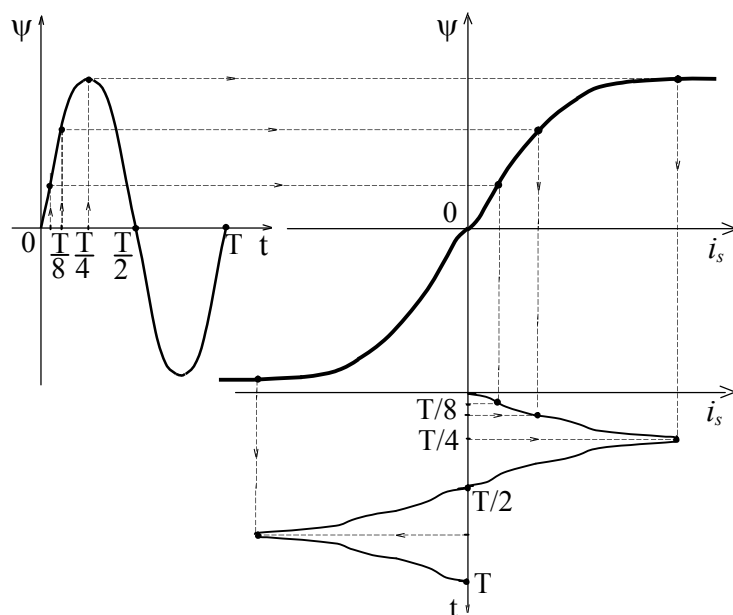


Fig. L3.2.



Deci o bobină cu miez feromagnetic alimentată cu o tensiune sinusoidală este parcursă de un curent deformat care are drept rezultat înrăutățirea condițiilor de funcționare ale circuitului sau rețelei din care face parte.

Pentru modificarea formei și poziției caracteristicii bobinei cu miez feromagnetic în scopul lărgirii domeniului de utilizare, se folosește procedeul de comandă, adică introducerea unei solenații suplimentare, numită solenație de comandă,  $\theta_c = NI_c$ , fig. L3.3. Aceasta produce un câmp magnetic suplimentar prin miez  $\phi_c$ . Curentul de comandă poate fi constant sau variabil în timp, de frecvență diferită de cea a tensiunii sinusoidale.

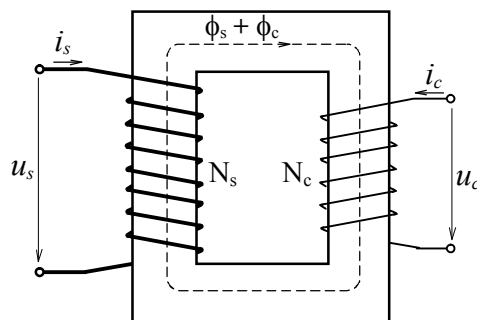


Fig. L3.3.

În circuitele de autornatizare industrială se folosește cu precădere cazul când comanda bobinei neliniare se face cu un curent constant. În acest caz caracteristicile  $B(H)$  și  $\psi(i)$  devin nesimetrice, fluxul magnetic prin miez conținând toate armonicile, ceea ce are drept consecință existența armonicilor de curent în circuitul de comandă și în circuitul de curent alternativ.

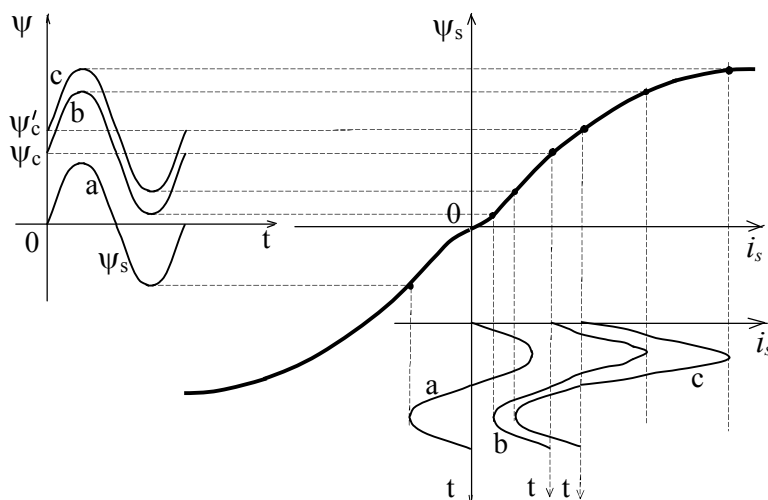


Fig. L3.4.

Tensiunea sinusoidală ce alimentează circuitul de curent alternativ este de frecvență  $f$  și suficient de mică încât, în absența solenației de comandă să nu aducă miezul magnetic la saturație, figura L3.4. În acest caz permeabilitatea magnetică  $\mu$  este mai mare, deci și inductivitatea bobinei de curent alternativ este mare, iar curentul prin această bobină este mic, figura L3.4, curba a.

La aplicarea solenației constante  $\theta_c$  careia îi corespunde fluxul magnetic constant  $\psi_c$ , acesta se adună cu fluxul alternativ  $\psi_s$  așa cum se vede în figura L3.4, aducând miezul magnetic în stare de saturație; în acest fel permeabilitatea lui magnetică scade, inductivitatea bobinei scade, iar curentul prin bobina  $N_s$  crește, figura L3.4, curba b. La aceeași amplitudine a tensiunii de alimentare, deci și a fluxului alternativ prin miez, curentul prin circuit este mai mare cu cât solenația de comandă este mai mare, figura L3.4, curba c. Se constată că se poate obține o variație mai mare a curentului din circuitul de curent alternativ la creșteri mici ale solenației (curentului) de comandă.

Aceasta este principiul de funcționare al *amplificatorului magnetic*, putându-se realiza amplificarea în curent, în tensiune sau în putere, dacă în circuitul de curent alternativ se introduce impedanța de sarcină  $Z_s$ .

Prezența armonicilor în circuitul de comandă face ca acest tip constructiv să nu fie utilizat practic, ci să se recurgă la soluția constructivă cu două miezuri magnetice identice, pe fiecare miez fiind plasate câte două înfășurări, cea de curent alternativ  $N_s$  și cea de comandă  $N_c$ , figura L3.5,a). Prin conectarea bobinelor de curent alternativ în serie adițional și a bobinelor de comandă în serie diferențial, se realizează compensarea armonicilor impare ale tensiunilor electromotoare induse în înfășurarea de comandă datorită modului periodic nesinusoidal de variație a fluxului în miez. Se poate considera funcționarea bobinei neliniare comandate în *regim de magnetizare forțată*.

## 2. CARACTERISTICILE TEHNICE ALE BOBINEI COMANDATE

Pentru bobina neliniară comandată în schemă de amplificator magnetic, interesează cele două familii de caracteristici corespunzătoare oricărui element neliniar comandat, și anume: familia caracteristicilor de intrare și familia caracteristicilor de comandă în valori efective. Familia caracteristicilor de intrare este reprezentată de relația  $U_s = U_s(I_s)$  pentru  $I_c = ct.$ , fig. L3.5,b), iar familia caracteristicilor de comandă este reprezentată de relația:  $I_s = I_s(I_c)$  pentru  $I_c = ct.$ , exprimate în valori efective.

Caracteristica  $U_s(I_s)$  pentru  $I_c = 0$ , are aceeași formă cu caracteristica de magnetizare a bobinei neliniare fără pierderi.

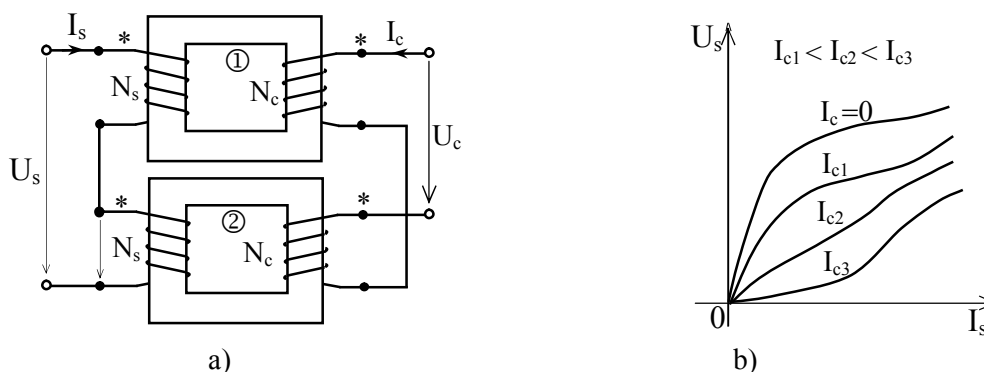


Fig. L3.5.

Caracteristicile de comandă  $I_s(I_c)$  sunt simetrice, ceea ce arată că modul de variație al curentului de sarcină în raport cu curentul de comandă nu depinde de sensul acestuia, fig. L3.6,a).

Dacă se introduce o înfășurare suplimentară de comandă, tot în curent continuu, numită înfășurare de polarizare  $N_p$ , atunci, pentru aceeași valoare a tensiunii de alimentare  $U_s$  se poate trasa încă o familie de caracteristici de comandă pentru diferite valori ale curentului de polarizare  $I_p$  și anume  $I_s(I_c)$  pentru  $U_s = ct.$  și  $I_p = ct.$  Aceste caracteristici sunt nesimetrice, fig. L3.6,b), și se pot obține prin translatarea la stânga sau la dreapta a caracteristicii de comandă  $I_s(I_c)$  pentru  $U_s = ct.$ , în funcție de sensul curentului de polarizare. Nesimetria acestei caracteristici arată că modul de variație a curentului de sarcină  $I_s$  depinde de sensul curentului de comandă.

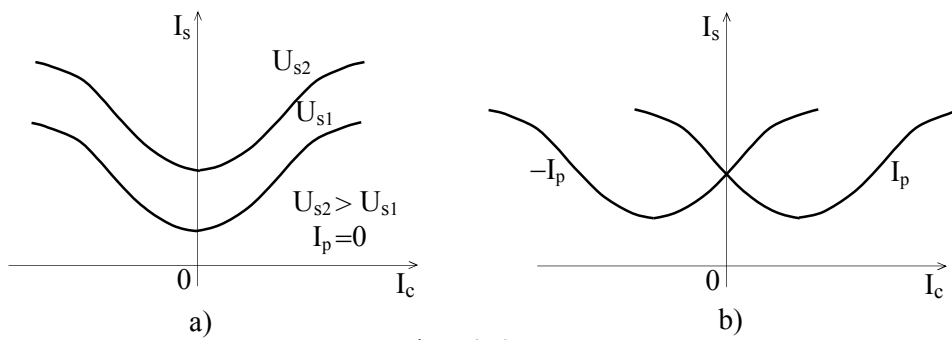


Fig. L3.6.

### 3. MODUL DE LUCRU

- 1) Se efectuează montajul din Figura L3.7 și se trasează familia caracteristicilor de intrare  $U_s = U_s(I_s)$  pentru diferite valori menținute constante ale curentului de comandă. Circuitul de polarizare rămâne deschis.
- 2) Se menține constantă valoarea efectivă a tensiunii de alimentare  $U_s$  și variind curentul de comandă  $I_c$ , păstrând  $I_p = 0$ , se trasează caracteristica de comandă  $I_s(I_c, U_s = \text{ct.})$ .
- 3) Se fixează  $I_p = 100\text{mA}$  și se trasează caracteristica de comandă  $I_s(I_c, U_s = \text{ct.})$ , având grijă a se trasa ambele ramuri prin schimbarea sensului de circulație a curentului de comandă  $I_c$ .

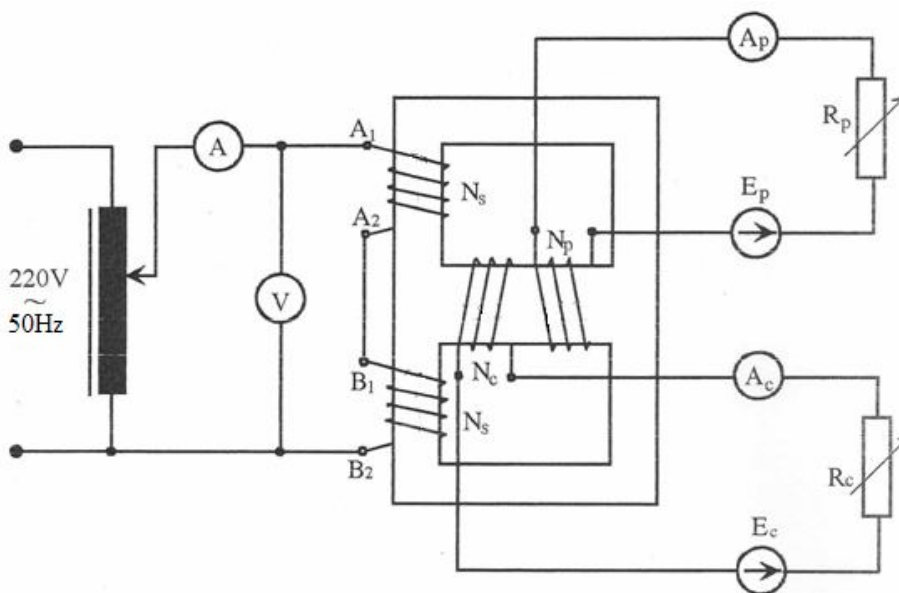


Fig. L3.7.

## METODE DE ANALIZĂ A REȚELELOR ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Analiza rețelilor electrice liniare de curent continuu constă în determinarea curenților prin laturi sau a tensiunilor la bornele elementelor de circuit când se dau tensiunile electromotoare și curenții generatoarelor de tensiune, respectiv de curent și rezistențele sau conductanțele acestora și ale elementelor receptoare (rezistoarelor).

Metodele de analiză se bazează pe legea lui Ohm și teoremele lui Kirchhoff pentru circuite liniare cu parametri concentrați și pe teorema suprapunerii efectelor (toate elementele de circuit fiind considerate liniare).

În lucrare se studiază teoretic și experimental trei dintre metodele de analiză a rețelilor electrice liniare de curent continuu și anume: *metoda curenților ciclici* (independenți, de ochiuri), *metoda potențialelor sau tensiunilor la noduri* și *metoda bazată pe teorema superpoziției* (suprapunerii efectelor). Aceste metode conduc, în cazul unor rețele mai complexe, la simplificarea calculelor față de cazul în care analiza acestor rețele s-ar efectua cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff.

#### 1.1. Metoda curenților ciclici

Metoda constă în considerarea unor curenți fictivi (de calcul), numiți *curenți ciclici, independenți sau de contur*, care ar circula de-a lungul laturilor ochiurilor sau buclelor fundamentale (independente) după un sens de referință ales arbitrar pentru fiecare ochi sau buclă. Pe baza teoremei a II-a Kirchhoff se scriu ecuațiile de ochiuri în raport cu acești curenți și din sistemul astfel obținut se determină curenții ciclici.

Pentru o rețea electrică cu  $l$  laturi și  $n$  noduri avem  $o = l - n + 1$  ochiuri independente (fundamentale) și sistemul de ecuații corespunzător curenților ciclici se scrie

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + \dots + R_{1k}I'_k + \dots + R_{1,o}I'_o = E_{[1]} \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + \dots + R_{2k}I'_k + \dots + R_{2,o}I'_o = E_{[2]} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_{m,1}I'_1 + R_{m,2}I'_2 + \dots + R_{m,k}I'_k + \dots + R_{m,o}I'_o = E_{[m]} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ R_{o,1}I'_1 + R_{o,2}I'_2 + \dots + R_{o,k}I'_k + \dots + R_{o,o}I'_o = E_{[o]} \end{cases} \quad (L4.1)$$

în care :

- $R_{m,m} = \sum_{j \in [m]} R_j$  – suma rezistențelor laturilor aparținând ochiului [m] numită și rezistența proprie a ochiului în care rezistențele  $R_j$  se iau totdeauna cu semnul ‘+’ ;
- $R_{m,k} = \sum_{j \in [m],[k]} R_j$  – rezistența sau suma rezistențelor laturii (laturilor) comune ochiurilor [m] și [k]. Rezistențele  $R_j$  din această sumă se iau cu semnul ‘+’ sau ‘-’, după cum curenții ciclici ai celor două ochiuri la care aparțin au același sens, respectiv sensuri opuse prin aceste rezistențe ;
- $I'_k$  – curentul ciclic al ochiului [k];
- $E_{[m]} = \sum_{j \in [m]} E_j$  – suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor de tensiune din laturile ochiului [m], luate cu semnul ‘+’ sau ‘-’ după cum sensul lor coincide, respectiv este opus sensului de referință al ochiului.

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (L4.1), de exemplu prin metoda Cramer, se obțin valorile curenților ciclici  $I'_k$  considerați:

$$I'_k = \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta} E_{[1]} + \frac{\Delta_{2,k}}{\Delta} E_{[2]} + \dots + \frac{\Delta_{m,k}}{\Delta} E_{[m]} + \dots + \frac{\Delta_{o,k}}{\Delta} E_{[o]} = \sum_{m=1}^o \frac{\Delta_{m,k}}{\Delta} E_{[m]}, \quad k = 1, 2, \dots, o \quad (L4.2)$$

În această relație,  $\Delta$  este determinatul sistemului de ecuații (L4.1), iar  $\Delta_{m,k}$  este complementul algebric al termenului  $R_{m,k}$ , cu semnul corespunzător:  $\Delta_{m,k} = (-1)^{m+k} \cdot |\Delta_{m,k}|$ .

Curenții reali prin fiecare latură a rețelei se determină prin superpoziția curenților ciclici care circulă prin latura respectivă. Astfel, curentul printr-o latură oarecare  $j$  a rețelei se calculează cu relația:

$$I_j = \sum_{[m] \in j} I'_m \quad (L4.3)$$

în care semnul ‘ $\in$ ’ specifică faptul că curentul ciclic  $I'_m$  circulă prin latura  $j$ . Sumarea se face algebric, curenții  $I'_m$  se iau cu semnul ‘+’ sau ‘-’ dacă au același sens, respectiv dacă au sens opus sensului de referință ales pentru curentul  $I_j$ .

De exemplu, pentru rețeaua electrică prezentată în figura L4.1, dacă se aleg cele trei ochiuri independente ale rețelei așa cum sunt marcate pe figură, sistemul de ecuații corespunzător curenților ciclici se scrie:

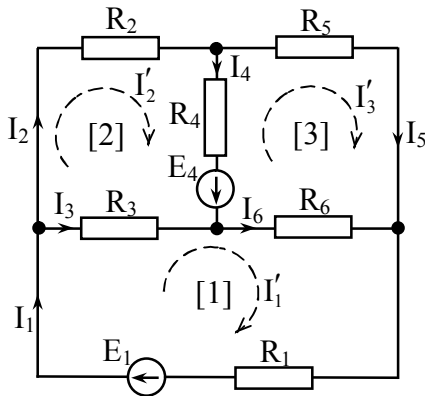


Fig. L4.1.

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + R_{13}I'_3 = E_{[1]} \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + R_{23}I'_3 = E_{[2]} \\ R_{31}I'_1 + R_{32}I'_2 + R_{33}I'_3 = E_{[3]} \end{cases} \quad (L4.4)$$

După determinarea curenților ciclici  $I'_1, I'_2, I'_3$  prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, curenții reali din laturile rețelei se calculează astfel:

$$\begin{aligned} I_1 &= I'_1, \quad I_2 = I'_2, \quad I_3 = I'_1 - I'_2, \quad I_4 = I'_2 - I'_3, \\ I_5 &= I'_3, \quad I_6 = I'_1 - I'_3 \end{aligned}$$

## 1.2. Metoda potențialelor la noduri

Metoda se aplică la nodurile rețelei electrice astfel: se alege unul dintre noduri, nod de referință (nodul (n), de exemplu), presupus pentru simplitate de potențial nul (legat la pământ), iar potențialele celorlalte noduri în raport cu nodul de referință, notate cu  $V'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , se numesc potențiale sau tensiuni de noduri sau nodale. Se demonstrează că în raport cu aceste potențiale raportate se poate scrie un sistem de ecuații liniar independente care are următoarea formă generală:

$$\begin{cases} G_{11}V'_1 + G_{12}V'_2 + \dots + G_{1k}V'_k + \dots + G_{1,n-1}V'_{n-1} = -I_{sc(1)} \\ G_{21}V'_1 + G_{22}V'_2 + \dots + G_{2k}V'_k + \dots + G_{2,n-1}V'_{n-1} = -I_{sc(2)} \\ \dots \dots \dots \\ G_{i1}V'_1 + G_{i2}V'_2 + \dots + G_{ik}V'_k + \dots + G_{i,n-1}V'_{n-1} = -I_{sc(i)} \\ \dots \dots \dots \\ G_{n-1,1}V'_1 + G_{n-1,2}V'_2 + \dots + G_{n-1,k}V'_k + \dots + G_{n-1,n-1}V'_{n-1} = -I_{sc(n-1)} \end{cases} \quad (L4.5)$$

În aceste ecuații intervin conductanțele laturilor ( $G = 1/R$ ) și curenții de scurtcircuit ai laturilor sau curenții generatoarelor de curent, astfel :

- $G_{ii} = \sum_{j \in (i)} G_j$  – suma conductanțelor laturilor  $j$  ( $G_j = 1/R_j$ ) legate la nodul (i), numită și conductanța proprie a nodului. Conductanțele  $G_j$  din această sumă se iau totdeauna cu semnul '+';
- $G_{ik} = \sum_{j \in (i),(k)} G_j$  – conductanța sau suma conductanțelor laturilor  $j$  care leagă nodurile (i) și (k) între ele. Conductanța  $G_{ik}$  se ia totdeauna cu semnul '-'
- $I_{sc(i)} = \sum_{j \in (i)} G_j E_j = \sum_{j \in (i)} I_{gj}$  – suma algebrică a curenților de scurtcircuit  $I_{jsc} = G_j E_j$  ai laturilor  $j$  legate la nodul (i) sau suma curenților generatoarelor de curent  $I_{gj}$  legate la nodul (i). Acești curenți se iau cu semnul '-' dacă sunt orientați către nod și cu semnul '+' dacă sunt orientați dinspre nod.

Prin curent de scurtcircuit al unei laturi,  $I_{jsc}$ , se înțelege curentul care se stabilește în acea latură prin scurtcircuitarea bornelor acesteia, așa cum se arată în figura L4.2,a). Este evident că numai laturile active (cu sursă de tensiune) au curent de scurtcircuit, sensul acestuia fiind dat de sensul sursei de tensiune. O latură activă cu un rezistor  $R_j$  și generator ideal de tensiune  $E_j$  (fig. L4.2,a) poate fi privită ca un generator real de tensiune cu rezistența interioară egală cu rezistența laturii. Această latură poate fi înlocuită cu o latură activă echivalentă cu generator real de curent, având curentul injectat  $I_{gj}$  egal cu curentul de scurtcircuit și conductanța  $G_j$  egală cu inversul rezistenței laturii:

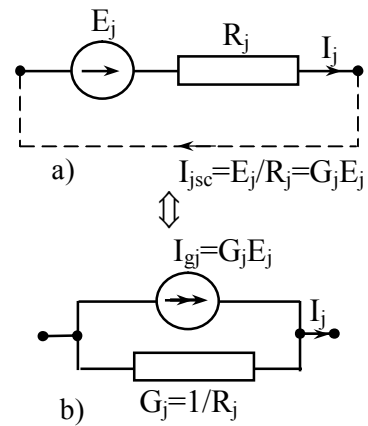
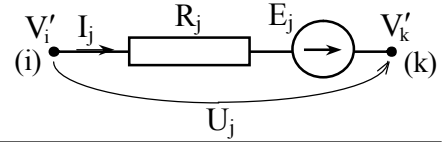


Fig. L4.2.

$$I_{gj} = I_{jsc} = G_j E_j, \quad G_j = 1/R_j \quad (\text{fig. L4.2,b}).$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (L4.5), de exemplu prin metoda Cramer, se determină potențialele raportate  $V'_k$  ale celor  $n - 1$  noduri independente. Tensiunile la bornele laturilor se pot determina prin diferența potențialelor nodurilor, iar curenții prin laturile rețelei se determină aplicând legea conducției electrice (legea lui Ohm generalizată), așa cum se arată în figura L4.3 pentru cazul general al unei laturi de circuit cu rezistor și generator ideal de tensiune.

În cazul rețelelor electrice complexe, calculul se simplifică dacă inițial se transformă generatoarele de tensiune în generatoare echivalente de curent (dacă este posibil), așa cum s-a arătat mai sus. În figura L4.4, se prezintă schema echivalentă cu generatoare de curent a rețelei considerate în figura L4.1. Conductanțele sunt inversul rezistențelor,  $G_k = 1/R_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), iar generatoarele de curent echivalente sunt:  $I_{g1} = G_1 E_1$ ,  $I_{g4} = G_4 E_4$ . Pentru acest exemplu, în care s-a ales nodul (4) de referință ( $V_4 = 0$ ), ecuațiile de noduri se scriu:



$$U_j = V'_i - V'_k$$

$$U_j + E_j = R_j I_j \Rightarrow I_j = G_j (U_j + E_j)$$

Fig. L4.3.

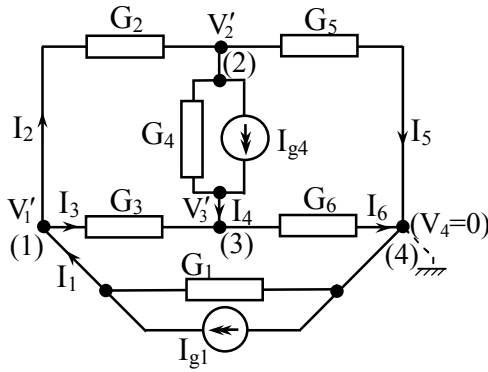


Fig. L3.4.

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)V'_1 - G_2V'_2 - G_3V'_3 = I_{g1} \\ -G_2V'_1 + (G_2 + G_4 + G_5)V'_2 - G_4V'_3 = -I_{g4} \\ -G_3V'_1 - G_4V'_2 + (G_3 + G_4 + G_6)V'_3 = I_{g4} \end{cases} \quad (\text{L4.6})$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații (de exemplu, prin metoda Cramer) se determină potențialele raportate  $V'_1$ ,  $V'_2$  și  $V'_3$ .

Tensiunile la bornele laturilor, luate după regula de la receptoare (în sensul curenților), se calculează astfel:

$$U_1 = V_4 - V'_1 = -V'_1; \quad U_2 = V'_1 - V'_2; \quad U_3 = V'_1 - V'_3;$$

$$U_4 = V'_2 - V'_3; \quad U_5 = V'_2; \quad U_6 = V'_3.$$

Curenții prin laturi se determină cu legea lui Ohm și teorema I Kirchhoff:

$$I_1 = G_1 U_1 + I_{g1}; \quad I_2 = G_2 U_2; \quad I_3 = G_3 U_3; \quad I_4 = G_4 U_4 + I_{g4}; \quad I_5 = G_5 U_5; \quad I_6 = G_6 U_6.$$

### 2.3. Metoda suprapunerii efectelor

Metoda se bazează pe teorema superpoziției, valabilă pentru circuitele electrice liniare, conform căreia curentul printr-o latură oarecare a unei rețele electrice liniare în care acționează mai multe surse de energie se obține prin superpoziția curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte, dacă ar acționa singură în circuit, efectul celorlalte surse fiind anulat (scurtcircuitarea generatoarelor de tensiune și întreruperea generatoarelor de curent, păstrându-se numai rezistențele sau conductanțele lor interioare). Astfel pentru schema din figura L4.1, luată ca exemplu, metoda se aplică considerând pe rând numai câte o singură sursă (fig. L4.5, a și b) și calculând curenții pentru fiecare caz în parte.

Cu una dintre metodele potrivite de calcul (bazate pe legea lui Ohm, teoremele lui Kirchhoff, metoda curenților ciclici, etc.) se calculează curenții produși în rețele de fiecare sursă în parte și apoi curenții din laturile rețelei inițiale prin însumarea algebrică (ținând cont de sensurile de referință adoptate) a acestor curenți. Pentru exemplul

considerat, după determinarea curenților  $I'_k$  și  $I''_k$  din schemele a) și b) din figura L4.5, curenții din schema inițială (figura L4.1) se calculează astfel:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; I_2 = I'_2 + I''_2; I_3 = I'_3 - I''_3; I_4 = I'_4 + I''_4; I_5 = I'_5 - I''_5; I_6 = I'_6 - I''_6.$$

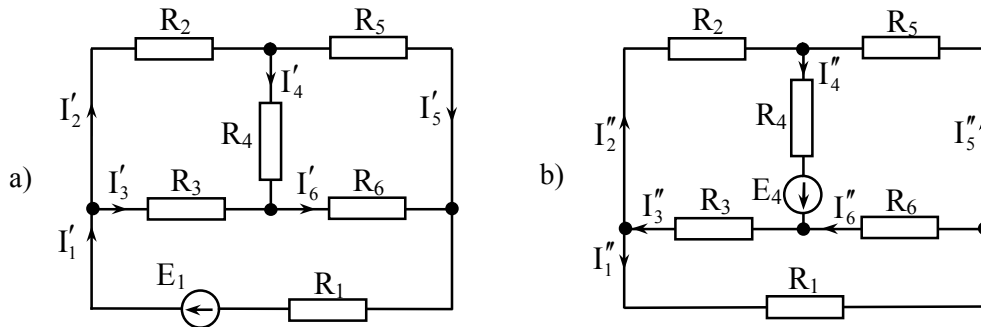


Fig. L4.5.

## 2. MODUL DE LUCRU

### 2.1. Calculul curenților

În cadrul lucrării de laborator se determină curenții prin cele trei metode pentru o rețea electrică liniară de curent continuu propusă de conducătorul lucrării.

Calculul curenților, poate fi efectuat ușor pe calculator utilizând un program de calcul matematic, așa cum sunt, de exemplu, programele *MATCAD* sau *MATLAB*. Programul de calcul se simplifică mult dacă se scriu în forma matricială ecuațiile rețelei. Pentru aceasta se construiesc matricele prezentate mai jos.

*Matricea de incidență redusă laturi-noduri*  $[A]$  are  $n - 1$  linii numerotate în ordinea nodurilor independente și  $l$  coloane numerotate în ordinea laturilor rețelei, termenii săi având respectiv valoarea 1 sau  $-1$  dacă latura este legată la nod și este orientată de la nod, respectiv către nod și valoarea 0 dacă latura nu este legată la nod.

*Matricea de incidență redusă laturi-ochiuri*  $[B]$ , are  $o$  linii numerotate în ordinea ochiurilor independente și  $l$  coloane numerotate în ordinea laturilor rețelei, termenii săi având respectiv valoarea 1 sau  $-1$  dacă latura aparține ochiului și este orientată în același sens, respectiv în sens opus ochiului și 0 dacă latura nu aparține ochiului.

Scrierea matricelor de incidență se face mai ușor, pe baza grafului rețelei analizate. Graful orientat (graful curenților) pentru schema considerată în această lucrare (fig. L4.1), este prezentat în figura L4.6, iar matricele de incidență laturi-noduri și laturi-ochiuri sunt:

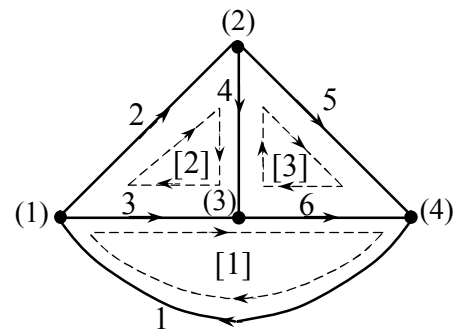


Fig. L4.6.

$$\begin{array}{l} \text{noduri} \rightarrow \downarrow \\ [A] = \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow \text{laturi} \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} ; \begin{array}{l} \text{ochiuri} \rightarrow \downarrow \\ [B] = \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \Rightarrow \text{laturi} \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{array}.$$



Matricea rezistențelor  $[R]$  și respectiv matricea conductanțelor  $[G]$  sunt matrice diagonale de ordinul  $l$ , având pe diagonală rezistențele, respectiv conductanțele laturilor rețelei. Astfel, pentru rețelele echivalente din figurile L4.1 și L4.4, aceste matrice sunt:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}; \quad [G] = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.1. Metoda curenților ciclici în forma matriceală

Sub formă matriceală, sistemul de ecuații (L4.1) se scrie

$$[R'] \cdot [I'] = [E'], \quad (L4.7)$$

unde matricea  $[I']$  este matricea coloană cu  $o$  termeni a curenților ciclici, iar matricele  $[R']$  și respectiv  $[E']$  se determină cu relațiile

$$[R'] = [B] \cdot [R] \cdot [B]^t, \quad [E'] = [B] \cdot [E], \quad (L4.8)$$

în care  $[B]^t$  este transpusa matricei de incidență laturi-ochiuri, iar  $[E]$  este matricea coloană cu  $l$  termeni a tensiunilor electromotoare din laturile rețelei.

Matricea curenților din laturile rețelei  $[I]$ , se determină cu relația:

$$[I] = [B]^t \cdot [I'] = [B]^t \cdot [R']^{-1} \cdot [E'] \quad (L4.9)$$

### 2.1.2. Metoda potențialelor la noduri forma matriceală

Sub formă matriceală, sistemul de ecuații (L4.5) se scrie

$$[G'] \cdot [V'] = -[I'_{sc}], \quad (L4.10)$$

unde  $[V']$  este matricea coloană cu  $n - 1$  termeni a potențialelor raportate  $V'_k$ , iar matricele  $[G']$  și respectiv  $[I'_{sc}]$  se determină cu relațiile:

$$[G'] = [A] \cdot [G] \cdot [A]^t; \quad [I'_{sc}] = [A] \cdot [G] \cdot [E]. \quad (L4.11)$$

Din ecuația (1.10) se determină potențialele raportate

$$[V'] = -[G']^{-1} \cdot [I'_{sc}] \quad (1.12)$$

și apoi tensiunile la bornele laturilor cu relația:

$$[U] = [A]^t \cdot [V'] \quad (1.13)$$

Dacă pentru toate laturile rețelei s-a adoptat convenția de sensuri de la receptoare și pentru laturile cu surse de tensiune sensul curentului s-a luat în sensul sursei ca în figura 3, curenții din laturi se determină cu relația:

$$[I] = [G] \cdot ([U] + [E]) \quad (1.14)$$

## 2.2. Partea experimentală.

După determinarea prin calcul a tensiunilor și curenților prin cele trei metode se verifică experimental rezultatele obținute, efectuând practic un montaj pentru rețeaua propusă. Se măsoară, în montajul realizat, tensiunile și curenții calculați anterior. Se notează valorile măsurate și se compară cu cele calculate, explicând eventualele neconcordanțe.

## STUDIUL DIPOLULUI LINIAR PASIV ALIMENTAT ÎN CURENT CONTINUU

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Un circuit cu două borne de acces (poli), astfel încât curentul care intră pe la una din borne este egal cu curentul care iese pe la cealaltă bornă, se numește *dipol*.

Dipolul este *liniar pasiv* dacă are în structura sa numai elemente de circuit pasive, liniare (rezistoare liniare).

O linie de curent continuu de transport a energiei electrice sau de telecomunicații, de tensiuni relativ reduse, poate fi asimilată cu un dipol dacă se neglijează curenții de pierdere prin izolația dintre conductoarele liniei (fig. L5.1,a). O astfel de linie poate fi modelată cu o schemă electrică cu parametri concentrați în care rezistența conductoarelor liniei omogene (circuit cu parametri distribuiți) poate fi înlocuită prin rezistența

$$R_l = 2 \frac{\rho \cdot l}{S} \quad (\text{L5.1})$$

în care s-a notat cu:  $\rho$  – rezistivitatea conductoarelor,  
 $l$  – lungimea liniei,  
 $S$  – secțiunea conductoarelor.

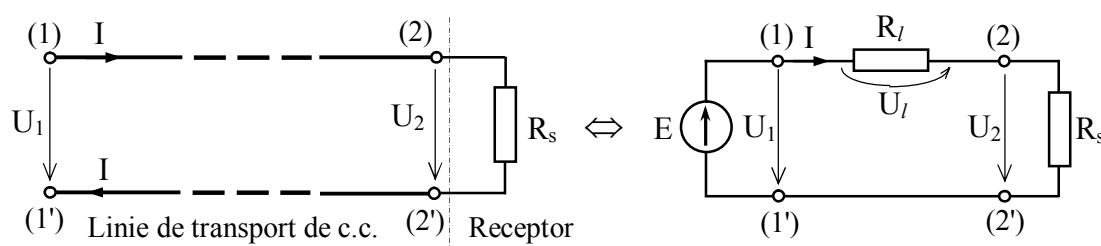


Fig. L5.1. Dipolul electric: a) dipolul electric corespunzător unei linii de transport a energiei electrice în curent continuu; b) schema echivalentă a dipolului corespunzător liniei

Ecuția dipolului astfel obținut (fig. L5.1,b) este

$$U_1 = U_2 + R_l I. \quad (\text{L5.2})$$

Presupunând că rezistența internă a generatorului de tensiune continuă  $E$  este neglijabilă ( $R_g = 0$ ), rezultă că tensiunea la bornele de intrare  $U_1$  este constantă ( $U_1 = \text{ct.}$ ) Mărimile electrice caracteristice funcționării dipolului vor fi:

- tensiunea la receptor

$$U_2 = U_1 - R_l I = U_1 - \Delta U, \quad (\text{L5.3})$$

unde  $\Delta U = U_l = R_l I$  este căderea de tensiune pe linie;

- puterea furnizată de generator  $P_1 = U_1 I$ ;
- puterea furnizată receptorului de sarcină (puterea utilă)

$$P_2 = R_s I^2 = U_2 I = (U_1 - R_l I) I = U_1 I - R_l I^2 = P_1 - \Delta P, \quad (L5.4)$$

unde  $\Delta P = R_l I^2$  este puterea pierdută prin efect Joule pe conductoarele liniei;

- randamentul transmisiei de putere

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - \Delta P}{P_1} = \frac{U_1 I - R_l I^2}{U_1 I} = 1 - \frac{R_l I}{U_1} \quad (L5.5)$$

Regimurile limită de funcționare ale liniei sunt:

- *regimul de mers în gol* când linia este deschisă, iar mărimile electrice corespunzătoare sunt:  $I = 0$ ,  $\Delta U = 0$ ,  $U_2 = U_1$ ,  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 0$ ,  $\eta = 1$ ;
- *regimul de scurtcircuit* când  $R_2 = 0$  (bornele 2 - 2' sunt scurtcircuitate). În acest caz avem: curentul de scurtcircuit  $I_{sc} = U_1 / R_l$ ,  $\Delta U = R_l I_{sc} = U_1$ ,  $U_2 = 0$ ,  $P_1 = U_1 I_{sc} = U_1^2 / R_l$ ,  $P_2 = 0$ ,  $\eta = 0$ .

Se poate observa că puterea transmisă receptorului are o variație parabolică în funcție de curentul  $I$ , cu un maxim ce se obține din condiția  $\frac{dP_2}{dI} = 0$ . Utilizând relația (L5.4), rezultă:

$$I|_{P_{2max}} = \frac{U_1}{2R_l} = \frac{1}{2} I_{sc} \quad \text{și} \quad P_{2max} = \frac{U_1^2}{4R_l} \quad (L5.6)$$

*Transferul de putere maximă se realizează când  $R_s = R_l$ , deci când rezistența receptorului de sarcină este egală cu rezistența conductoarelor liniei.*

Randamentul transmisiei de putere maximă este:

$$\eta = \frac{P_{2max}}{P_1} = \frac{U_1^2}{4R_l} / \frac{U_1^2}{2R_l} = 0,5. \quad (L5.7)$$

Deci, indiferent de tensiunea generatorului și de rezistența echivalentă a dipolului, puterea maximă se transmite cu un randament de 50%.

Expresia randamentului mai poate fi scrisă:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_s}{R_l + R_s} \quad (L5.8)$$

De aici rezultă următoarele situații posibile:

- în cazul liniilor de transport a energiei electrice (unde curenții au valori mari) se urmărește realizarea unui randament ridicat și deci trebuie ca  $R_l \ll R_s$ ;
- în cazul liniilor de telecomunicații este necesar să se transmită receptorului un semnal cât mai puternic, deci să se transmită o putere maximă, dar cu un randament mai mic. În acest caz, curenții având valori relativ mici, se poate neglija pierderea de putere pe conductoarele liniei.

Variațiile mărimilor electrice considerate în funcție de intensitatea curentului pe linie sunt redată în figura L5.2.

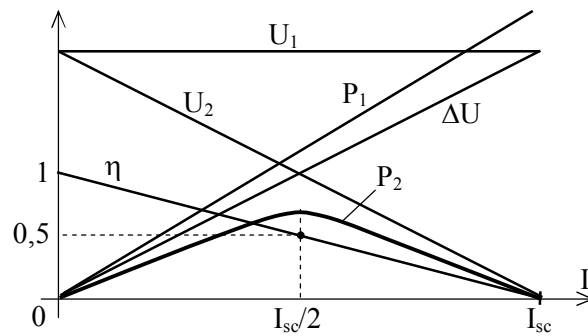


Fig. L5.2.

## 2. MODUL DE LUCRU

Se realizează un montaj conform schemei din fig. L5.3. Se fixează tensiunea  $U_1$  prin comutatorul sursei de alimentare de tensiune continuă  $E$  la o valoare ce va rămâne constantă. Se realizează pe rând regimurile de mers în gol și scurtcircuit, apoi prin modificarea rezistenței reostatului de sarcină  $R_s$  se studiază variația mărimilor  $U_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\Delta U$  și  $\eta$  în funcție de curentul de sarcină. Se acordă atenție punctului corespunzător curentului  $I = I_{sc}/2$ .

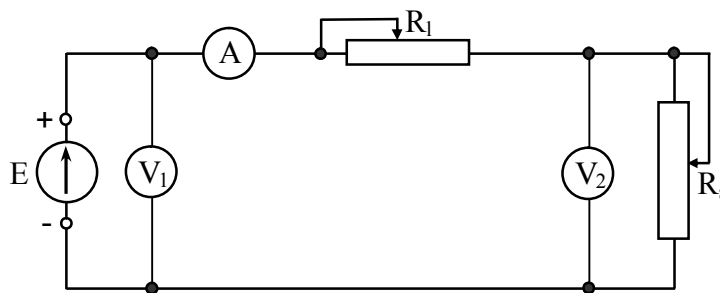


Fig. L5.3. Schema electrică a montajului.

Datele se trec în tabelul de mai jos și se trasează pe baza lor, pe același grafic (ca cel din fig. L5.2) caracteristicile principale.

Tabelul L5.1.

$U_1 = \dots\dots\dots$								
I [A]								.....
$U_2$ [V]								.....
$P_1 = U_1 I$ [W]								.....
$P_2 = U_2 I$ [W]								.....
$\Delta U = U_1 - U_2$								.....
$\eta = \frac{P_2}{P_1}$								.....

## STUDIUL EXPERIMENTAL AL TEOREMELOR CIRCUITELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU

### I. NOȚIUNI TEORETICE

#### 1.1. Teoremele generatoarelor echivalente de tensiune și de curent

Fiind dată o rețea electrică activă liniară  $\mathfrak{R}_a$ , curentul printr-o latură pasivă oarecare sau tensiunea la bornele acestei laturi se pot determina direct cu ajutorul teoremei generatorului echivalent de tensiune respectiv, cu ajutorul teoremei generatorului echivalent de curent.

Separând din rețeaua dată  $\mathfrak{R}_a$  latura pasivă cuprinsă între bornele (a) și (b), având rezistența  $R_{ab}$  (fig. L6.1,a), restul rețelei  $\mathfrak{R}'_a$  reprezintă în raport cu aceste borne un dipol liniar activ (DLA) care, prin transfigurare, se poate înlocui cu o latură echivalentă formată dintr-un rezistor  $R_i$  și un generator ideal de tensiune, cu tensiunea electromotoare  $E_0$  (fig. L6.1,b).

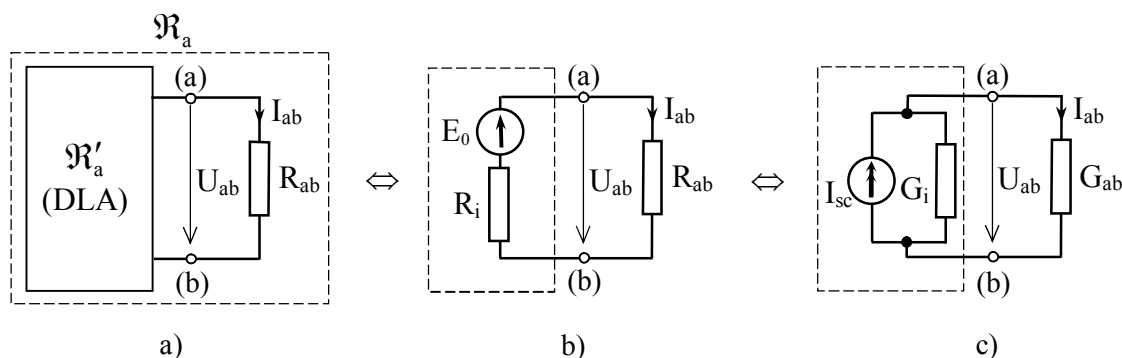


Fig. L6.1.

Rezistența echivalentă a dipolului  $R_i$  în raport cu bornele sale de acces (a) și (b) se numește și *rezistența internă a dipolului*.

Tensiunea la bornele dipolului în regim de mers în gol ( $R_{ab}$  – deconectată și deci  $I_{ab} = 0$ ) se notează  $U_{ab0}$ . Aplicând legea lui Ohm la funcționarea în gol a dipolului (în lipsa laturii ab), rezultă  $E_0 = U_{ab0}$ .

**Teorema generatorului echivalent de tensiune:** orice dipol liniar activ este echivalent cu o sursă de tensiune, având tensiunea electromotoare  $E_0$  egală cu tensiunea la bornele dipolului în regimul de mers în gol ( $U_{ab0}$ ) și o rezistență electrică internă  $R_i$  egală cu rezistența echivalentă a dipolului în raport cu bornele sale de acces.

Rezistențele echivalente nu depind de tensiunile electromotoare și de curenții generatoarelor de tensiune și respectiv de curenți, ca urmare calculul rezistențelor echivalente se poate efectua prin pasivizarea circuitelor. Prin pasivizarea unui circuit se înțelege anularea tensiunilor electromotoare și a curenților generatoarelor de tensiune, respectiv de curenți, păstrând rezistențele sau conductanțele acestora. În acest fel, rezistența echivalentă  $R_i$  a dipolului reprezintă rezistența echivalentă a rețelei  $\mathfrak{R}'_a$  pasivizată în raport cu bornele (a) și (b), notată  $R_{abo}$ :

$$R_i = R_{abo} . \quad (L6.1)$$

Pentru circuitul echivalent astfel obținut, fig. L6.2, aplicând teorema a II-a Kirchoff, rezultă:

$$(R_{abo} + R_{ab})I_{ab} = U_{abo}$$

și deci,

$$I_{ab} = \frac{U_{abo}}{R_{abo} + R_{ab}} . \quad (L6.2)$$

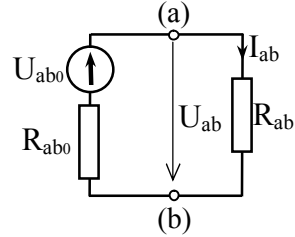


Fig. L6.2.

Relația obținută reprezintă **teorema generatorului echivalent Thèvenin** și care se enunță astfel: *intensitatea*

*curentului  $I_{ab}$  printr-o latură pasivă oarecare conectată între punctele (a) și (b) ale unei rețele active liniare este egală cu raportul dintre tensiunea  $U_{abo}$  la bornele (a), (b) la mersul în gol (în lipsa laturii ab) și suma dintre rezistența  $R_{ab}$  a laturii și rezistența echivalentă  $R_{abo}$  a rețelei pasivizate între bornele (a) și (b), în lipsa laturii ab.*

Analog, înlocuind generatorul de tensiune cu un generator echivalent de curenți (fig. L6.1,c), se obține **teorema generatorului echivalent de curenți**: *orice dipol liniar activ este echivalent cu un generator (sursă) de curenți, având intensitatea curentului  $I_{sc}$  egală cu intensitatea curentului debitat de dipol în regimul de scurtcircuit (bornele (a), (b) scurtcircuitate) și o conductanță electrică internă  $G_i$ , egală cu conductanța echivalentă a dipolului.*

Într-adevăr, la mersul în scurtcircuit ( $R_{ab} = 0$  și deci  $U_{ab} = 0$ ), notând cu  $I_{absc}$  curentul prin latura ab cu rezistența  $R_{ab}$  scurtcircuitată, rezultă:  $I_{sc} = I_{absc}$ .

Conductanța echivalentă a dipolului  $G_i$  se calculează prin pasivizarea acestuia și reprezintă conductanța echivalentă a rețelei  $\mathfrak{R}'_a$  pasivizată, în raport cu bornele (a) și (b), notată  $G_{abo}$ :  $G_i = G_{abo}$ .

Aplicând teorema I Kirchoff circuitului din fig. L6.3 și exprimând curenții pe baza legii lui Ohm, avem

$$I_{absc} = G_{ab}U_{ab} + G_{abo}U_{ab},$$

din care rezultă:

$$U_{ab} = \frac{I_{absc}}{G_{ab} + G_{abo}} . \quad (L6.3)$$

Relația obținută reprezintă **teorema generatorului echivalent Norton** care se enunță astfel: *tensiunea  $U_{ab}$  la bornele (a), (b) ale unei laturi pasive oarecare a unei rețele liniare active este dată de raportul dintre curentul de scurtcircuit  $I_{absc}$  al laturii respective (cu rezistența scurtcircuitată) și suma dintre conductanța laturii  $G_{ab}$  și conductanța echivalentă  $G_{abo}$  a rețelei pasivizate între bornele (a) și (b) în lipsa laturii.*

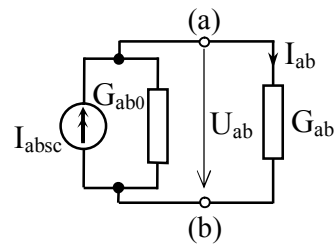


Fig. L6.3.

## 1.2. Teorema suprapunerii efectelor (a superpoziției). Teorema reciprocității.

Considerând o rețea electrică liniară în care acționează mai multe surse de tensiune, *teorema superpoziției* se enunță astfel: *curentul care se stabilește într-o latură oarecare a rețelei este egal cu suma algebrică a curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte dacă ar acționa singură în rețea, celelalte fiind scurtcircuitate sau înlocuite cu rezistența lor interioară (dacă au rezistența interioară diferită de zero).*

Pentru demonstrație se separă laturile  $j$  și  $k$  ale rețelei și se presupune că în rețea acționează câte o singură sursă de tensiune electromotoare, conectată pe rând în laturile  $j$  și  $k$ , așa cum se arată în figura L6.4, a) și b).

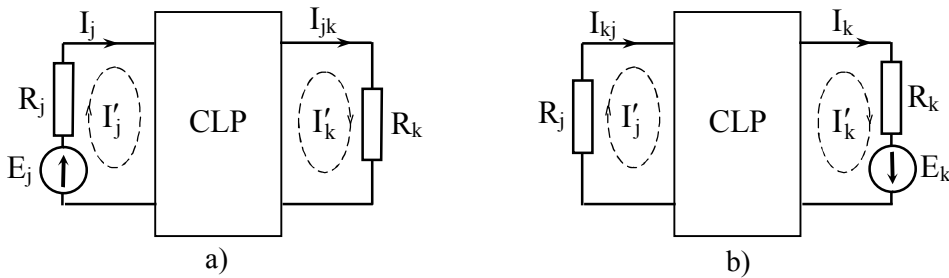


Fig. L6.4.

Se aplică teorema curenților ciclici, alegându-se astfel buclele fundamentale (ochiurile independente) încât curenții reali prin laturile  $j$  și  $k$  să fie dați numai de curenții ciclici ai celor două bucle la care aparțin aceste laturi. Astfel, pentru schema echivalentă din figura L6.4,a) rezultă:

$$\begin{cases} R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 + \dots + R_{1k}I'_k + \dots + R_{10}I'_0 = 0 \\ R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 + \dots + R_{2k}I'_k + \dots + R_{20}I'_0 = 0 \\ \dots \\ R_{j1}I'_1 + R_{j2}I'_2 + \dots + R_{jk}I'_k + \dots + R_{j0}I'_0 = E_j \\ \dots \\ R_{o1}I'_1 + R_{o2}I'_2 + \dots + R_{ok}I'_k + \dots + R_{oo}I'_0 = 0 \end{cases} \quad (L6.4)$$

Rezolvând acest sistem de ecuații după regula lui Cramer, se obține:

$$I_{jk} = I'_k = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} E_j, \quad (L6.5)$$

în care  $\Delta$  este determinantul sistemului (1.4),  $\Delta_{jk}$  este complementul algebric al termenului  $R_{jk}$  luat cu semnul corespunzător,  $\Delta_{jk} = (-1)^{j+k} |\Delta_{jk}|$ .

Aplicând același procedeu pentru schema echivalentă din figura 1.4,b), rezultă:

$$I_{kj} = I'_j = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} E_k. \quad (L6.6)$$

Prin definiție,

$$G_{jk} = \frac{I_{jk}}{E_j} \Big|_{\substack{E_k=0 \\ k \neq j}} = \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \quad (L6.7)$$

este *conductanța de transfer* dintre laturile  $j$  și  $k$  ale rețelei, iar

$$G_{kj} = \left. \frac{I_{kj}}{E_k} \right|_{\substack{E_j=0 \\ j \neq k}} = \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \quad (\text{L6.8})$$

este *conductanța de transfer* dintre laturile  $k$  și  $j$  ale rețelei.

Deoarece rezistențele din sistemele de ecuații corespunzătoare metodei curenților ciclici satisfac condiția de reciprocitate,  $R_{jk} = R_{kj}$ , rezultă că  $\Delta_{jk} = \Delta_{kj}$  și

$$G_{jk} = G_{kj}, \quad (\text{L6.9})$$

relație ce reprezintă prima formă a teoremei reciprocității: *conductanța de transfer dintre laturile  $j$  și  $k$  este egală cu conductanța de transfer dintre laturile  $k$  și  $j$ .*

Dacă aceeași sursă de tensiune este plasată pe rând în laturile  $j$  și  $k$ ,  $E_j = E_k = E$ , rezultă în mod evident

$$I_{jk} = I_{kj}, \quad (\text{L6.10})$$

relație ce reprezintă a doua formă a teoremei reciprocității: *curentul stabilit într-o latură oarecare  $k$  a unei rețele liniare de o sursă de tensiune plasată în latura  $j$  și acționând singură în rețea, este egal cu curentul stabilit în latura  $j$  dacă aceeași sursă de tensiune este plasată în latura  $k$  și acționează singură în rețea.*

Conform teoremei superpoziției, curentul dintr-o latură oarecare a unei rețele active liniare poate fi calculat cu relația

$$I_j = \sum_{k=1}^{l_E} I_{kj} = \sum_{k=1}^{l_E} G_{kj} E_k, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (\text{L6.11})$$

unde  $l$  este numărul de laturi ale rețelei, iar  $l_E$  este numărul laturilor cu surse de t.e.m.

Calculul curenților electrici din laturile unui rețele active liniare folosind conductanțele de transfer dintre laturi se numește *metoda conductanțelor de transfer*.

## II. STUDIUL EXPERIMENTAL

Schema electrică a circuitului propus pentru studiul experimental al teoremelor circuitelor electrice liniare de c.c. este dată în figura L6.5.

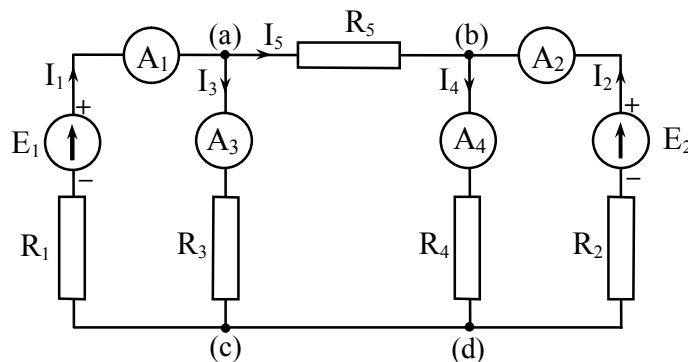


Fig. L6.5.

Se realizează montajul electric și se notează valorile măsurate ale curenților din laturile circuitului:  $I_1, I_2, I_3$  și  $I_4$ . Curentul  $I_5$  se determină prin calcul, aplicând teorema a I-a Kirchoff,  $I_5 = I_1 - I_3$ . Valorile curenților mășurați se iau cu semnul corespunzător



față de sensurile de referință considerate pe schema circuitului. Cu un voltmetru se măsoară tensiunea la bornele rezistorului  $R_5$ , respectiv tensiunea  $U_{ab}$ .

**Teoremele generatoarelor echivalente de tensiune și de curent** se aplică pentru determinarea curentului  $I_5$  și respectiv a tensiunii  $U_{ab}$  la bornele rezistorului  $R_5$ . Se elimină rezistența  $R_5$ , așa cum se arată în figura L6.6,a) și se măsoară, pe rând, cu un voltmetru tensiunea  $U_{ab0}$  și respectiv cu un ampermetru, curentul de scurtcircuit  $I_{absc}$ .

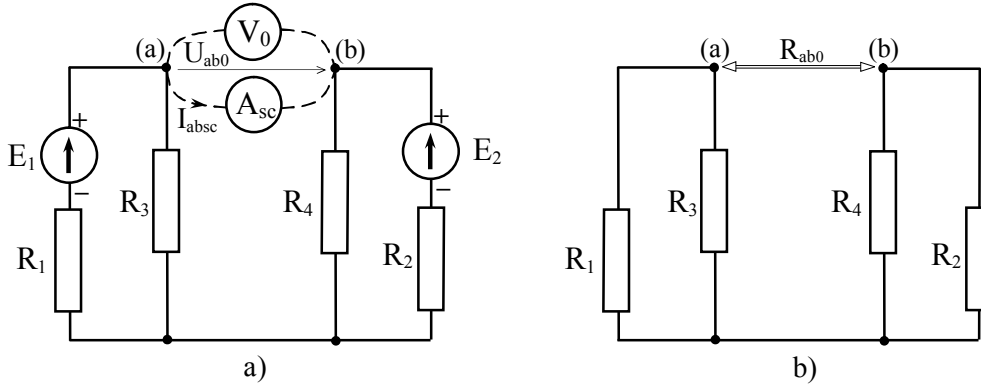


Fig. L6.6.

Păstrând valorile rezistențelor rezistoarelor nemodificate, se elimină sursele de tensiune din circuit ca în fig. L6.6, b) și se determină prin măsurare, fie cu un ohmetru, fie prin metoda voltampermetrică, rezistența echivalentă a rețelei pasivizate  $R_{ab0}$ , în lipsa laturii ab (a rezistenței  $R_5$ ). Se măsoară, de asemenea, rezistențele rezistoarelor după desfacerea legăturilor electrice dintre acestea.

Cu relațiile (L6.2) și respectiv (L6.3), se calculează curentul prin latura 5,  $I_5 = I_{ab}$  și respectiv tensiunea la bornele rezistorului  $R_5$ ,  $U_5 = U_{ab}$ . Datele se trec în tabelul L6.1.

Tabelul L6.1.

	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$I_3$ [A]	$I_4$ [A]	$I_5 (I_{ab})$ [A]	$U_{ab}$ [V]	$R_1$ [Ω]	$R_2$ [Ω]	$R_3$ [Ω]	$R_4$ [Ω]	$R_5$ [Ω]	$U_{ab0}$ [V]	$R_{ab0}$ [Ω]	$I_{absc}$ [A]
<b>Valori măsurate</b>														
<b>Valori calculate</b>														

**Verificarea teoremei reciprocității** se face pentru același montaj cu schema electrică din figura L6.1 în care se măsoară curentul prin latura 2,  $I_{12}$  produs de sursa de tensiune  $E_1$  situată în latura 1 și acționând singură în rețea. Se mută sursa de tensiune  $E_1$  în latura 2, se fixează aceeași tensiune la bornele acesteia ca în cazul anterior și se măsoară curentul produs în latura 1,  $I_{21}$ . Se verifică egalitatea  $I_{12} = I_{21}$ .

**Teorema suprapunerii efectelor sau a superpoziției** se verifică realizând succesiv montajele din figura L6.7, a) și b) în care se păstrează valorile rezistențelor rezistoarelor și a tensiunilor la bornele surselor de tensiune  $E_1$  și  $E_2$  pentru care s-au măsurat curentii din schema completă, dați în tabelul L6.1.

Se măsoară curentii din cele două circuite și valorile acestora se trec în tabelul L6.2. Pe baza valorilor măsurate se determină curentii din rețea cu relațiile:

$$I_1 = I_{11} - I_{21}; I_2 = -I_{12} + I_{22}; I_3 = I_{13} - I_{23}; I_4 = I_{14} + I_{24}; I_5 = I_{15} - I_{25}. \quad (L6.12)$$

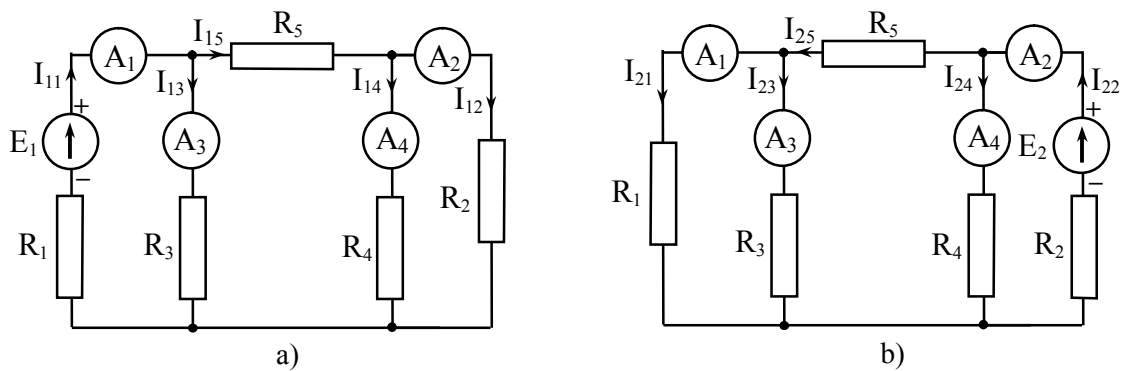


Fig. L6.7.

Tabelul L6.2.

	$I_{11}$ [A]	$I_{12}$ [A]	$I_{13}$ [A]	$I_{14}$ [A]	$I_{15}$ [A]	$I_{21}$ [A]	$I_{22}$ [A]	$I_{23}$ [A]	$I_{24}$ [A]	$I_{25}$ [A]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$I_3$ [A]	$I_4$ [A]	$I_5$ [A]
<b>Valori măsurate</b>															
<b>Valori calculate</b>															

**Conținutul referatului.**

1. Referatul trebuie să conțină tabelele L6.1 și L6.2 completate cu mărimile determinate în două moduri: pe baza măsurătorilor efectuate (“valori măsurate”) și prin calcul (“valori calculate”), cunoscându-se rezistențele rezistoarelor și tensiunile la bornele surselor de alimentare.
2. Toate calculele efectuate se vor prezenta în detaliu în referat.
3. Se vor prezenta concluziile ce se pot trage din analiza comparată a rezultatelor obținute experimental și a celor obținute prin calcul.

## STUDIUL CUADRIPOULUI LINIAR PASIV ALIMENTAT ÎN CURENT CONTINUU

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

Un cuadripol pasiv este o rețea electrică cu patru borne de acces, ale cărei laturi nu conțin surse de energie – generatoare de tensiune sau de curent. Un cuadripol poate fi o rețea neizolată sau o parte dintr-o rețea complexă izolată.

În lucrare se studiază cazul cuadripolului liniar pasiv (alcătuit exclusiv din elemente pasive liniare), având cele patru borne grupate în două porți – *cuadripolul diport*, așa cum se arată în figura L7.1: o poartă de intrare sau primară (1) – (1') și o poartă de ieșire sau secundară (2) – (2'). Cuadripolul funcționează în curent continuu dacă tensiunea de alimentare, adică tensiunea  $U_1$  aplicată la poarta de intrare, este o tensiune continuă.

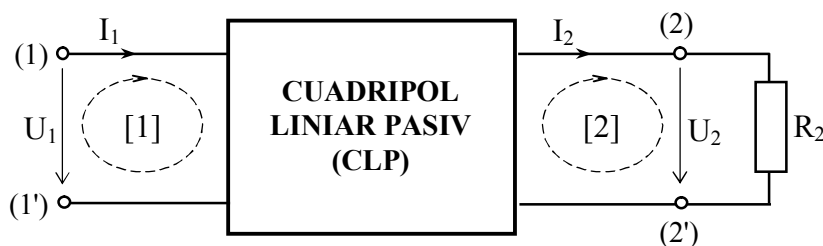


Fig. L7.1.

În figura L7.1 s-au notat cu:

$U_1$  – tensiunea de alimentare sau primară, aplicată la bornele de intrare (1) – (1');

$U_2$  – tensiunea de ieșire sau secundară, la bornele de ieșire (2) – (2');

$I_1$  – curentul de intrare sau primar, absorbit pe la bornele de intrare;

$I_2$  – curentul de ieșire sau secundar, debitat pe la bornele de ieșire;

$R_2$  – rezistorul conectat la bornele secundare (rezistor de sarcină) a cuadripolului

Se observă că dintre cele patru variabile  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  și  $I_2$  ce caracterizează interacțiunea cuadripolului cu exteriorul, numai două sunt independente din punctul de vedere al structurii interioare a cuadripolului. Dacă circuitul din figura L7.1 se rezolvă în raport cu curenții  $I_1$  și  $I_2$ , aplicând metoda curenților ciclici și alegând ochiurile independente astfel încât acești curenți să coincidă cu curenții ciclici ai ochiurilor la care aparțin, respectiv ochiurile [1] și [2], se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1o}I_o = U_1 \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \dots + R_{2o}I_o = -U_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R_{o1}I_1 + R_{o2}I_2 + \dots + R_{oo}I_o = 0 \end{cases} \quad (L7.1)$$

unde  $R_{11}$  este rezistența de intrare, iar  $R_{22}$  rezistența de ieșire a cuadripolului.

Rezolvând sistemul de ecuații (L7.1) în raport cu mărimile de la intrare  $U_1$  și  $I_1$  funcție de mărimile de la ieșire  $U_2$  și  $I_2$ , se obține

$$\begin{cases} U_1 = \left(-\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}}\right) \cdot U_2 \pm \left(\frac{\Delta}{\Delta_{12}}\right) \cdot I_2 \\ I_1 = \left(\frac{-\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}}{\Delta \cdot \Delta_{12}}\right) \cdot U_2 - \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}}\right) \cdot I_2 \end{cases} \quad (L7.2)$$

în care  $\Delta$  este determinantul coeficienților sistemului (L7.1), iar  $\Delta_{jk}$  ( $j, k = 1, 2$ ) sunt minorii coeficienților  $R_{jk}$  corespunzători din  $\Delta$ .

Dacă introducem notațiile

$$-\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = A_{11}, \quad -\frac{\Delta}{\Delta_{12}} = A_{12}, \quad \frac{(-\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21})}{\Delta\Delta_{12}} = A_{21}, \quad -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = A_{22},$$

ecuațiile cuadripolului liniar pasiv alimentat în sens direct se scriu sub forma

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 \end{cases} \quad (L7.3)$$

Aceste ecuații se numesc *ecuațiile fundamentale* sau *de transfer* ale cuadripolului liniar pasiv, iar parametrii  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  și  $A_{22}$  se numesc *parametrii fundamentali* sau *constantele cuadripolului*, depinzând numai de parametrii acestuia. La cuadripolii liniari și pasivi, parametrii fundamentali satisfac următoarea relație

$$\underline{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1} \quad (L7.4)$$

numită *condiția de reciprocitate*.

Din punct de vedere al dimensiunilor, parametrii  $A_{11}$  și  $A_{22}$  sunt adimensionali,  $A_{12}$  este o rezistență,  $A_{21}$  o conductanță. Acești parametri pot fi explicitați din sistemul de ecuații (L7.3) și au următoarea semnificație:

□  $A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$  – raportul de transformare al tensiunilor la funcționarea în gol;

□  $A_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$  – rezistența de transfer la funcționarea în scurtcircuit;

□  $A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}$  – conductanța de transfer la funcționarea în gol;

□  $A_{22} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}$  – raportul de transformare al curenților la funcționarea în scurtcircuit.

## 2. DETERMINAREA CONSTANTELOR CUADRIPOULUI

### 2.1. Încercări experimentale pentru calculul constantelor cuadripolului

Constantele cuadripolului se pot determina experimental folosind încercările la gol și în scurtcircuit ale cuadripolului dat. Aceste încercări se pot efectua atât în conexiune directă, cu alimentare pe la bornele primare (1) – (1'), cât și în conexiunea inversă, cu alimentare pe la bornele secundare (2) – (2').

❶ *Încercarea în gol cu alimentare pe la bornele primare.* Bornele secundare fiind în gol,  $I_2 = 0$ , se notează  $U_1 = U_{10}$ ,  $I_1 = I_{10}$ ,  $U_2 = U_{20}$  și din sistemul (L7.3) rezultă

$$R_{e10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, \quad (L7.5)$$

numită *rezistența echivalentă de intrare la funcționarea în gol.*

❷ *Încercarea la scurtcircuit cu alimentare pe la bornele primare.* Bornele secundare (2) – (2') sunt scurtcircuitate și  $U_2 = 0$ . Se notează  $U_1 = U_{1sc}$ ,  $I_1 = I_{1sc}$ ,  $I_2 = I_{2sc}$  și din sistemul (L7.3) rezultă

$$R_{e1sc} = \frac{U_{1sc}}{I_{1sc}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad (L7.6)$$

numită *rezistența echivalentă de intrare la funcționarea în scurtcircuit.*

❸ *Încercarea în gol cu alimentare pe la bornele secundare.* Se lasă bornele secundare în gol,  $I_1 = 0$ , și se aplică tensiune de la sursa de alimentare la bornele secundare (2) – (2'). Se notează astfel:  $U_1 = U'_{10}$ ,  $U_2 = U'_{20}$  și  $I_2 = I'_{20}$ . Din cea de-a doua ecuație a sistemului (L7.3), pentru  $I_1 = 0$ , rezultă *rezistența echivalentă de intrare*

$$R_{e20} = \frac{U'_{20}}{I'_{20}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}. \quad (L7.7)$$

❹ *Încercarea la scurtcircuit cu alimentare pe la bornele secundare.* Bornele primare se scurtcircuitază, astfel că  $U_1 = 0$  și la bornele secundare se aplică tensiunea  $U_2 = U'_{2sc}$  astfel încât  $I_1 = I'_{1sc} = I_{1n}$ . Rezistența echivalentă de intrare la bornele secundare în acest caz se deduce din prima ecuație din (L7.3) pentru  $U_1 = 0$ . Rezultă astfel:

$$R_{e2sc} = \frac{U'_{2sc}}{I'_{2sc}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (L7.8)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (L7.5), ..., (L7.8), obținute din încercările la gol și în scurtcircuit, la care se adaugă condiția de reciprocitate (L7.4), se obțin următoarele expresii pentru parametrii fundamentali ai cuadripolului liniar pasiv:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{R_{e10}}{\sqrt{R_{e20}(R_{e10} - R_{e1sc})}}; & A_{12} &= \sqrt{\frac{R_{e20}}{(R_{e10} - R_{e1sc})} R_{e1sc}}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{R_{e20}(R_{e10} - R_{e1sc})}}; & A_{22} &= \sqrt{\frac{R_{e20}}{(R_{e10} - R_{e1sc})}}. \end{aligned} \quad (L7.9)$$

## 2.2. Modul de lucru

În laborator încercările se fac cu un cuadripol în "T" realizat cu rezistoare ca în figura L7.2.

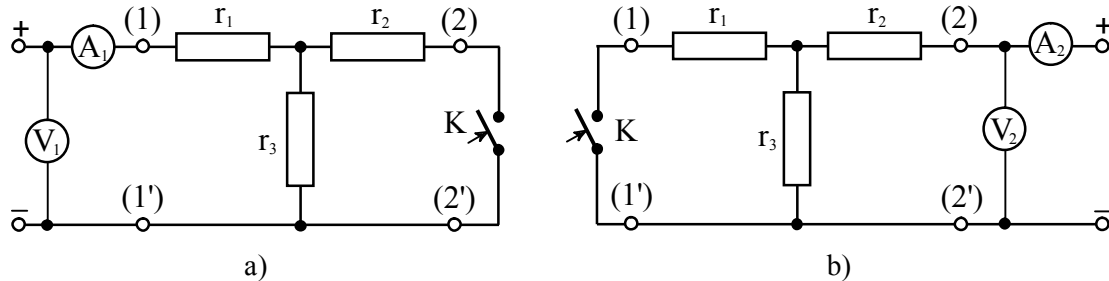


Fig. L7.2. Schemele de montaj pentru încercările cuadripolului la gol și în scurtcircuit:  
a) cu alimentare pe la bornele primare; b) cu alimentare pe la bornele secundare.

1. Se fac pe rând montajele din figura L7.2 care se alimentează de la o sursă reglabilă de tensiune continuă
2. Se fac încercările la gol și la scurtcircuit alimentând cuadripolul întâi pe la bornele primare (1)–(1'), fig. 2,a) și apoi pe la bornele secundare (2)–(2'), fig. L7.2,b).
3. Cu ajutorul voltmetrului și al ampermetrului se citesc:  $U_{10}$ ,  $I_{10}$ ,  $U_{1sc}$ ,  $I_{1sc}$  și respectiv  $U'_{20}$ ,  $I'_{20}$ ,  $U'_{2sc}$ ,  $I_{2sc}$ .
4. Utilizând relațiile (5), ..., (8) se calculează mărimile  $R_{e10}$ ,  $R_{e1sc}$ ,  $R_{e20}$  și  $R_{e2sc}$  și apoi cu relațiile (L7.9) se calculează parametrii fundamentali ai cuadripolului.
5. Se măsoară cu un ohmetru valorile rezistențelor  $r_1$ ,  $r_2$  și  $r_3$ . Având relațiile

$$A_{11} = 1 + \left(\frac{r_1}{r_3}\right), \quad A_{12} = r_1 + r_2 + r_1 \left(\frac{r_2}{r_3}\right), \quad A_{21} = \frac{1}{r_3}, \quad A_{22} = 1 + \left(\frac{r_2}{r_3}\right) \quad (L7.10)$$

se verifică și în acest mod valorile parametrilor fundamentali determinați anterior.

## 3. STUDIUL REGIMULUI DE ÎNCĂRCARE A CUADRIPOULUI LINIAR PASIV ÎN C.C.

### 3.1. Determinarea regimului de funcționare în sarcină a cuadripolului liniar pe baza principiului suprapunerii efectelor.

Dacă privim ecuațiile cuadripolului (L7.3), vom observa că valorile tensiunii  $U_1$  și ale curentul  $I_1$  sunt proporționale cu valorile tensiunii  $U_2$  și respectiv curentului  $I_2$ . Dacă regimul normal de încărcare a unui cuadripol este caracterizat de tensiunea  $U_2$  și curentul de sarcină  $I_2$ , se pune problema să obținem acest regim prin suprapunerea a două regimuri de funcționare, diferite de cel normal și anume: un regim de funcționare la gol și unul la scurtcircuit.

La încercarea în gol se alimentează cu tensiune variabilă pe la bornele (1)–(1') și se determină valoarea tensiunii  $U_{10}$  și curentul  $I_{10}$  pentru care  $U_{20} = U_2 = U_{R2}$ ,  $I_2 = 0$ . În acest caz ecuațiile (L7.3) ale cuadripolului devin:

$$\begin{cases} U_{10} = A_{11}U_2 \\ I_{10} = A_{21}U_2 \end{cases} \quad (L7.11)$$

În mod similar se efectuează încercarea la scurtcircuit și se determină valoarea tensiunii  $U_{1sc}$  și curentul  $I_{1sc}$  pentru care  $I_{2sc} = I_2 = I_{R2}$ ,  $U_2 = 0$ . În acest caz ecuațiile (L7.3) ale cuadripolului devin:

$$\begin{cases} U_{1sc} = A_{12}I_2 \\ I_{1sc} = A_{22}I_2 \end{cases} \quad (L7.12)$$

Din relațiile (L7.11) și (L7.12) se obține regimul nominal de funcționare al cuadripolului caracterizat de ecuațiile obținute prin suprapunerea efectelor:

$$\begin{cases} U_1 = U_{10} + U_{1sc} \\ I_1 = I_{10} + I_{1sc} \end{cases} \quad (L7.13)$$

Se observă că regimul de funcționare normală, în sarcină, a cuadripolului poate fi obținut prin suprapunerea a două regimuri limită de funcționare: unul de mers în gol și altul de scurtcircuit. În practică este foarte important acest lucru, deoarece o mare parte din circuitele proiectate pentru alimentarea consumatorilor (rețele, transformatoare) nu pot fi încărcate la sarcina nominală, ci se încearcă la gol și la scurtcircuit, urmând ca aplicarea suprapunerii efectelor să ducă la concluziile ce caracterizează regimul normal de lucru.

### 3.2. Modul de lucru

Se execută montajul pentru încercarea în sarcină a cuadripolului din figura L7.3.

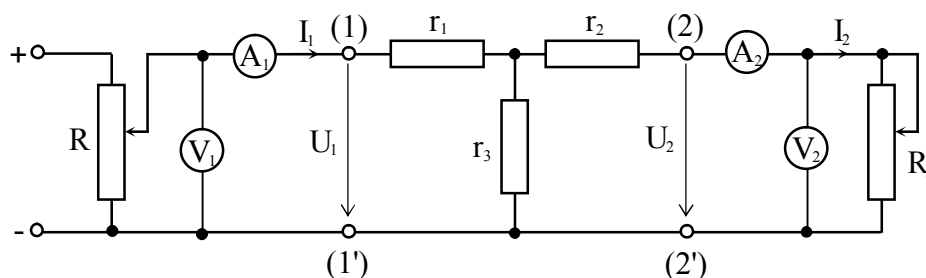


Fig. L7.3. Schema de montaj pentru încercarea în sarcină a cuadripolului

Cu rezistorul de sarcină  $R_2$  conectat la ieșire, se alimentează cuadripolul cu tensiune reglabilă prin intermediul rezistorului  $R$  în montaj potențiomtric.

- 1) Se stabilește un regim normal de lucru pentru o anumită valoare a rezistenței rezistorului de sarcină  $R_2$  și se notează valorile mărimilor  $U_1$ ,  $I_1$ ,  $U_2$  și  $I_2$  indicate de aparatele de măsură.
- 2) Se fac apoi încercările la gol și la scurtcircuit, alimentând cu tensiune crescătoare pe la bornele (1) – (1') până când se obține  $U_{20} = U_2$  și respectiv  $I_{2sc} = I_2$ . Se notează pentru fiecare încercare în parte valorile  $U_{10}$ ,  $I_{10}$  și respectiv  $U_{1sc}$ ,  $I_{1sc}$  indicate de aparatele de măsură.
- 3) Se verifică pentru câteva regimuri de încărcare dacă se îndeplinesc relațiile

$$U_1 = U_{10} + U_{1sc} \text{ și } I_1 = I_{10} + I_{1sc},$$

adică se verifică principiul suprapunerii efectelor.

## STUDIUL CIRCUITELOR NELINIARE DE CURENT CONTINUU

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

#### 1.1. Rezistoare neliniare

Un circuit este neliniar dacă conține cel puțin un element de circuit (rezistor) neliniar. Prin *caracteristica tensiune – curent* sau *volt – amper* (V – A) a unui element de circuit (rezistor, sursă, etc.) se înțelege dependența dintre tensiunea  $u$  la borne și intensitatea curentului  $i$  care-l străbate,  $u = u(i)$ . Caracteristicile tensiune – curent pot fi liniare (fig. L8.1,a) sau neliniare (fig. L8.1,b), după cum elementele de circuit respective satisfac sau nu legea lui Ohm. Corespunzător, și elementele de circuit se împart în liniare și neliniare.

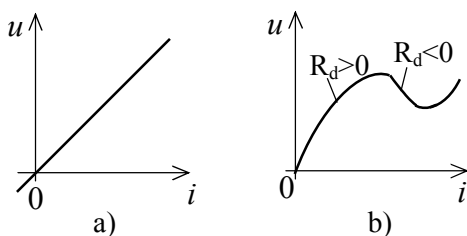


Fig. L8.1.

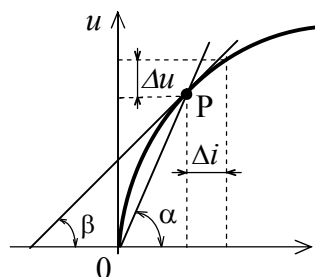


Fig. L8.2.

Pe baza caracteristicii tensiune – curent, pentru elementele de circuit neliniare (rezistoare) se definesc, pentru fiecare punct de funcționare, o rezistență statică și una dinamică (fig. L8.2):

– rezistența statică

$$R_{st} = R = \frac{u}{i} = k_s \operatorname{tg} \alpha, \quad (\text{L8.1})$$

– rezistența dinamică (diferențială)

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = k_s \operatorname{tg} \beta \quad (\text{L8.2})$$

care este proporțională cu panta tangentei. S-a notat cu  $k_s = \frac{S_u (\text{V/mm})}{S_i (\text{A/mm})}$  raportul scărilor grafice pentru  $u$  și  $i$ .



Atât rezistența statică  $R_{st}$ , cât și cea dinamică  $R_d$ , depind de poziția punctului de funcționare  $P$  de pe caracteristică, respectiv de valorile tensiunii și ale curentului. Spre deosebire de rezistența statică care este totdeauna pozitivă, rezistența dinamică poate fi pozitivă (porțiunile ascendente ale caracteristicii), sau negativă (porțiunile descendente ale caracteristicii, fig. L8.1,b).

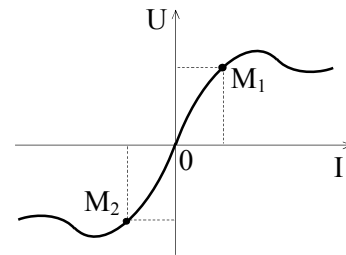


Fig. L8.3.

Caracteristicile tensiune – curent ridicate prin puncte în curent continuu se numesc *caracteristici statice*, spre deosebire de cele *dinamice* ridicate pentru regimuri variabile.

Deoarece rezistența elementelor de circuit neliniare depinde de valorile tensiunii aplicate sau curentului ce le străbat, pentru rezolvarea circuitelor neliniare de c.c. este necesar să se cunoască caracteristicile tensiune–curent ale elementelor ce intervin.

În practică se întâlnesc un număr mare de elemente de circuit neliniare cu caracteristici tensiune–curent dintre cele mai variate. La unele dintre acestea neliniaritatea se datorează influenței temperaturii dezvoltate la trecerea curentului asupra rezistivității electrice (de exemplu, lămpile cu incandescență). Există și dispozitive la care neliniaritatea caracteristicilor se datorează unor procese fizice specifice care au loc (de exemplu: arcul electric, diferite dispozitive electronice semiconductoare, etc.).

Din punctul de vedere al formei curbei caracteristice rezistoarele sunt simetrice și nesimetrice. *Rezistoarele simetrice* au curba caracteristică simetrică în raport cu originea și se numesc *reciproce* sau *bilaterale*. Funcționarea lor în rețea este independentă de modul de conectare a bornelor, iar puterile în două puncte de funcționare simetrice în raport cu originea ( $M_1$  și  $M_2$ , fig. L8.3) rezultă egale.

Din punctul de vedere al mărimii care stabilește univoc poziția punctului de funcționare pe curba caracteristică, rezistoarele se clasifică în *rezistoare cu control de tensiune* și *rezistoare cu control de curent*.

La *rezistorul cu control de tensiune* (fig. L8.4,a), fiecărei valori a tensiunii îi corespunde o valoare a intensității curentului, ecuația caracteristică fiind de forma:  $i = i(u)$ . La *rezistorul cu control de curent* (fig. L8.4,b), fiecărei valori a intensității curentului îi corespunde o valoare a tensiunii și ecuația caracteristică este  $u = u(i)$ .

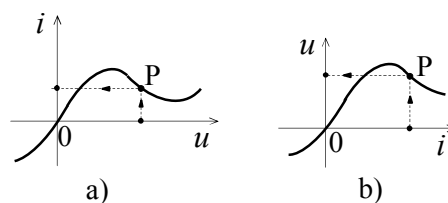


Fig. L8.4.

### Exemple de rezistoare neliniare.

a) *Lămpile cu incandescență* – rezistoare neliniare, simetrice; neliniaritatea caracteristicii se datorește faptului că rezistența filamentului se modifică odată cu modificarea temperaturii determinată de curentul care trece prin filament. Lampa cu filament metalic (caracteristica 1, fig. L8.5) are coeficientul de temperatură pozitiv, iar lampa cu filament de cărbune care are coeficientul de temperatură negativ (caracteristica 2, fig. L8.5).

b) *Termistorul* – rezistor neliniar, simetric, constituit din oxizi metalici de Mn, Ni, Co, Fe, Zn, etc. Se utilizează în construcția stabilizatoarelor de tensiune. La unele termistoare caracteristica prezintă o zonă pentru care rezistența dinamică este negativă (fig. L8.6). Au rezistența variabilă cu temperatura de forma :

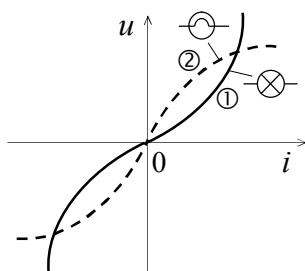


Fig. L8.5.

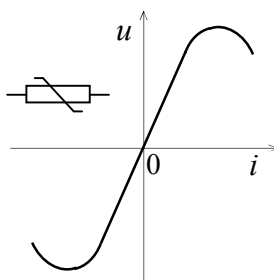


Fig. L8.6.

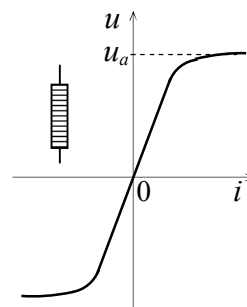


Fig. L8.7.

$$R = R_1 \cdot e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)} \quad (\text{L8.3})$$

în care  $R$  și  $R_1$  sunt rezistențele la temperaturile  $T$  și  $T_1$ , iar  $B$  este un indice de sensibilitate termică.

c) *Varistorul* (rezistorul cu tirit sau vilit) – rezistor neliniar, simetric, cu control de tensiune (fig. L8.7). Se obține prin presarea la temperaturi înalte a unui amestec de carbură de siliciu și grafit. Tiritul este o carbură de siliciu a cărei rezistență scade la creșterea tensiunii peste o valoare critică notată cu  $u_a$  în figura L8.7. Rezistoarele cu tirit se folosesc în construcția descărcătoarelor pentru protecția contra supratensiunilor în stațiile electrice de înaltă tensiune.

## 1.2. Metode de calcul a circuitelor neliniare de curent continuu

Analiza circuitelor electrice neliniare este mai dificilă decât cea a circuitelor liniare, întrucât funcționarea circuitului este descrisă de ecuații neliniare și nu se mai poate utiliza nici una dintre metodele sau teoremele care se bazează pe principiul suprapunerii efectelor.

La rezolvarea circuitelor electrice neliniare se aplică în principal metode analitice, de iterație (numerice) și grafice.

*Metoda analitică* constă în rezolvarea ecuațiilor obținute pe baza teoremelor lui Kirchhoff în care se introduc caracteristicile tensiune – curent ale elementelor neliniare aproximative prin funcții. Se obține un sistem de ecuații neliniare a caror rezolvare nu este simplă.

*Metoda aproximațiilor succesive* este în general laborioasă și se aplică pentru circuite cu un număr relativ mic de elemente neliniare. Într-o formă simplificată se pleacă de la ecuațiile lui Kirchhoff și se stabilesc expresiile mărimilor care interesează (curenți, tensiuni) și în care intervin rezistențele statice, încă necunoscute. Se aproximează inițial valorile acestor rezistențe și apoi se corectează prin calcule succesive, până se obțin valori care verifică soluțiile deduse din ecuațiile rețelei și, bineînțeles, caracteristicile elementelor de circuit neliniare respective. Aceste caracteristici pot fi date sub formă de curbe sau analitic.

O situație mai particulară se referă la cazul în care regimul de funcționare al rețelei corespunde unui domeniu limitat din caracteristica tensiune – curent a elementelor neliniare, iar în acest domeniu neliniaritatea este relativ mică. În astfel de situații se poate aplica metoda liniarizării care constă în aproximarea caracteristicii din

jurul punctului de funcționare P prin tangenta la curbă (fig. L8.8,a). Ecuația acestei tangente este:

$$U - U_0 = R_d I, \quad (\text{L8.4})$$

unde  $U_0$  este ordonata la originea a tangentei, iar  $R_d$  este panta tangentei, adică rezistența dinamică în punctul P.

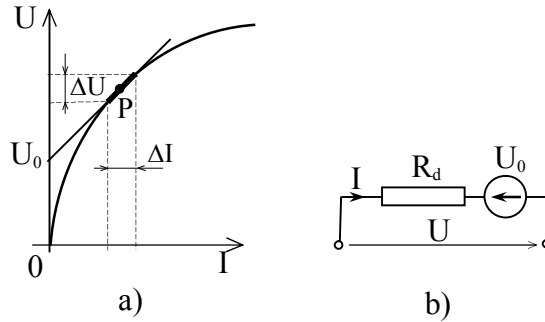


Fig. L8.8.

Din ecuația (L8.4) rezultă că elementul de circuit neliniar, pentru punctul P de funcționare, se poate înlocui printr-o latură activă echivalentă (fig. L8.8,b), având tensiunea electromotoare  $U_0$  și rezistența interioară  $R_d$ . Pe baza acestei metode rețeaua neliniară se înlocuiește deci printr-o rețea echivalentă liniară, care se rezolvă mai ușor. Prin rezolvarea ecuațiilor pentru aceasta se obține curenții din rețeaua dată, neliniară. Dacă aceste valori nu corespund punctelor de funcționare admise, calculul se repetă cu valori corectate pentru  $U_0$  și  $R_d$ , până ce se obține o concordanță corespunzătoare.

O metodă foarte răspândită este **metoda grafică**. Se aplică pentru rețele cu elemente componente conectate în serie, în derivație și în general în conectare mixtă. Metoda constă în determinarea pe cale grafică, din aproape în aproape, cu ajutorul caracteristicilor tensiune – curent ale elementelor componente, a caracteristicilor tensiune – curent pentru scheme echivalente ale unor grupări parțiale din rețea, până ce se ajunge la caracteristica schemei echivalente dipolare globale din care se pot determina apoi tensiunile și curenții. Se exemplifică metoda prin câteva cazuri simple.

a) *Elemente neliniare conectate în serie*. Cele două rezistoare neliniare conectate în serie, figura L8.9,a), au caracteristicile  $U_1(I)$  și  $U_2(I)$ . La conectarea în serie curentul este același, iar între tensiuni relația este evidentă

$$U(I) = U_1(I) + U_2(I). \quad (\text{L8.5})$$

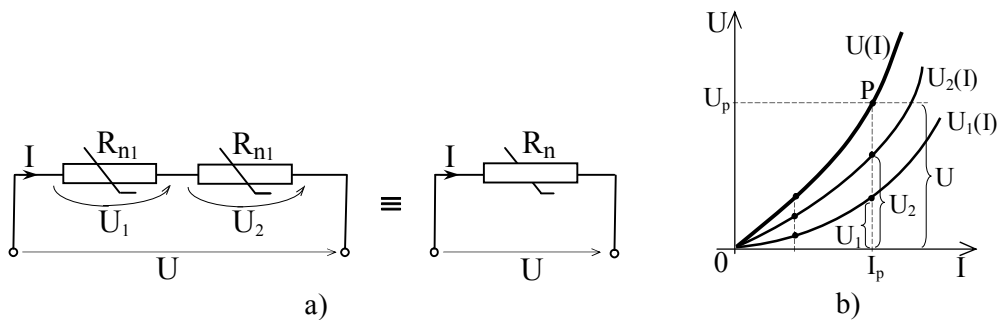


Fig. L8.9.

Elementele conectate în serie pot fi înlocuite printr-un dipol echivalent, având caracteristica  $U(I)$  ce se obține în mod simplu, punct cu punct, adunând ordonatele caracteristicilor tensiune – curent ale elementelor componente pentru diferite valori ale curentului, figura L8.9,b).

Din caracteristica  $U(I)$  se poate determina curentul prin circuit pentru o tensiune aplicată la borne, respectiv pentru un punct de funcționare  $P$  oarecare ( $U_p \rightarrow I_p$ ).

b) *Elemente neliniare conectate în paralel.* La conectarea în paralel tensiunea la borne este aceeași,  $U_1(I) = U_2(I) = U(I)$ , figura L8.10,a).

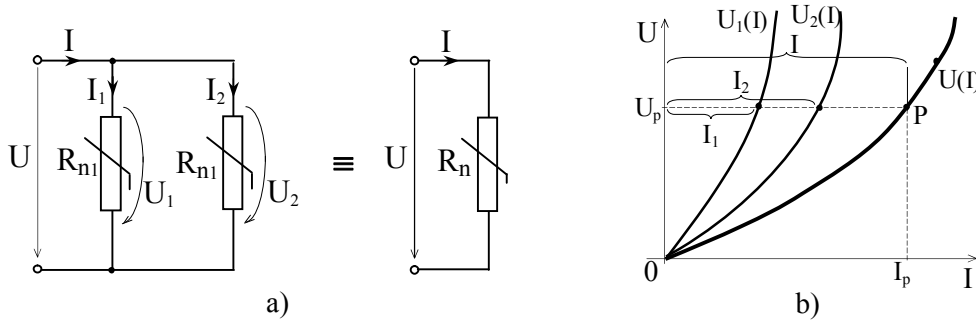


Fig. L8.10.

Curenții satisfac relația

$$I(U) = I_1(U) + I_2(U). \quad (L8.6)$$

Caracteristica  $U(I)$  pentru dipolul echivalent se obține însumând punct cu punct, pe cale grafică, curenții  $I_1$  și  $I_2$  care corespund la diferite tensiuni la borne ca în figura L8.10,b).

c) *Elemente neliniare în conexiune mixtă.*

În cazul unei conectări mixte, caracteristica dipolului echivalent se determină din aproape în aproape, ținând seama de grupările parțiale ce intervin. Pentru exemplul prezentat în fig. L8.11, se determină mai întâi caracteristica  $U_1(I) \equiv U_2(I)$  a celor două elemente conectate în paralel și apoi se determină caracteristica  $U(I)$  a întregului circuit pe baza relațiilor:

$$I = I_1 + I_2, \quad U_1 \equiv U_2, \quad U(I) = U_1(I) + U_n(I). \quad (L8.7)$$

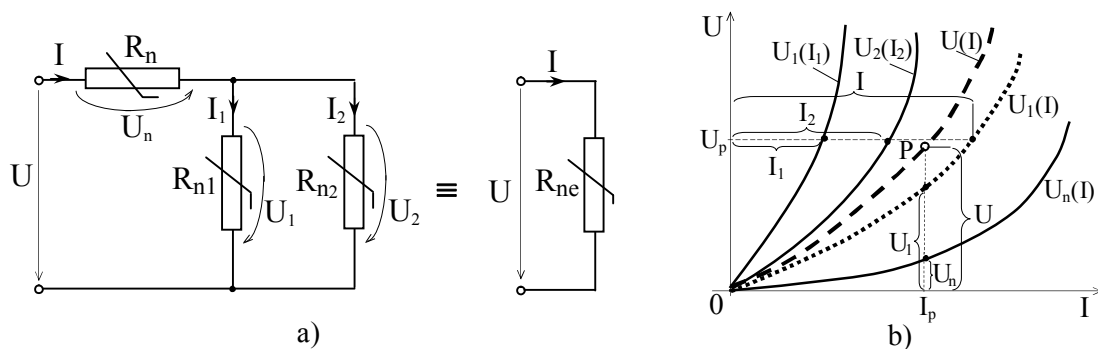


Fig. L8.11.

## 2. PARTEA EXPERIMENTALĂ

### 2.L8. Schema electrică a montajului experimental

La partea experimentală a lucrării se vor determina caracteristicile unor rezistoare neliniare cum sunt lămpile cu incandescență și respectiv, a unui circuit de curent continuu care conține astfel de elemente neliniare.

Schema electrică globală a montajului utilizat pentru studiul experimental se prezintă în figura L8.12.

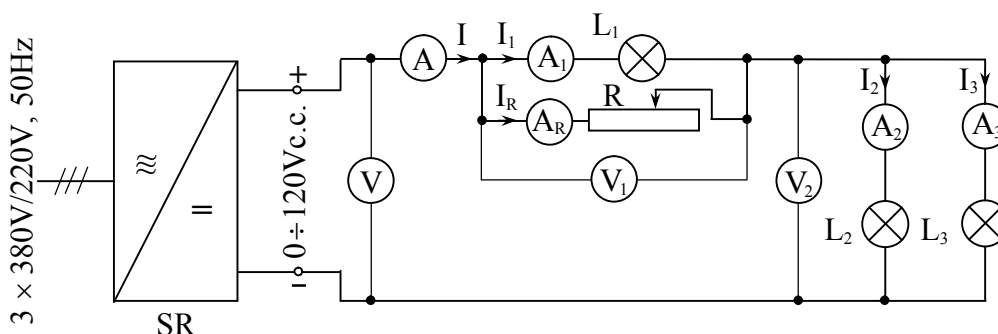


Fig. L8.12.

Circuitul se alimentează de la o sursă de tensiune continuă reglabilă SR (redresor trifazat comandat) și conține ca elemente neliniare lămpile cu incandescență cu filament metalic cu următoarele caracteristici:

$$L_1 = 24V, 75W; L_2 = 24V, 40W; L_3 = 24V, 60W.$$

### 2.2. Modul de lucru

1) Se determină experimental caracteristica statică a unei lămpi cu filament metalic. Pentru aceasta se realizează montajul numai cu lampa  $L_1$  în circuit și cu aparatele de măsură A și V pentru măsurarea curentului și respectiv tensiunii. Se reglează tensiunea continuă de alimentare din 2 în 2 volți, între 0 ÷ 24V și se citesc valorile curentului care se trec în tabelul L8.1. Se calculează, pentru fiecare punct de funcționare, rezistențele statică și dinamică cu relațiile (L8.1) și (L8.2) în care  $\Delta U$  și  $\Delta I$  sunt diferențele a două valori succesive ale tensiunii, respectiv curentului.

Tabelul L8.1.

U [V]	0 2 4 6 ..... 24
I [A]	
$R_{st} = U/I$ [ $\Omega$ ]	
$R_d = \Delta U/\Delta I$ [ $\Omega$ ]	

2) Se realizează întregul montaj conform schemei electrice din figura 2.1, în care R este un reostat de 30 $\Omega$ , 5A, considerat rezistor liniar. Se alimentează circuitul și se reglează valoarea rezistenței reostatului R astfel încât tensiunile indicate de voltmetrele

$V_1$  și  $V_2$  să fie aproximativ egale pentru orice valoare a acestora cuprinsă între  $0 \div 24V$ . Se reglează tensiunea de alimentare  $U$  și se citesc valorile tensiunilor și curenților indicate de aparate pentru valori ale tensiunilor  $U_1$  și  $U_2$  din 2 în 2 volți, între  $0 \div 24V$ . Datele se trec în tabelul L8.2.

Tabelul L8.2.

U [V]	
I [A]	
$U_1$ [V]	0 2 4 6 ..... 24
$U_2$ [V]	
$I_R$ [A]	
$I_1$ [A]	
$I_2$ [A]	
$I_3$ [A]	

### 2.3. Prelucrarea și interpretarea rezultatelor

- 1) Pe baza valorilor din tabelul 1 se trasează grafic caracteristicile  $U(I)$ ,  $R_{st}(I)$  și  $R_d(I)$  pentru lampa cu incandescență cu filament metalic.
- 2) Se reprezintă pe același grafic caracteristicile  $U(I)$ ,  $U_1(I_1)$ ,  $U_1(I_R)$ ,  $U_2(I_2)$ ,  $U_2(I_3)$  pe baza valorilor din tabelul L8.2. Se construiesc pe același grafic, prin compunere grafică, următoarele caracteristici:
  - a)  $U_1(I)$  prin compunerea caracteristicilor  $U_1(I_1)$  și  $U_1(I_R)$ ;
  - b)  $U_2(I)$  prin compunerea caracteristicilor  $U_2(I_2)$  și  $U_2(I_3)$ ;
  - c)  $U(I)$  prin compunerea caracteristicilor  $U_1(I)$  și  $U_2(I)$ .
- 3) Se analizează rezultatele obținute și se prezintă concluziile desprinse în urma studiului experimental efectuat.

## CIRCUITE LINIARE MONOFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

#### 1.1. Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale

În analiza circuitelor electrice liniare în regim permanent sinusoidal se utilizează reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Dacă toate mărimile ce intervin au aceeași pulsație (frecvență) se poate utiliza *reprezentarea în complex simplificat*.

Prin reprezentarea în complex simplificat se asociază unei mărimi sinusoidale de forma  $y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma)$ , un vector fix în planul complex (+1, +j), numit *fazor complex simplificat*, al cărui modul este egal cu valoarea efectivă Y și care formează cu axa reală un unghi egal cu faza inițială  $\gamma$  a mărimii sinusoidale (fig. L9.1),

$$y(t) = \sqrt{2}Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \underline{Y} = Y e^{j\gamma}. \quad (\text{L9.1})$$

Trecerea de la imaginea în complex  $\underline{Y}$  a mărimii sinusoidale la funcția original  $y(t)$  (funcția de timp), se realizează cu transformarea inversă pe baza relației:

$$y(t) = \text{Im} \{ \sqrt{2} e^{j\omega t} \cdot \underline{Y} \}. \quad (\text{L9.2})$$

Prin această reprezentare, mărimile sinusoidale de timp, de aceeași frecvență (tensiuni, curenți, etc.), se reprezintă ca fazori fiși în planul complex (independenți de timp), având modulul egal cu valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și argumentul dat de faza inițială. Astfel, imaginile în complex simplificat ale tensiunii și curentului la bornele unui circuit dipolar în regim permanent sinusoidal sunt:

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\alpha}$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j\beta}$$

Acești fazori sunt reprezentați în figura L9.2, în care s-a notat cu  $\varphi = \alpha - \beta$  unghiul de defazaj dintre tensiune și curent (unghiul de defazaj al circuitului).

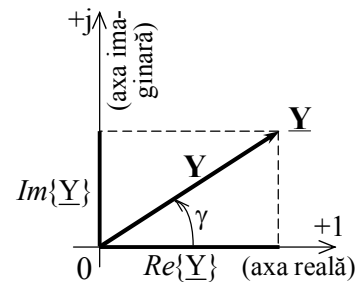


Fig. L9.1.

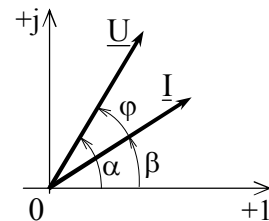


Fig. L9.2.

Raportul dintre imaginile în complex ale tensiunii și curentului la bornele unui circuit dipolar reprezintă *impedanța complexă* a circuitului

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi}, \quad (\text{L9.3})$$

iar mărimea inversă este *admitanța complexă*

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{Ie^{j\beta}}{Ue^{j\alpha}} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi} = \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (\text{L9.4})$$

Se poate verifica ușor următoarea corespondență între operațiile cu mărimi sinusoidale și operațiile cu imaginile lor în complex:

– înmulțirii cu un scalar real  $\lambda$  a mărimii sinusoidale îi corespunde multiplicarea cu  $\lambda$  a modulului fazorului complex

$$\lambda y = \sqrt{2} \lambda Y \sin(\omega t + \gamma) \Leftrightarrow \lambda \underline{Y} = \lambda Y e^{j\gamma}; \quad (\text{L9.5})$$

– sumării a două mărimi sinusoidale de aceeași frecvență îi corespunde sumarea geometrică a fazorilor corespunzători

$$y_1(t) + y_2(t) \Leftrightarrow \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2; \quad (\text{L9.6})$$

– derivării în raport cu timpul a mărimii sinusoidale îi corespunde multiplicarea cu  $j\omega$  a imaginii în complex, respectiv multiplicarea cu  $\omega$  a modulului și rotirea cu  $\pi/2$  în sens trigonometric a fazorului complex

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2} \omega \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \omega Y e^{j(\gamma + \frac{\pi}{2})} = j\omega \underline{Y}; \quad (\text{L9.7})$$

– integrării în timp a mărimii sinusoidale îi corespunde împărțirea cu  $j\omega$  a imaginii în complex, respectiv împărțirea cu  $\omega$  a modulului și rotirea cu  $-\pi/2$  (în sens invers trigonometric) a fazorului complex:

$$\int y dt = \frac{\sqrt{2} Y}{\omega} \sin(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{Y}{\omega} e^{j(\gamma - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{j\omega} \underline{Y}. \quad (\text{L9.8})$$

Prin utilizarea reprezentării în complex, mărimile sinusoidale de aceeași frecvență dintr-un circuit se reprezintă printr-o *diagramă fazorială*, pe baza căreia analiza circuitului se simplifică mult față de cazul analizei prin metoda directă.

## 1.2. Circuitul liniar RLC serie în regim permanent sinusoidal

Circuitul cu elemente liniare ideale – rezistor, bobină și condensator – conectate în serie (fig. L9.3,a) sub tensiune sinusoidală la borne

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\varphi}, \quad (\text{L9.9})$$

va fi parcurs de un curent sinusoidal de aceeași frecvență

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{j0}, \quad (\text{L9.10})$$

considerat origine de fază (faza inițială nulă).



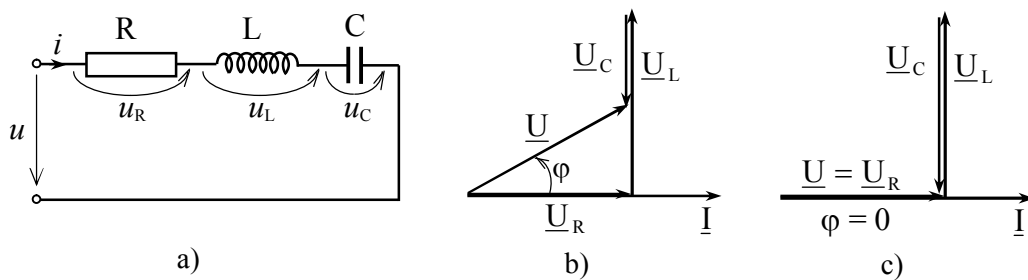


Fig. L9.3.

Valoarea efectivă  $I$  a curentului și unghiul de defazăj  $\varphi$  dintre tensiunea și curentul la bornele circuitului se determină utilizând reprezentarea în complex.

Ecuția de tensiuni a circuitului este

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt \quad (L9.11)$$

și având în vedere corespondența operațiilor, în complex se scrie:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}. \quad (L9.12)$$

Diagrama fazorială a tensiunilor (fig. L9.3,b) se construiește luând ca referință (origine de fază) un fazor arbitrar pentru curent  $\underline{I}$  în raport cu care se trasează succesiv fazorul tensiunii pe rezistor  $\underline{U}_R = R\underline{I}$  în fază (coliniar) cu curentul, fazorul tensiunii la bornele bobinei  $\underline{U}_L = j\omega L\underline{I}$ , defazat înaintea curentului cu  $\frac{\pi}{2}$  și fazorul tensiunii la bornele condensatorului  $\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$ , defazat în urma curentului (în sens invers trigonometric) cu  $-\frac{\pi}{2}$ .

Din diagrama fazorială prezentată în figura L9.3,b) și din ecuația circuitului (L9.12), rezultă:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + (\underline{U}_L - \underline{U}_C) = \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (L9.13)$$

unde

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX \quad (L9.14)$$

este impedanța complexă a circuitului RLC serie, cu partea reală rezistența  $R$  și partea imaginară reactanța echivalentă  $X = X_L - X_C$ ,  $X_L = \omega L$  fiind reactanța inductivă și  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  reactanța capacitivă.

Valoarea efectivă a curentului  $I$  și unghiul de defazăj  $\varphi$  al tensiunii față de curent rezultă:

$$I = |\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (L9.15)$$

Un regim particular de funcționare a circuitului este *regimul de rezonanță* care apare în situația în care reactanța echivalentă se anulează, adică când reactanța inductivă  $X_L$  este egală cu reactanța capacitivă  $X_C$ , la o pulsație  $\omega_0$ , respectiv frecvență  $f_0$ , numite *de rezonanță*:

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{LC}; f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (L9.16)$$

Din aceste relații se constată că fenomenul de rezonanță se poate obține la variația uneia dintre mărimile  $L$ ,  $C$  sau  $f$ .

La rezonanță se constată că tensiunile pe bobină și pe condensator sunt egale în valoare efectivă (în modul), dar în opoziție de fază, astfel că se anulează reciproc, iar tensiunea la bornele circuitului este egală cu tensiunea pe rezistor, fiind în fază cu curentul,  $\varphi = 0$ . Impedanța circuitului are valoarea minimă,  $Z_0 = R$  și curentul are valoarea maximă  $I_0 = I_{\max} = U/R$ .

Din diagrama fazorială pentru rezonanță, figura L6,3.c), rezultă că tensiunile pe bobină și pe condensator, egale, pot avea valori oricât de mari, uneori mai mari decât tensiunea  $U$  aplicată la bornele circuitului (pot apare supratensiuni), de unde și denumirea de *rezonanță de tensiuni* pentru rezonanța circuitului serie.

Se definește *factorul de calitate* al circuitului ca fiind raportul dintre valorile efective a tensiunii pe bobină sau pe condensator și a tensiunii la bornele circuitului la rezonanță:

$$Q_s = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (L9.17)$$

### 1.3. Circuitul liniar RLC paralel în regim permanent sinusoidal

Se consideră circuitul cu elemente liniare ideale – rezistor, bobină și condensator – conectate în paralel (fig. L9.4,a) sub tensiune sinusoidală la borne

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin \omega t \Leftrightarrow \underline{U} = U e^{j\omega t}, \quad (L9.18)$$

considerată origine de fază. Curentul la bornele circuitului este de forma:

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \varphi) \Leftrightarrow \underline{I} = I e^{-j\varphi}, \quad (L9.19)$$

Ecuția de curenți în mărimi instantanee este

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}. \quad (L9.20)$$

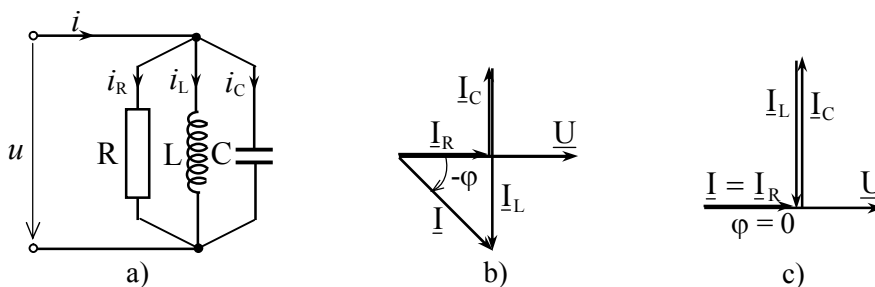


Fig. L9.4.

În complex ecuația circuitului se scrie

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = G\underline{U} + \frac{1}{j\omega L}\underline{U} + j\omega C\underline{U}, \quad (\text{L9.21})$$

în care:  $\underline{I}_R = G\underline{U}$  este curentul prin rezistor, în fază cu tensiunea,  $G = 1/R$  fiind conductanța rezistorului,  $\underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}$  este curentul prin bobină, defazat în urma tensiunii cu  $-\pi/2$  (în sens invers trigonometric),  $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$  este curentul condensatorului defazat înaintea tensiunii cu  $\pi/2$ .

Dacă ecuația (L9.21) se scrie sub forma

$$\underline{I} = G\underline{U} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\underline{U} = \underline{Y}\underline{U}, \quad (\text{L9.22})$$

se pune în evidență admitanța complexă a circuitului RLC paralel,

$$\underline{Y} = G + jB, \quad (\text{L9.23})$$

având partea reală egală cu conductanța  $G$  și partea imaginară egală cu susceptanța echivalentă a circuitului,  $B = B_C - B_L$ ,  $B_C = \omega C$  – susceptanța capacitivă,  $B_L = \frac{1}{\omega L}$  – susceptanța inductivă.

Din ecuația (L9.22) și din diagrama fazorială a curenților prezentată în figura L9.4,b), se determină valoarea efectivă  $I$  a curentului și unghiul de defazaj  $\varphi$  al curentului față de tensiune:

$$I = |\underline{I}| = |\underline{Y}| \cdot |\underline{U}| = \sqrt{G^2 + B^2} \cdot U; \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\omega C - 1/\omega L}{G}. \quad (\text{L9.24})$$

Fenomenul de rezonanță se produce la anularea susceptanței echivalente a circuitului, adică atunci când susceptanța capacitivă  $B_C$  este egală cu susceptanța inductivă  $B_L$ , la o pulsație  $\omega_0$ , respectiv frecvență  $f_0$  de rezonanță, astfel:

$$B_C = B_L \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{LC}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{L9.25})$$

Și în acest caz, ca și la circuitul RLC serie, rezonanța se poate obține la modificarea uneia dintre mărimile  $L$ ,  $C$  sau  $f$ . La rezonanța circuitului RLC paralel, curenții prin bobină și prin condensator au valori efective egale, dar sunt în opoziție de fază, admitanța echivalentă a circuitului are valoarea minimă, egală cu conductanța rezistorului,  $Y = G$ , astfel încât curentul luat de circuit pe la borne are valoarea maximă, egală cu curentul prin rezistor:  $I = I_{\max} = I_R = GU$ .

Din diagrama fazorială pentru regimul de rezonanță prezentată în figura L9.4,c), rezultă că, la rezonanță, curenții prin bobină și condensator pot avea valori oricât de mari, în anumite condiții mai mari decât curentul luat de circuit pe la borne, de unde și denumirea de *rezonanță de curenți* pentru rezonanța circuitului RLC paralel.

*Factorul de calitate al circuitului* se definește, în acest caz, ca raportul dintre valoarea efectivă a curentului prin bobină sau prin condensator și valoarea efectivă a curentului absorbit de circuit pe la borne, la rezonanță:

$$Q_p = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{L9.26})$$

## 2. PARTEA EXPERIMENTALĂ

### 2.1. Circuitul RLC serie

Se realizează montajul din figura 5.

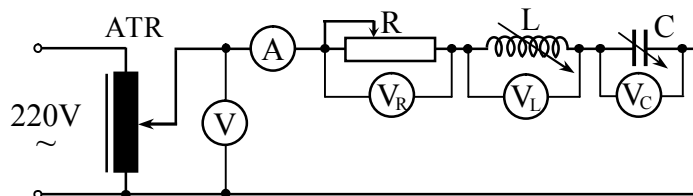


Fig. L9.5.

Pentru diferite valori ale tensiunii aplicate circuitului de la autotransformatorul reglabil ATR și pentru diferite valori ale rezistenței R a reostatului, inductivității L a bobinei și capacității C a condensatorului se iau datele care se trec în tabelul L9.1.

Se calculează valorile indicate în tabel și se construiesc diagrame fazoriale la scară pentru două sau trei cazuri, dintre care unul pentru rezonanță. Se compară valorile obținute grafic cu cele determinate prin calcul, explicând eventualele neconcordanțe.

Tabelul L9.1.

Nr. crt.	U [V]	I [A]	U <sub>R</sub> [V]	U <sub>L</sub> [V]	U <sub>C</sub> [V]	Z = U/I [Ω]	R = U <sub>R</sub> /I [Ω]	X <sub>L</sub> = U <sub>L</sub> /I [Ω]	X <sub>C</sub> = U <sub>C</sub> /I [Ω]	φ = arctg(X/R)
1.										
2.										
3.										
⋮										

### 2.2. Circuitul RLC paralel

Se realizează montajul din figura L9.6. Pentru diferite valori ale curentului obținut prin reglarea autotransformatorului la care se înscriază rezistorul R<sub>i</sub> de valoare mare și pentru diferite valori ale parametrilor R, L și C, se iau datele cu care se completează tabelul L9.2.

Se calculează valorile indicate în tabel și se construiesc, la scară, diagrame fazoriale pentru două sau trei cazuri, dintre care unul pentru rezonanță.

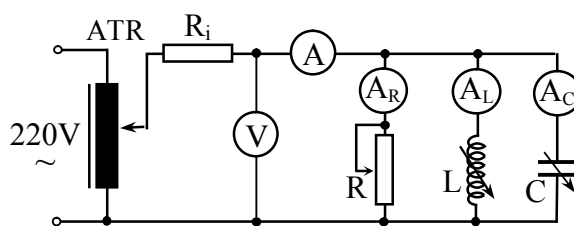


Fig. L9.6.

Tabelul L9.2.

Nr. crt.	U [V]	I [A]	I <sub>R</sub> [A]	I <sub>L</sub> [A]	I <sub>C</sub> [A]	Y = I/U [S]	G = I <sub>R</sub> /U [S]	B <sub>L</sub> = I <sub>L</sub> /U [S]	B <sub>C</sub> = I <sub>C</sub> /U [S]	φ = arctg(B/G)
1.										
2.										
3.										

Se consemnează în referat concluziile deduse din studiul fenomenelor de rezonanță la circuitele liniare de tip RLC serie și paralel.

## ANALIZA REȚELELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERMENENT SINUSOIDAL

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Analiza rețelelor electrice liniare în regim permanent sinusoidal se poate efectua cu oricare dintre metodele utilizate pentru rețelele electrice liniare de curent continuu. În regim permanent sinusoidal în circuitele liniare, toți curenții și tensiunile sunt mărimi sinusoidale și pentru simplificarea calculelor analiza se efectuează în complex. De obicei se dau valorile complexe ale tensiunilor sau curenților surselor de tensiune, respectiv de curent și parametrii complecși ai elementelor de circuit (impedanțe sau admitanțe complexe) și analiza constă în determinarea tensiunilor sau curenților din rețeaua complexă.

În această lucrare se studiază două dintre metodele de determinare a curenților dintr-o rețea electrică liniară în r.p.s.: metoda bazată pe aplicarea teoremelor lui Kirchhoff și metoda bazată pe teorema curenților ciclici.

#### 1.1. Analiza în complex a rețelelor electrice cu teoremele lui Kirchhoff

Se consideră o rețea electrică liniară și invariabilă în timp, conexă și plană cu  $l$  laturi și  $n$  noduri. Forma în complex a sistemului complet de ordinul  $l$  al ecuațiilor corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff, conținând  $n' = n - 1$  ecuații de noduri pentru curenții din laturi și  $o = l - n + 1$  ecuații de ochiuri pentru tensiunile la bornele laturilor, se obține înlocuind valorile instantanee ale curenților  $i_j$  și tensiunilor  $u_j$ , sinusoidali în timp și de aceeași frecvență, cu imaginile lor în complex  $\underline{I}_j$  și respectiv  $\underline{U}_j$ . Astfel, ecuațiile în complex corespunzătoare teoremelor a I-a și respectiv a II-a Kirchhoff în forma topologică se scriu:

$$\sum_{j \in (k)} \underline{I}_j = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (\text{L10.1})$$

$$\sum_{j \in [m]} \underline{U}_j = 0; \quad m = 1, 2, \dots, l - n + 1, \quad (\text{L10.2})$$

unde cu  $(k)$  și respectiv cu  $[m]$  s-au notat nodurile, respectiv ochiurile independente sau fundamentale ale rețelei.

Analiza în complex a rețelelor electrice cu teoremele lui Kirchhoff se poate face, fie în raport cu curenții – înlocuind în ecuațiile (L10.2) tensiunile complexe  $\underline{U}_j$  în funcție de curenții complecși  $\underline{I}_j$ , fie în raport cu tensiunile – înlocuind în ecuațiile (L10.1)

curenții  $I_j$  în funcție de tensiunile complexe  $\underline{U}_j$ . În continuare se prezintă metoda de analiză în raport cu curenții.

Se considera rețeaua cu  $l$  laturi din care  $l_E$  sunt laturi cu generatoare ideale de tensiune,  $l_J$  laturi cu generatoare ideale de curent,  $l - l_E - l_J$  fiind laturi cu elemente pasive. Se numerotează întâi laturile cu elemente pasive, apoi laturile cu generatoare ideale de tensiune  $l_E$  și la urmă laturile cu generatoare ideale de curent  $l_J$ .

În cazul general (fig. L10.1), pentru nodurile (k) ale rețelei, ecuațiile corespunzătoare teoremei a I-a Kirchhoff în raport cu curenții se scriu:

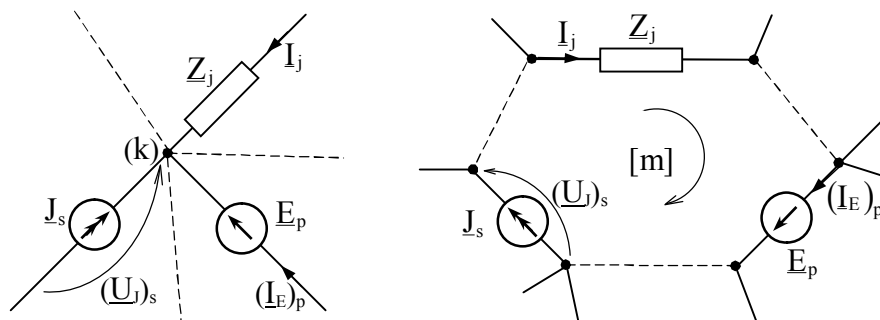


Fig. L10.1.

$$\sum_{j \in (k)} I_j + \sum_{p \in (k)} (I_E)_p = - \sum_{s \in (k)} J_s; \quad k = 1, 2, \dots, n' = n - 1 \quad (L10.3)$$

Dacă rețeaua nu are cuplaje magnetice, pentru ochiurile independente  $[m]$  ale rețelei, ecuațiile corespunzătoare teoremei a II-a Kirchhoff în raport cu curenții se scriu:

$$\sum_{j \in [m]} \left( R_j + j\omega L_j + \frac{1}{j\omega C_j} \right) I_j + \sum_{s \in [m]} (U_J)_s = \sum_{p \in [m]} E_p, \quad m = 1, 2, \dots, o$$

sau,

$$\sum_{j \in [m]} Z_j I_j + \sum_{s \in [m]} (U_J)_s = \sum_{p \in [m]} E_p, \quad m = 1, 2, \dots, o \quad (L10.4)$$

unde  $Z_j = R_j + j\omega L_j + \frac{1}{j\omega C_j}$  este impedanța proprie a unei laturi complete.

Dacă rețeaua are cuplaje magnetice, adică are bobine cuplate magnetic, ecuațiile de ochiuri se scriu:

$$\sum_{j \in [m]} \left( R_j I_j + j\omega L_j I_j + \frac{1}{j\omega C_j} I_j + j\omega \sum_{k \neq j} L_{kj} I_k \right) + \sum_{s \in [m]} (U_J)_s = \sum_{p \in [m]} E_p,$$

sau

$$\sum_{j \in [m]} \left( Z_j I_j + \sum_{k \neq j} Z_{kj} I_k \right) + \sum_{s \in [m]} (U_J)_s = \sum_{p \in [m]} E_p, \quad m = 1, 2, \dots, o \quad (L10.5)$$

unde cu  $Z_{kj} = Z_{jk} = j\omega L_{jk}$  s-a notat impedanța complexă mutuală sau de cuplaj magnetic dintre bobinele  $j$  și  $k$ .

Termenii care conțin inductivitățile mutuale  $L_{kj}$  se iau cu semnul plus sau minus în funcție de coincidența sau opoziția sensurilor curenților din laturile  $j$  și  $k$ , atât față de

sensul ochiului, cât și față de bornele polarizate. Orice necoincidență conduce la o schimbare de semn.

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (L10.3) și (L10.4) sau (L10.5), se obțin necunoscutele, curenții laturilor  $\underline{I}_j$  și tensiunile  $(\underline{U}_j)_s$  la bornele generatoarelor de curent.

În forma matriceală, sistemul de ecuații în complex corespunzător teoremelor lui Kirchhoff se scrie în mod similar ca în cazul rețelelor de curent continuu. Astfel, dacă se numerează întâi laturile cu elemente pasive, apoi cele cu generatoare ideale de tensiune și în final cele cu generatoare ideale de curent, pentru teorema a I-a Kirchhoff, în forma matriceală ecuațiile (L10.3) se scriu:

$$[\underline{A}]_{n',l-l_j} \cdot [\underline{I}]_{l-l_j} = -[\underline{J}]_{n'} \quad (\text{L10.6})$$

în care  $[\underline{A}]_{n',l-l_j}$  este matricea de incidență redusă laturi-noduri cu  $n' = n - 1$  linii și  $l - l_j$  coloane (corespunzătoare laturilor fără generatoare de curent),  $[\underline{I}]_{l-l_j}$  este matricea coloană cu  $l - l_j$  termeni, reprezentând curenții din laturile rețelei, iar matricea  $[\underline{J}]_{n'}$  se calculează cu relația

$$[\underline{J}]_{n'} = [\underline{A}]_{n',l_j} \cdot [\underline{J}]_{l_j} \quad (\text{L10.7})$$

$[\underline{J}]_{l_j}$  fiind matricea coloană a curenților generatoarelor de curent.

În cazul general, al unei rețele cu cuplaje magnetice, ecuațiile (L10.5) corespunzătoare teoremei a II-a Kirchhoff, în forma matriceală se scriu:

$$[\underline{Z}]'_{o,l-l_j} \cdot [\underline{I}]_{l-l_j} + [\underline{B}]_{o,l_j} [\underline{U}_j]_{l_j} = -[\underline{E}]'_o \quad (\text{L10.8})$$

în care intervin matricele:

$$[\underline{Z}]'_{o,l-l_j} = [\underline{B}]_{o,l-l_j} [\underline{Z}]_{l-l_j}, \quad (\text{L10.10})$$

unde,  $[\underline{B}]_{o,l-l_j}$  este matricea de incidență redusă laturi-ochiuri cu  $o$  linii și primele  $l-l_j$  coloane, iar matricea  $[\underline{Z}]_{l-l_j}$  este matricea pătrată de ordinul  $l-l_j$  a impedanțelor complexe, având pe diagonală impedanțele proprii ale laturilor și înafara diagonalei impedanțele complexe mutuale dintre laturile rețelei:

$$[\underline{Z}]_{l-l_j} = \begin{bmatrix} Z_1 & j\omega L_{12} & \dots & j\omega L_{1j} & \dots & j\omega L_{1,l-l_j} \\ j\omega L_{21} & Z_2 & \dots & j\omega L_{2j} & \dots & j\omega L_{2,l-l_j} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ j\omega L_{kl} & j\omega L_{2k} & \dots & j\omega L_{kj} & \dots & j\omega L_{k,l-l_j} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ j\omega L_{l-l_j,1} & j\omega L_{l-l_j,2} & \dots & j\omega L_{l-l_j,j} & \dots & Z_{l-l_j} \end{bmatrix}; \quad (\text{L10.11})$$

$[\underline{U}_j]_{l_j}$  este matricea coloană cu  $l_j$  termeni a tensiunilor la bornele generatoarelor ideale de curent, iar matricea din membrul drept este dată de relația

$$[\underline{E}]'_o = [\underline{B}]_{o,l-l_j} \cdot [\underline{E}]_{l-l_j} \quad (\text{L10.12})$$

în care  $[\underline{E}]_{l-l_j}$  este matricea coloană a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor din laturile rețelei.

În formă compactă, sistemul complet de ecuații în complex al rețelei corespunzător teoremelor lui Kirchhoff se scrie:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{n',l-l_j} & [\mathbf{0}]_{n',l_j} \\ [\mathbf{Z}']_{o,l-l_j} & [\mathbf{B}]_{o,l_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\mathbf{I}]_{l-l_j} \\ [\mathbf{U}_j]_{l_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{J}]_{n'} \\ [\mathbf{E}]_o \end{bmatrix} \quad (\text{L10.13})$$

sau,

$$[\mathbf{K}_i] \cdot [\mathbf{N}] = [\mathbf{S}] \quad (\text{L10.14})$$

unde s-a notat cu  $[\mathbf{K}_i]$  matricea Kirchhoff în raport cu curenții, cu  $[\mathbf{N}]$  matricea necunoscutelor și cu  $[\mathbf{S}]$  matricea surselor. Semnificația acestor matrice este evidentă. Prin rezolvarea ecuației (L10.14) se obține:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{K}_i]^{-1} [\mathbf{S}] \quad (\text{L10.15})$$

## 1.2. Analiza în complex a rețelelor electrice prin metoda curenților ciclici

Sistemul de  $o = l - n + 1$  ecuații corespunzător teoremei curenților ciclici se scrie în complex sub forma:

$$\begin{cases} Z'_{11} I_1 + Z'_{12} I_2 + \dots + Z'_{1j} I_j + \dots + Z'_{1o} I_o = E_{[1]} \\ Z'_{21} I_1 + Z'_{22} I_2 + \dots + Z'_{2j} I_j + \dots + Z'_{2o} I_o = E_{[2]} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Z'_{m1} I_1 + Z'_{m2} I_2 + \dots + Z'_{mj} I_j + \dots + Z'_{mo} I_o = E_{[m]} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Z'_{o1} I_1 + Z'_{o2} I_2 + \dots + Z'_{oj} I_j + \dots + Z'_{oo} I_o = E_{[o]} \end{cases} \quad (\text{L10.16})$$

Impedanțele de pe diagonală sunt de forma:

$$Z'_{mm} = \sum_{j \in [m]} Z_j + \sum_{j,k \in [m]} Z_{jk}, \quad (\text{L10.17})$$

în care intră suma impedanțelor proprii  $Z_j$  ale laturilor ochiului [m] și suma algebrică a impedanțelor de cuplaj magnetic  $Z_{jk}$  dintre laturile ochiului [m].

În sumele din (L10.17), impedanțele proprii  $Z_j$  se iau cu semnul "+", iar impedanțele mutuale  $Z_{jk}$  se iau cu semnul "+" în următoarele situații:

- a) sensurile de referință ale laturilor j și k (ale curenților  $I_j$  și  $I_k$ ) sunt la fel față de bornele polarizate și ambele coincid sau ambele sunt opuse sensului ochiului (al curentului ciclic  $I_m$ , fig. L10.2,a);
- b) sensurile de referință ale laturilor j și k sunt diferite față de bornele polarizate și sensul uneia din laturi coincide și al celeilalte este opus sensului ochiului (fig. L10.2,b).

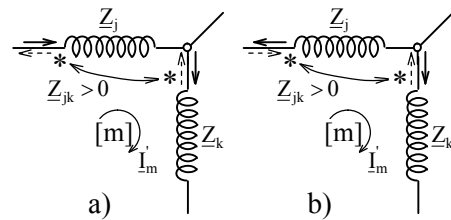


Fig. L10.2.

În celelalte situații, impedanțele mutuale  $Z_{jk}$  se iau cu semnul "-".

Impedanțele din afara diagonalei sunt de forma:

$$Z'_{mj} = \sum_{\substack{k \in [m] \\ k \in [j]}} Z_k + \sum_{\substack{p \in [m] \\ q \in [j]}} Z_{pq} \quad (\text{L10.18})$$



în care intră suma algebrică a impedanțelor proprii  $Z_k$  ale laturilor comune ochiurilor [m] și [j] și suma algebrică a impedanțelor de cuplaj magnetic  $Z_{pq}$  dintre o latură p aparținând ochiului [m] și o latură q aparținând ochiului [j].

Impedanțele  $Z_k$  se iau cu semnul "+" sau "-" după cum curenții ciclici ai celor două ochiuri au același sens, respectiv sens opus, prin latura comună ochiurilor.

Impedanțele mutuale  $Z_{pq}$  se iau cu semnul "+" în următoarele situații:

- sensurile de referință ale laturilor p și q sunt la fel față de bornele polarizate și ambele coincid, sau ambele sunt opuse sensurilor ochiurilor la care aparțin laturile (fig. L10.3,a);
- sensurile de referință ale laturilor p și q sunt diferite față de bornele polarizate și sensul uneia din laturi coincide și al celeilalte este opus sensului ochiului la care aparține latura (fig. L10.3,b).

În celelalte situații, impedanțele mutuale  $Z_{pq}$  se iau cu semnul "-".

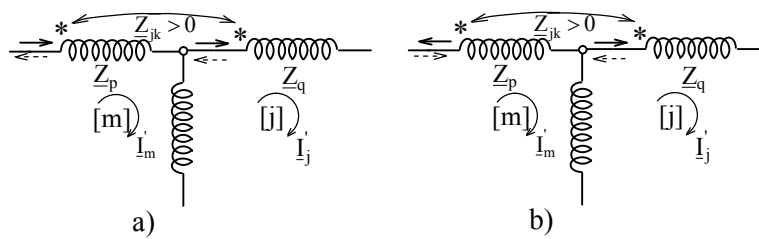


Fig. L10.3.

În membrul drept al sistemului de ecuații (L10.16), termenii notați  $E_{[m]}$  reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor din laturile ochiului [m],

$$E_{[m]} = \sum_{j \in [m]} E_j \quad (L10.19)$$

Sumarea este algebrică, tensiunile electromotoare  $E_j$  luându-se cu semnul "+" sau "-" după cum sensul lor coincide sau este opus sensului ochiului.

Pentru aplicarea metodei curenților ciclici se impune transformarea în prealabil a generatoarelor de curent în generatoare echivalente de tensiune (dacă este posibil).

În *forma matriceală*, metoda curenților ciclici se scrie în mod similar ca pentru rețelele de curent continuu. Astfel, sistemul de ecuații (L10.16) se scrie:

$$[Z']_{o,o} \cdot [I']_o = [E']_o \quad (L10.20)$$

în care  $[I']_o$  este matricea coloană cu o termeni a curenților ciclici din ochiurile fundamentale ale rețelei. Matricea pătrată de ordinul o a impedanțelor,  $[Z']_{o,o}$ , se determină cu relația:

$$[Z']_{o,o} = [B]_{o,l} \cdot [Z]_{l,l} \cdot [B]_{o,l}' \quad (L10.21)$$

în care matricea  $[Z]_{l,l}$  este matricea pătrată și simetrică de ordinul l a impedanțelor complexe proprii și mutuale, având pe diagonală impedanțele proprii ale laturilor și înafara diagonalei impedanțele complexe mutuale dintre laturile rețelei.

Matricea coloană cu o termeni din membrul drept a ecuației (3.20) se determină cu aceeași relație ca în cazul teoremelor lui Kirchhoff,

$$[E']_o = [B]_{o,l} \cdot [E]_l \quad (L10.22)$$

Curenții reali din laturile rețelei se determină cu relația

$$[I]_l = [B]_{o,l}' \cdot [I']_o = [B]_{o,l}' \cdot [Z']_{o,o}^{-1} \cdot [E']_o \quad (L10.23)$$

## 2. MODUL DE LUCRU

În cadrul lucrării de laborator se determină curenții dintr-o rețea electrică liniară funcționând în regim permanent sinusoidal prin două metode: metoda bazată pe aplicarea teoremelor lui Kirchhoff și metoda curenților ciclici.

### 2.1. Schema electrică a rețelei

Schema electrică a rețelei în complex este prezentată în figura L10.4.

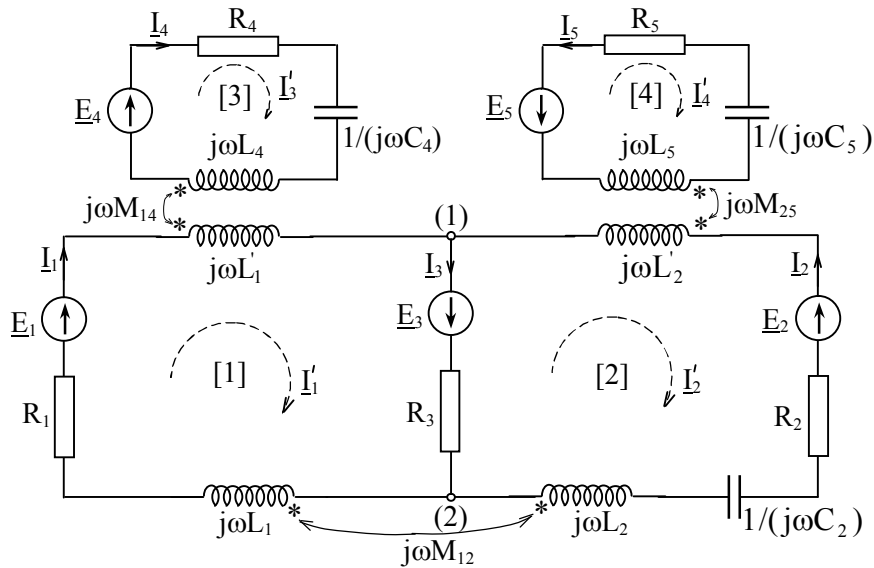


Fig. L10.4.

Se dau valorile complexe ale t.e.m. ale surselor de tensiune, rezistențele rezistoarelor, reactanțele proprii și de cuplaj magnetic ale bobinelor și reactanțele condensatoarelor:

$$\underline{E}_1 = 100\text{V}, \quad \underline{E}_2 = j \cdot 100\text{V}, \quad \underline{E}_3 = (50 + j \cdot 45)\text{V}, \quad \underline{E}_4 = (30 + j \cdot 25)\text{V}, \quad \underline{E}_5 = (45 + j \cdot 10)\text{V};$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega, \quad R_4 = R_5 = 10\Omega;$$

$$\omega L_1 = \omega L'_1 = \omega L_2 = \omega L'_2 = \omega L_3 = \omega L_4 = \omega L_5 = 10\Omega; \quad \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{\omega C_4} = \frac{1}{\omega C_5} = 5\Omega.$$

### 2.2. Calculul curenților din laturile rețelei

#### ❶ Metoda directă.

Se scriu sistemele de ecuații în complex pentru determinarea curenților utilizând teoremele lui Kirchhoff și apoi metoda curenților ciclici, respectând notațiile și sensurile stabilite pe schema rețelei din figura L10.4. Rezolvarea sistemelor de ecuații pentru determinarea curenților complecși poate fi efectuată ușor pe calculator utilizând un program de calcul matematic așa cum sunt, de exemplu, programele *MATCAD* sau *MATLAB*. Se determină în final valorile efective ale curenților din laturile rețelei.

## 2 Metoda matricială.

Programul de calcul se simplifică mult dacă se scriu în forma matricială ecuațiile rețelei. Se introduc în program datele și apoi se construiesc matricele prezentate mai jos.

*Matricea de incidență redusă laturi-noduri* [A] are o singură linie, corespunzătoare unuia din cele două noduri și cinci coloane corespunzătoare laturilor rețelei. De exemplu, luând în considerare nodul (1) avem:

$$A = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

*Matricea de incidență redusă laturi-ochiuri* [B], are 4 linii și 5 coloane:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Matricea impedanțelor complexe proprii și mutuale* este:

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 + j\omega L'_1 & j\omega M_{12} & 0 & -j\omega M_{14} & 0 \\ j\omega M_{12} & R_1 + j\omega L_1 + j\omega L'_1 + 1/(j\omega C_2) & 0 & 0 & -j\omega M_{25} \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ -j\omega M_{14} & 0 & 0 & R_4 + j\omega L_4 + 1/(j\omega C_4) & 0 \\ 0 & -j\omega M_{25} & 0 & 0 & R_4 + j\omega L_4 + 1/(j\omega C_4) \end{bmatrix}$$

Matricea t.e.m. din laturile rețelei (transpusa) este:

$$E' = [\underline{E}_1 \quad \underline{E}_2 \quad \underline{E}_3 \quad \underline{E}_4 \quad \underline{E}_5].$$

Odată introduse aceste date, ecuațiile matriceale pentru determinarea curenților se scriu ușor. De exemplu, în MATLAB relațiile de calcul sunt:

% Teoremele lui Kirchhoff

$Zk = B' * Z;$   $Eprim = B * E;$   $K = [A; Zk];$   $S = [0; Eprim];$   $Ik = inv(Zk) * S$   
% Ik – curenții calculați cu teoremele lui Kirchhoff.

% Metoda curenților ciclici

$Zc = B * Z * B';$   $Iprim = inv(Zc) * Eprim;$   $Ic = B' * Iprim$   
% Ic – curenții calculați prin metoda curenților ciclici.

Evident, curenții calculați prin orice metodă trebuie să aibă aceleași valori.

Rezultatele obținute vor fi verificate și prin modelarea și simularea schemei rețelei electrice pe calculator.

Referatul la lucrare trebuie să conțină ecuațiile scrise direct prin aplicarea celor două metode. Se atașează listingul programului realizat pentru calculul curenților cu rezultatele obținute.

## STUDIUL CUADRIPOLULUI LINIAR PASIV ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

Cuadripolul este o rețea electrică complexă cu patru borne de legătură cu exteriorul. Dacă legăturile exterioare se fac la perechi de borne, numite porți, în așa fel încât curentul care intră prin una din bornele unei porți să iasă prin a doua bornă, cuadripolul se numește *cuadripol diport* (fig. L11.1).



Fig. L11.1.

Interacțiunea cuadripolului diport cu exteriorul în regim permanent sinusoidal, este complet caracterizată de patru variabile: tensiunea de intrare sau primară  $\underline{U}_1$ , curentul de intrare sau primar  $\underline{I}_1$ , tensiunea de ieșire sau secundară  $\underline{U}_2$  și curentul de ieșire sau secundar  $\underline{I}_2$ .

Dacă se consideră cuadripolul liniar pasiv (constituit exclusiv din elemente pasive liniare: rezistoare, bobine și condensatoare) în regim permanent sinusoidal, cu bornele de intrare (1) – (1') și bornele de ieșire (2) – (2'), o demonstrație similară ca în cazul cuadripolului liniar pasiv în curent continuu, arată că mărimile de intrare  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{I}_1$  pot fi exprimate în funcție de mărimile de ieșire  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}_2$  prin ecuații liniare și omogene de forma:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 \end{cases} \quad (\text{L11.1})$$

Ecuațiile (L11.1) reprezintă *prima formă fundamentală a ecuațiilor cuadripolilor liniari pasivi*, în care coeficienții  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$  și  $\underline{A}_{22}$  sunt mărimi complexe și se numesc *parametri fundamentali* sau *parametrii de transfer* ai cuadripolului.

La o frecvență invariabilă a tensiunii de alimentare, parametrii cuadripolului sunt constante și din acest motiv se mai numesc și *constantele cuadripolului*.

Parametrii  $\underline{A}_{11}$  și  $\underline{A}_{22}$  sunt adimensionali,  $\underline{A}_{12}$  este o impedanță și  $\underline{A}_{21}$  este o admitanță cu următoarele interpretări:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} && \text{– raportul de transformare al tensiunilor la funcționarea în gol;} \\ \underline{A}_{12} &= \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_1=0} && \text{– impedanța de transfer la funcționarea în scurtcircuit;} \\ \underline{A}_{21} &= \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_1=0} && \text{– admitanța de transfer la funcționarea în gol;} \\ \underline{A}_{212} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_1=0} && \text{– raportul de transformare al curenților la funcționarea în scurtcircuit.} \end{aligned}$$

Între parametrii fundamentali ai cuadripolului liniar pasiv există relația

$$\boxed{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1} \quad (\text{L11.2})$$

numită *condiția de reciprocitate* și cuadripolul se numește *reciproc* deoarece, cu această condiție, teorema reciprocității din studiul rețelelor electrice liniare este verificată în raport cu oricare pereche de laturi ale cuadripolului conectate la bornele de acces sau, altfel spus, conectând la bornele de intrare generatorul de t.e.m.  $\underline{E}$ , curentul  $\underline{I}_{2sc}$  care se obține scurtcircuitând bornele de ieșire este egal cu curentul  $\underline{I}'_{1sc}$  care se stabilește conectând la ieșire același generator  $\underline{E}$  și scurtcircuitând bornele de intrare.

A doua formă fundamentală a ecuațiilor cuadripolilor exprimă mărimile de la ieșire  $\underline{U}_2$  și  $\underline{I}_2$  în funcție de cele de la intrare  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$ . Astfel, pentru cuadripolul reciproc, din sistemul de ecuații (L11.1) se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_{22} \underline{U}_1 - \underline{A}_{12} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 = -\underline{A}_{21} \underline{U}_1 + \underline{A}_{11} \underline{I}_1 \end{cases} \quad (\text{L11.3})$$

În cazul alimentării inverse a cuadripolului, pe la bornele (2) – (2'), în ecuațiile (L11.3) se schimbă sensul de referință al curenților,  $\underline{I}'_1 = -\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$  și a doua formă fundamentală a ecuațiilor este

$$\begin{cases} \underline{U}'_2 = \underline{A}_{22} \underline{U}'_1 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \underline{U}'_1 + \underline{A}_{11} \underline{I}'_1 \end{cases} \quad (\text{L11.4})$$

Explicitând tensiunile  $\underline{U}_1$  și  $\underline{U}_2$  din ecuațiile fundamentale (L11.1) în raport cu curenții  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$ , se obțin *ecuațiile în impedanțe* ale cuadripolului liniar pasiv în regim sinusoidal

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{cases} \quad (\text{L11.5})$$

în care  $\underline{Z}_{jk}$  sunt parametrii impedanță ai cuadripolului cu următoarea semnificație:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} && \text{– impedanța de intrare la funcționarea în gol;} \\ \underline{Z}_{21} &= \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{\underline{C}} && \text{– impedanța de transfer la funcționarea în gol;} \\ \underline{Z}_{12} &= \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = -\frac{\underline{AD} - \underline{BC}}{\underline{C}} = -\frac{1}{\underline{C}}; && \underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}}. \end{aligned}$$

Condiția de reciprocitate devine:

$$Z_{12} = -Z_{21} \quad (\text{L11.6})$$

Dacă se explicitează curenții  $I_1$  și  $I_2$  funcție de tensiunile  $U_1$  și  $U_2$  din ecuațiile fundamentale (dacă  $A_{12} \neq 0$ ), se obțin ecuațiile în admitanțe ale cuadripolului

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{cases} \quad (\text{L11.7})$$

în care  $Y_{jk}$  sunt parametrii admitanță ai cuadripolului cu următoarea semnificație:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{D}{B} \quad \text{– admitanța de intrare la funcționarea în scurtcircuit;}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{1}{B} \quad \text{– admitanța de transfer la funcționarea în scurtcircuit;}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{AD-BC}{B} = -\frac{1}{B}; \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{A}{B}.$$

Condiția de reciprocitate se scrie

$$\boxed{Y_{12} = -Y_{21}} \quad (\text{L11.8})$$

Se utilizează uneori și *ecuațiile hibride* ale cuadripolilor de forma:

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}I_2 \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}I_2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} I_1 = F_{11}U_1 + F_{12}I_2 \\ U_2 = F_{21}U_1 + F_{22}I_2 \end{cases} \quad (\text{L11.9})$$

Parametrii  $H_{jk}$  și  $F_{jk}$  sunt denumiți *parametri hibridi*.

Indiferent de forma de scriere a sistemului de ecuații, parametrii cuadripolului diport se pot determina prin încercări la gol și la scurtcircuit. Anularea curentului la o poartă se realizează prin întreruperea circuitului, funcționarea în aceste condiții se numește "la gol". Anularea tensiunii la o poartă se realizează prin legarea bornelor în scurtcircuit, iar funcționarea în aceste condiții se numește "la scurtcircuit".

## 2. MODUL DE LUCRU

### 2.1. Determinarea parametrilor fundamentali ai cuadripolului

În cadrul acestei lucrări de laborator se determină experimental parametrii fundamentali (de transfer) ai unui cuadripol liniar pasiv cu schema echivalentă în "T" prezentată în figura L11.2.

Alimentarea cuadripolului se face pe rând pe la bornele primare (1) – (1') și pe la bornele secundare (2) – (2').

Cuadripolul, fiind liniar și pasiv, este reciproc și parametrii fundamentali satisfac condiția de reciprocitate (L11.2). Pentru determinarea parametrilor fundamentali  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  și  $A_{22}$  sunt necesare numai trei încercări experimentale, fie două încercări la gol și una la scurtcircuit, fie o încercare la gol și două la scurtcircuit.

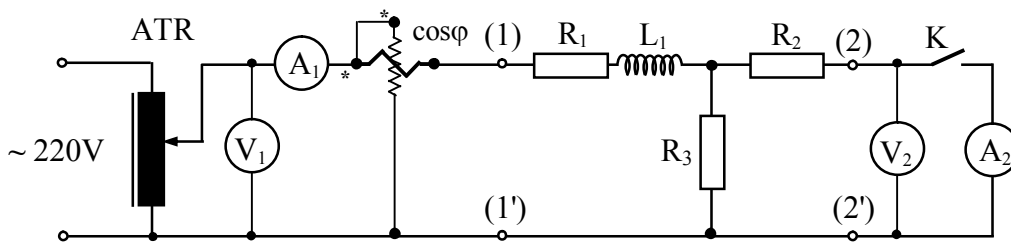


Fig. L11.2.

❶ *Încercarea în gol cu alimentare pe la bornele primare.* Bornele secundare fiind în gol,  $I_2 = 0$ , se notează  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{10}$ ,  $I_1 = I_{10}$ ,  $\underline{U}_2 = \underline{U}_{20}$  și din sistemul de ecuații (L11.1) rezultă:

$$\underline{Z}_{e10} = \frac{\underline{U}_{10}}{I_{10}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad (\text{L11.10})$$

numită impedanța complexă echivalentă de intrare la funcționarea în gol.

❷ *Încercarea la scurtcircuit cu alimentare pe la bornele primare.* Bornele secundare (2) – (2') sunt scurtcircuitate și deci  $\underline{U}_2 = 0$ . Se notează  $\underline{U}_1 = \underline{U}_{1sc}$ ,  $I_1 = I_{1sc}$ ,  $I_2 = I_{2sc}$  și din sistemul (L11.1) rezultă:

$$\underline{Z}_{e1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{I_{1sc}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad (\text{L11.11})$$

numită impedanța complexă echivalentă de intrare la funcționarea în scurtcircuit.

❸ *Încercarea în gol cu alimentare pe la bornele secundare.* Se lasă bornele primare în gol,  $I_1 = 0$ , și se aplică tensiune de la sursa de alimentare la bornele secundare (2) – (2'). Se notează astfel:  $\underline{U}_1 = \underline{U}'_{10}$ ,  $\underline{U}_2 = \underline{U}'_{20}$  și  $I_2 = I'_{20}$ . Din sistemul de ecuații (L11.4), pentru  $I'_1 = 0$ , rezultă impedanța complexă echivalentă

$$\underline{Z}_{e20} = \frac{\underline{U}'_{20}}{I'_{20}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}. \quad (\text{L11.12})$$

Impedanțele  $\underline{Z}_{e10}$ ,  $\underline{Z}_{e1sc}$  și  $\underline{Z}_{e20}$  sunt complexe și pentru determinarea argumentului acestora se utilizează un fazmetru ( $\cos\phi$  - metru).

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (L11.10), (L11.11), (L11.12) obținute din încercările la gol și scurtcircuit, la care se adaugă condiția de reciprocitate (L11.2), se obțin următoarele expresii pentru parametrii fundamentali ai cuadripolului:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{e10}}{\underline{Z}_{e20}(\underline{Z}_{e10} - \underline{Z}_{e1sc})}; & \underline{A}_{12} &= \frac{\underline{Z}_{e20}}{\underline{Z}_{e10} - \underline{Z}_{e1sc}}; \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\underline{Z}_{e20}(\underline{Z}_{e10} - \underline{Z}_{e1sc})}; & \underline{A}_{22} &= \frac{\underline{Z}_{e20}}{\underline{Z}_{e10} - \underline{Z}_{e1sc}}. \end{aligned} \quad (\text{L11.13})$$

Între parametrii fundamentali și parametrii schemei cuadripolului în "T" se pot stabili relațiile

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}; \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}; \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}; \quad (\text{L11.14})$$

Pentru schema cuadripolului din figura L11.2, impedanțele longitudinale  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  și admitanța transversală  $\underline{Y}$  sunt respectiv:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \underline{Z}_2 = R_3, \quad \underline{Y} = 1/R. \quad (\text{L11.15})$$

## 2.2. Studiul regimului de funcționare în sarcină a cuadripolului

Se consideră cuadripolul conectat la un rezistor de sarcină  $R_s$  ca în figura L11.3.

Dacă regimul normal de încărcare a unui cuadripol este caracterizat de tensiunea  $U_2$  și curentul de sarcină  $I_2$ , se pune problema să obținem acest regim prin suprapunerea a două regimuri de funcționare, diferite de cel normal și anume: un regim de funcționare la gol și unul la scurtcircuit.

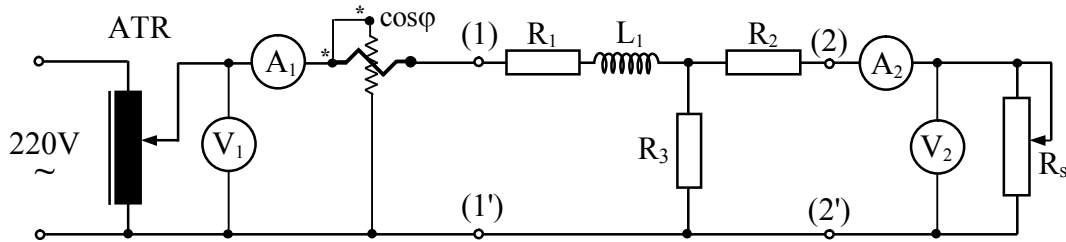


Fig. L11.3.

La încercarea în gol se alimentează cu tensiune variabilă pe la bornele (1) – (1') și se determină valorile tensiunii  $U_{10}$ , curentului  $I_{10}$  și  $\cos\phi_{10}$  pentru care  $U_{20} = U_2 = U_{R_s}$ ,  $I_2 = 0$ . În acest caz, ecuațiile (L11.1) ale cuadripolului devin:

$$\begin{cases} U_{10} = \underline{A}_{11} U_2 \\ I_{10} = \underline{A}_{21} U_2 \end{cases} \quad (\text{L11.16})$$

În mod similar se efectuează încercarea la scurtcircuit și se determină valorile tensiunii  $U_{1sc}$ , curentului  $I_{1sc}$  și  $\cos\phi_{1sc}$  pentru care  $I_{2sc} = I_2 = I_{R_s}$ ,  $U_2 = 0$ . În acest caz, ecuațiile (L11.1) ale cuadripolului devin:

$$\begin{cases} U_{1sc} = \underline{A}_{12} I_2 \\ I_{1sc} = \underline{A}_{22} I_2 \end{cases} \quad (\text{L11.17})$$

Din relațiile (L11.16) și (L11.17) se obține regimul nominal de funcționare al cuadripolului, caracterizat de ecuațiile obținute prin suprapunerea efectelor:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_{10} + \underline{U}_{1sc} \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_{10} + \underline{I}_{1sc} \end{cases} \quad (\text{L11.18})$$

Se observă că regimul de funcționare normală, în sarcină, a cuadripolului poate fi obținut prin suprapunerea a două regimuri limită de funcționare și anume: unul de mers în gol și altul de scurtcircuit. În practică este foarte important acest lucru, deoarece o mare parte din circuitele proiectate pentru alimentarea consumatorilor (rețele electrice, transformatoare) nu pot fi încărcate la sarcina nominală, ci se încearcă la gol și la scurtcircuit, urmând ca aplicarea suprapunerii efectelor să ducă la concluziile ce caracterizează regimul normal de lucru.



## STUDIUL CIRCUITELOR CU BOBINE LINIARE REALE CONECTATE ÎN SERIE ȘI ÎN PARALEL

### 1. DETERMINAREA PARAMETRILOR BOBINEI LINIARE REALE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Se studiază bobinele de reactanță liniare reale, cu pierderi, în conexiunile serie și paralel, necuplate și cuplate magnetic, funcționând în regim permanent sinusoidal.

Orice bobină reală, necuplată magnetic, funcționând în regim permanent sinusoidal la frecvențe joase (industriale), prezintă pe lângă inductivitatea proprie și o rezistență corespunzătoare rezistenței ohmice a conductorului și eventual pierderilor în miez, presupus ca având caracteristica magnetică liniară. Bobina reală se poate reprezenta în aceste condiții printr-o schemă echivalentă cu elemente de circuit ideale (rezistor ideal și bobină ideală) conectate în serie (fig. L12.1,a) sau în paralel (fig. L12.1,b). Parametrii acestor scheme echivalente sunt respectiv:

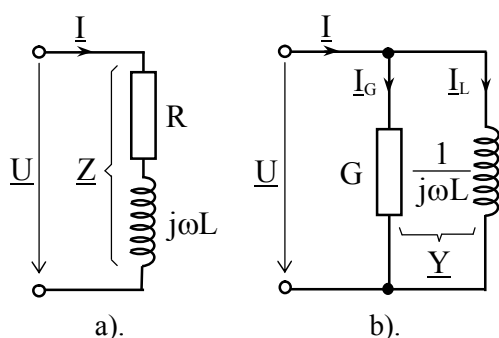


Fig.L12.1.

a) *impedanța complexă*

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \quad (\text{L12.1})$$

unde  $X$  este reactanța inductivă,  $X = X_L = \omega L$ ;

b) *admitanța complexă*

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Ye^{-j\varphi} = G - jB = \frac{1}{\underline{Z}}, \quad (\text{L12.2})$$

unde  $G$  este conductanța și  $B$  susceptanța inductivă,  $B = B_L = 1/(\omega L)$ .

Cele două scheme echivalente din figura L12.1,a) și b), caracterizând aceeași bobină reală, conservă puterile activă  $P$  și reactivă  $Q$  și deci și unghiul de defazaj  $\varphi$ ,

$$\tan \varphi = \frac{X}{R} = \frac{B}{G}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y}, \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{B}{Y}. \quad (\text{L12.3})$$

Cunoscând impedanța complexă  $\underline{Z}$  și admitanța complexă  $\underline{Y}$ , se pot determina tensiunile, curenții, puterile efective complexe și factorul de putere  $\cos \varphi$  astfel:

- pentru schema echivalentă serie (fig. L12.1,a)

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} = R\underline{I} + jX\underline{I}, \quad \underline{S} = \underline{S}e^{j\varphi} = P + jQ = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I}^2 = R\underline{I}^2 + jX\underline{I}^2, \quad (\text{L12.4})$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad P = R\underline{I}^2, \quad Q = X\underline{I}^2, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \cos \varphi = P/S;$$

- pentru schema echivalentă derivație (fig. L12.1,b)

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} = \underline{G}\underline{U} - j\underline{B}\underline{U} = \underline{I}_G + \underline{I}_L, \quad \underline{S} = \underline{U}^* \underline{I} = \underline{S}e^{-j\varphi} = P - jQ = \underline{Y}\underline{U}^2 = \underline{G}\underline{U}^2 - j\underline{B}\underline{U}^2, \quad (\text{L12.5})$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad P = \underline{G}\underline{U}^2, \quad Q = \underline{B}\underline{U}^2, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \cos\varphi = P/S.$$

Parametrii și mărimile ce caracterizează bobinele reale funcționând în regim permanent sinusoidal, se pot reprezenta fazorial în complex simplificat. Pentru schema echivalentă serie (fig. L12.1,a), impedanța complexă  $\underline{Z}$ , tensiunea complexă  $\underline{U}$  și puterea complexă  $\underline{S}$  se reprezintă prin diagrame fazoriale de aceeași formă (fig. L12.2), dacă se alege curentul  $\underline{I}$  origine de fază. Analog, pentru schema echivalentă derivație (fig. L12.1,b), diagramele fazoriale ale admitanței complexe  $\underline{Y}$ , curentului total  $\underline{I}$  și puterii complexe  $\underline{S}$  au aceeași formă, dacă se alege tensiunea  $\underline{U}$  origine de fază (fig. L12.3).

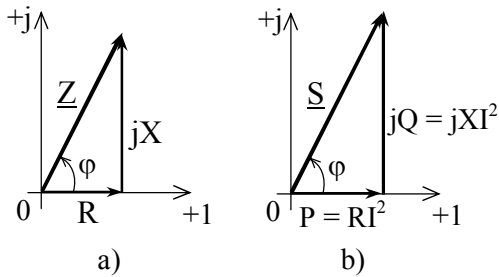


Fig. L12.2.

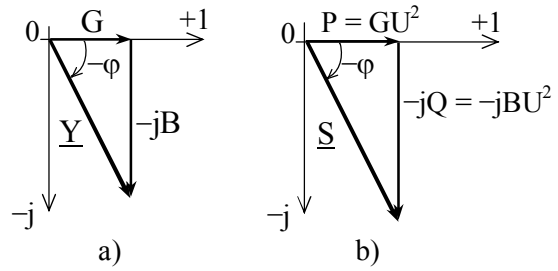


Fig. L12.3.

În circuitele electrice liniare funcționând în regim permanent sinusoidal, intervin bobine reale grupate în serie, paralel sau mixt, cu sau fără cuplaje magnetice. În scopul simplificării analizei acestor circuite, bobinele astfel grupate se pot substitui printr-o bobină echivalentă. Aceasta presupune însă determinarea parametrilor fiecărei bobine. În continuare se consideră două bobine a căror parametri se propune a fi determinați pe cale experimentală, utilizând schema electrică din figura L12.4.

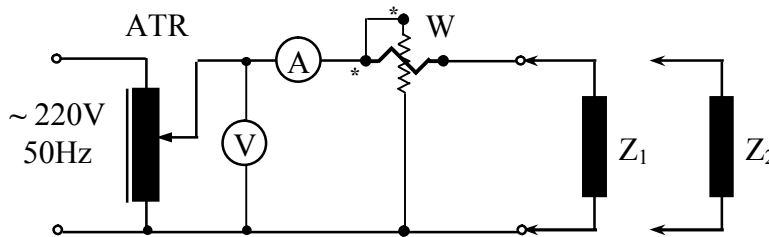


Fig. L12.4.

Cele două bobine, caracterizate prin impedanțele  $Z_1$  și  $Z_2$  se conectează succesiv în montajul din figura L12.4, măsurând pentru fiecare tensiunea, curentul și puterea activă. Rezultatele măsurătorilor și determinărilor prin calcul se trec în tabelul L12.1.

Tabelul L12.1.

Nr. crt.	U	I	P	S = UI	cosφ = P/S	Z = U/I	R = Zcosφ	X = Zsinφ	Y = I/U	G = Xcosφ	B = Xsinφ	P = RI <sup>2</sup>	P = GU <sup>2</sup>	Q = XI <sup>2</sup>	Q = BU <sup>2</sup>
	[V]	[A]	[W]	[VA]		[Ω]	[Ω]	[Ω]	[S]	[S]	[S]	[W]	[W]	[VAR]	[VAR]
1.															
2.															

## 2. CONEXIUNEA ÎN SERIE A BOBINELOR

### 2.1. Conexiunea în serie a bobinelor necuplate magnetic

Pentru determinarea experimentală a parametrilor schemei electrice echivalente conexiunii în serie a două bobine de impedanțe  $Z_1$  și  $Z_2$  necuplate magnetic, se utilizează montajul din figura L12.5.

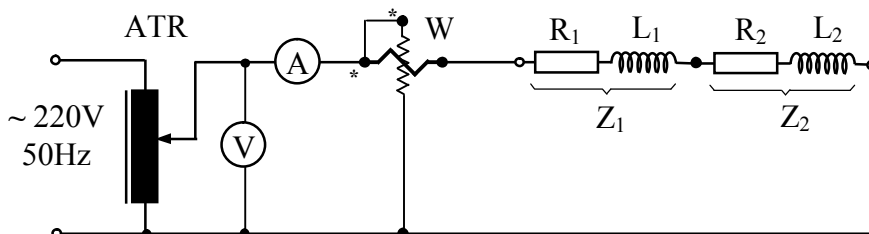


Fig. L12.5.

La gruparea în serie a două bobine de impedanțe complexe  $Z_1$  și  $Z_2$  se obține impedanța complexă echivalentă de forma:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) = R + jX; \quad (\text{L12.6})$$

$$R = R_1 + R_2, \quad X = X_1 + X_2, \quad Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}. \quad (\text{L12.7})$$

Parametrii bobinei echivalente,  $R$ ,  $X$  și  $Z$ , se pot determina fie prin calcul, cunoscând din tabelul L12.1 parametrii celor două bobine,  $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2$ ,  $X_2$  și utilizând rel. ( L12.6) și ( L12.7), fie prin măsurători efectuate cu ajutorul montajului din figura L12.5.

Prin modificarea tensiunii aplicate circuitului cu ajutorul autotransformatorului ATR se obțin mai multe regimuri de funcționare. Rezultatele acestor măsurători precum și a calculelor ce se efectuează se trec în tabelul L12.2.

Tabelul L12.2.

Nr. crt.	U	I	P	S = UI	cosφ = P/S	Z = U/I	R = Zcosφ	X = Zsinφ	R = R <sub>1</sub> + R <sub>2</sub>	X = X <sub>1</sub> + X <sub>2</sub>	P = RI <sup>2</sup>	Q = XI <sup>2</sup>
	[V]	[A]	[W]	[VA]		[Ω]	[Ω]	[Ω]	[Ω]	[Ω]	[W]	[VAR]
1.												
2.												

Cunoscând parametrii celor două bobine ( $R_1$ ,  $X_1$ ,  $R_2$ ,  $X_2$ ) conectate în serie, se poate trasa diagrama fazorială a impedanțelor complexe (fig. L12.6), în care toți parametrii se trasează la aceeași scară  $k_R$  ( $\Omega/\text{mm}$ ):

$$R_1 = k_R \cdot OA, \quad X_1 = k_R \cdot AB, \quad Z_1 = k_R \cdot OB;$$

$$R_2 = k_R \cdot BD, \quad X_2 = k_R \cdot DE, \quad Z_2 = k_R \cdot BE.$$

Se obțin astfel grafic parametrii bobinei echivalente grupării în serie a celor două bobine,

$$R = k_R \cdot OC, \quad X = k_R \cdot CE, \quad Z = k_R \cdot OE,$$

care trebuie să coincidă cu cei determinați experimental (tabelul L12.2).

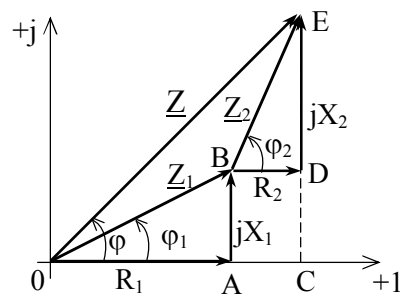


Fig. L12.6.

## 2.2. Conexiunea în serie a bobinelor cuplate magnetic

Pentru obținerea parametrilor circuitului echivalent grupării în serie a două bobine de reactanță cuplate prin inducție mutuală, funcționând în regim permanent sinusoidal, nu se mai poate recurge la gruparea impedanțelor sau admitanțelor complexe cum s-a procedat în lipsa cuplajelor magnetice, ci e necesar să se aplice teoremele lui Kirchoff care conduc la scheme electrice echivalente fără cuplaje magnetice, precum și la obținerea diagramelor fazoriale de tensiuni. Se pot obține, de asemenea, și expresiile puterilor electrice (P, Q, S).

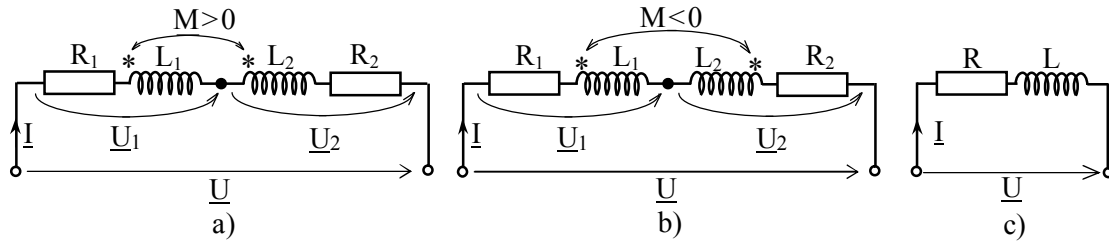


Fig. L12.7.

La gruparea în serie a două bobine cuplate prin inductanță mutuală  $M$  (cuplaj adițional  $M > 0$ , fig. L12.7,a) și cuplaj diferențial  $M < 0$ , fig. L12.7,b), aplicând teorema de tensiuni a lui Kirchoff se obține sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I} \\ \underline{U}_2 = R_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I} \end{cases} \quad (\text{L12.8})$$

din care rezultă parametrii bobinei echivalente (fără cuplaje magnetice, fig. L12.7,c):

$$\underline{U} = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) \underline{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \underline{I} = R + j\omega L. \quad (\text{L12.9})$$

Inductivitatea echivalentă  $L$  a grupării în serie a celor două bobine cuplate magnetic, pentru cuplaj adițional și respectiv diferențial, este:

$$L_a = L_1 + L_2 + 2|M| > 0, \quad (\text{L12.10})$$

$$L_d = L_1 + L_2 - 2|M| > 0. \quad (\text{L12.11})$$

Din aceste relații rezultă expresia analitică a inductivității mutuale:

$$M = \frac{1}{4}(L_a - L_d). \quad (\text{L12.12})$$

Pentru a caracteriza cuplajul magnetic a două bobine se utilizează *coeficientul de cuplaj magnetic*  $k$ , definit cu relația:

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (\text{L12.13})$$

Parametrii bobinei echivalente (fig. L12.7,c) grupării în serie a două bobine cuplate magnetic sunt totdeauna  $R$  și  $L$  (o rezistență și o inductivitate echivalentă, rel. (L12.9)). Trasând diagramele fazoriale de tensiuni (rel. L12.8 și L12.9) pentru cuplaj aditiv (fig. L12.8,a) și cuplaj diferențial (fig. L12.8,b), se pot pune în evidență defazajele  $\varphi(\underline{U}, \underline{I})$ ,  $\varphi_1(\underline{U}_1, \underline{I})$ ,  $\varphi_2(\underline{U}_2, \underline{I})$  și deci comportarea fiecărei bobine în parte (s-a exemplificat cazul unui cuplaj magnetic strâns, în care  $L_1 < |M| < L_2$ ).

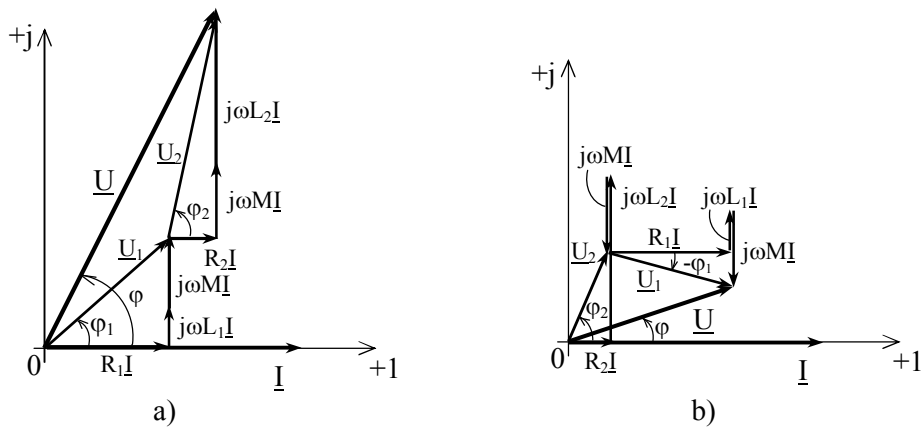


Fig. L12.8.

Din diagramele fazoriale prezentate, rezultă că tensiunea  $\underline{U}$  este defazată totdeauna înaintea curentului  $\underline{I}$ , cele două bobine grupate în serie cuplate magnetic se pot substitui cu o bobină echivalentă (fig. L12.7,c). Pentru cuplajul diferențial (fig. 6.7,b) și pentru coeficienți de cuplaj mari, una din tensiuni ( $\underline{U}_1$ , fig. L12.8,b) poate fi defazată în urma curentului  $\underline{I}$ , deci această bobină se comportă în gruparea serie capacitiv.

Din relațiile ( L12.8) se pot determina și puterile aparente complexe cu componentele lor, puterile reactive și active, de forma:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}^* = R_1 I^2 + j\omega L_1 I^2 + j\omega M I^2 = P_1 + jQ_1; \quad P_1 > 0; \quad Q_1 > 0;$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}^* = R_2 I^2 + j\omega L_2 I^2 + j\omega M I^2 = P_2 + jQ_2; \quad P_2 > 0; \quad Q_2 > 0;$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = R I^2 + j\omega L I^2 = P + jQ;$$

$$Q = \omega(L_1 + L_2 \pm 2|M|)^2 > 0; \quad P = P_1 + P_2 = (R_1 + R_2) \cdot I^2 > 0. \quad (\text{L12.14})$$

Din bilanțul de puteri și din diagrama fazorială din fig. L12.8,b) rezultă că, pentru un cuplaj diferențial (cuplaj magnetic strâns), există posibilitatea unui transfer de putere reactivă prin cuplaj de la o bobină (pe care tensiunea este defazată în urma curentului,  $\varphi < 0$ ) la cealaltă, puterea activă însă nu se transferă prin cuplaj magnetic.

Funcționarea bobinelor de reactanță grupate în serie și cuplate magnetic în regim permanent sinusoidal se pune în evidență cu un montaj realizat după aceeași schema electrică prezentată în figura L12.5, apropiind însă de astă dată bobinele pentru a se realiza cuplajul magnetic, adițional sau diferențial. Modificarea tipului de cuplaj magnetic, din adițional în diferențial sau invers, se realizează prin inversarea bornelor la una din cele două bobine. Indicațiile aparatelor de măsură se trec în tabelul L12.3 și se calculează mărimile indicate.

Tabelul L12.3.

Nr. crt.	U	I	P	S = UI	cosφ = P/S	tgφ (φ <sub>a</sub> , φ <sub>d</sub> )	R = R <sub>1</sub> +R <sub>2</sub>	X = R·tgφ	X <sub>m</sub>	k = X <sub>m</sub> /√(X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> )	P = RI <sup>2</sup>	Q = XI <sup>2</sup>
	[V]	[A]	[W]	[VA]			[Ω]	[Ω]	[Ω]		[W]	[VAR]
1*								X <sub>a</sub> =				
2**								X <sub>d</sub> =				
⋮												

1\* – cuplaj adițional; 2\*\* – cuplaj diferențial.

Rezistențele  $R_1$  și  $R_2$ , precum și reactanțele proprii  $X_1 = \omega L_1$ ,  $X_2 = \omega L_2$  fiind cunoscute (tabelul L12.1), se determină reactanța mutuală  $X_m = \omega M$ . Astfel, pentru o poziție a celor două bobine cuplate magnetic, se efectuează încercări experimentale pentru cuplajul adițional ( $M > 0$ ) și apoi pentru cuplajul diferențial ( $M < 0$ ), obținut prin schimbarea sensului curentului în una din bobine și se calculează reactanțele echivalente corespunzătoare  $X_a$ , respectiv  $X_d$ . Reactanța mutuală  $X_m$  se calculează cu relația (L12.12) multiplicată cu  $\omega$ ,

$$X_m = \frac{1}{4}(X_a - X_d). \quad (\text{L12.15})$$

Cunoscând  $X_m = \omega M$ , cu datele din tabelul L12.3 se pot trasa, pentru diferite regimuri de funcționare, diagrame fazoriale de forma celor din figura L12.8.

### 3. CONEXIUNEA ÎN PARALEL A BOBINELOR

#### 3.1. Conexiunea în paralel a bobinelor necuplate magnetic

La conectarea în paralel a bobinelor de reactanță necuplate magnetic și caracterizate de cele două admitanțe,  $Y_1(G_1, B_1)$  și  $Y_2(G_2, B_2)$  (tabelul L12.1), se parcurg aceleași etape ca la gruparea lor în serie și anume: cu ajutorul montajului din figura L12.9, menținând bobinele la o distanță suficient de mare pentru a evita cuplajul magnetic dintre ele, se măsoară tensiunea, curentul și puterea activă și se trec valorile acestora în tabelul L12.4. Se determină prin calcul parametrii bobinei echivalente grupării în paralel a celor două bobine.

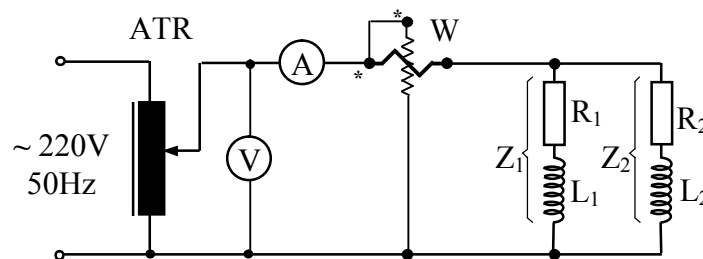


Fig. L12.9.

Tabelul L12.4.

Nr. crt.	U	I	P	S = UI	cosφ = P/S	Y = I/U	G = Ycosφ	B = Ysinφ	G = G <sub>1</sub> +G <sub>2</sub>	B = B <sub>1</sub> +B <sub>2</sub>	P = GU <sup>2</sup>	Q = BU <sup>2</sup>	S = √(P <sup>2</sup> + Q <sup>2</sup> )
	[V]	[A]	[W]	[VA]		[S]	[S]	[S]	[S]	[S]	[W]	[VAR]	[VA]
1.													
2.													
⋮													

Parametrii bobinei echivalente grupării în paralel a celor două bobine se pot determina și analitic ținând seama de gruparea în paralel a impedanțelor complexe corespunzătoare celor două bobine ( $Z_1 = 1/Y_1$ ,  $Z_2 = 1/Y_2$ ):

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 - jB_1 + G_2 - jB_2 = G - jB; \quad (\text{L12.16})$$

$$G = G_1 + G_2; B = B_1 + B_2; Y = \sqrt{(G_1 + G_2)^2 + (B_1 + B_2)^2}. \quad (\text{L12.17})$$

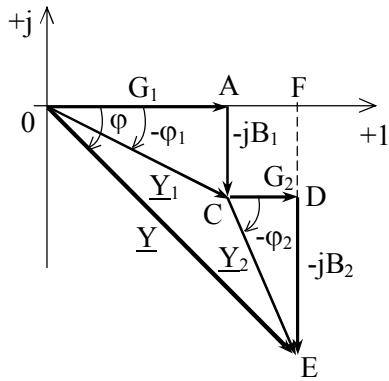


Fig. L12.10.

Diagrama fazorială a admitanțelor complexe  $\underline{Y}_1$ ,  $\underline{Y}_2$  corespunzătoare celor două bobine cuplate în paralel (rel. L12.16, L12.17), se trasează cunoscând parametrii fiecărei bobine (tabelul L12.1) și rezultă de forma celei prezentate în fig. L12.10. În diagramă toți parametrii se trasează la aceeași scară  $k_s$  (S/mm):

$$G_1 = k_s \cdot \overline{OA}; B_1 = k_s \cdot \overline{AC}; Y_1 = k_s \cdot \overline{OC}; \quad (\text{L12.18})$$

$$G_2 = k_s \cdot \overline{CD}; B_2 = k_s \cdot \overline{DE}; Y_2 = k_s \cdot \overline{CE}.$$

Parametrii bobinei echivalente grupării în paralel (rel. L12.17) rezultă din diagrama fazorială (fig. L12.10), cât și analitic din tabelul L12.4,

$$Y = k_s \cdot \overline{OE}; G = k_s \cdot \overline{OF}; B = k_s \cdot \overline{FE}. \quad (\text{L12.19})$$

### 3.2. Conexiunea în paralel a bobinelor cuplate magnetic

Se consideră două bobine conectate în paralel și cuplate magnetic prin inductanță mutuală ca în figura L12.11.

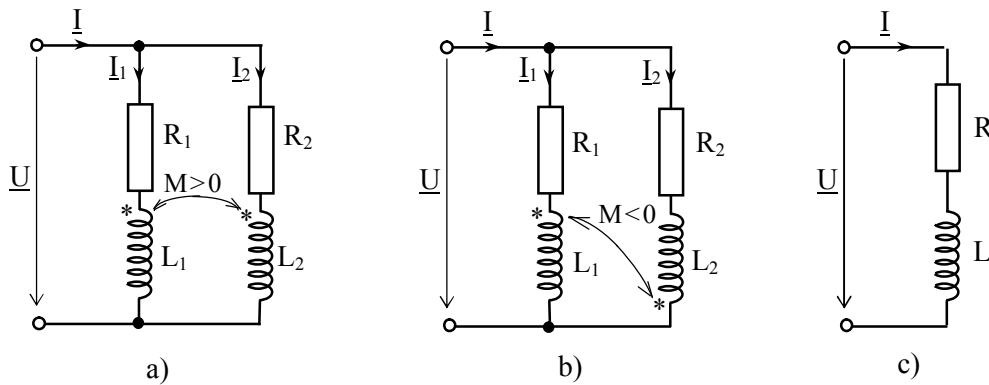


Fig. L12.11.

Funcționarea în regim permanent sinusoidal se poate studia și în acest caz analitic și experimental. Se aplică circuitelor din fig. L12.11, a) și b) teoremele lui Kirchhoff și se obține:

$$\begin{cases} \underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_m \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \end{cases} \quad (\text{L12.20})$$

în care inductivitatea mutuală  $M$  este pozitivă pentru cuplaj adițional ( $M > 0$ , fig. L12.11, a) și negativă pentru cuplajul diferențial ( $M < 0$ , fig. L12.11, b). Curenții  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}$  rezultă de forma:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2} \cdot \underline{U} = I_1 e^{-j\varphi_1}; \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2} \underline{U} = I_2 e^{-j\varphi_2};$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2} \underline{U} = \underline{I} e^{-j\varphi}; \quad (\text{L12.21})$$

iar impedanța  $\underline{Z}$  a bobinei echivalente bobinelor conectate în paralel (fig. L12.11,c) este

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R + jX = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}. \quad (\text{L12.22})$$

În cazul când se pot neglija rezistențele, se obține:

$$R \cong 0, \quad L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}. \quad (\text{L12.23})$$

Relațiile ( L12.20) și ( L12.21) permit trasarea diagramelor fazoriale de tensiuni și curenți (fig. L12.12). Este necesar însă să se traseze mai întâi diagrama fazorială a curenților (rel. L12.21), cunoscând parametrii bobinelor grupate în paralel sau determinând curenții experimental cu ajutorul montajului realizat după schema din figura L12.13.

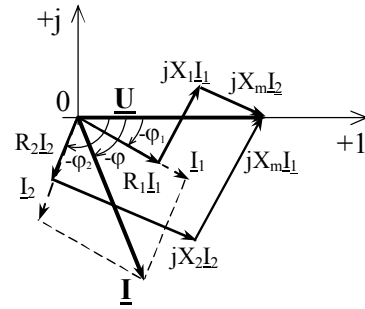


Fig. L12.12.

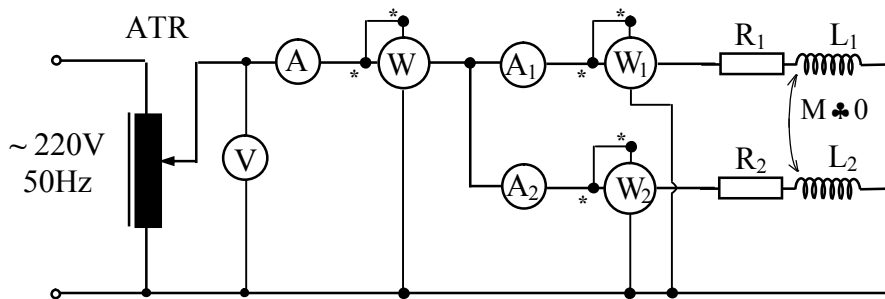


Fig. L12.13.

Considerând tensiunea  $\underline{U} = U$  origine de fază, fazele inițiale ale curenților sunt:

$$\gamma_{i1} = -\varphi_1, \quad \gamma_{i2} = -\varphi_2, \quad \gamma_i = -\varphi. \quad (\text{L12.24})$$

Defazajele  $\varphi_1, \varphi_2$  și  $\varphi$  se pot determina din relația ( L12.21), sau experimental (din tabelul L12.5).

Și pentru gruparea în paralel a bobinelor cuplate magnetic se poate determina bilanțul de puteri utilizând rel. ( L12.20) care pune în evidență și transferul puterilor active și reactive de la o bobină la alta prin cuplajul magnetic.

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{U} \underline{I}_1^* = R_1 I_1^2 + \omega M I_1 I_2 \sin(\gamma_{i1} - \gamma_{i2}) + j[\omega L_1 I_1^2 + \omega M I_1 I_2 \cos(\gamma_{i1} - \gamma_{i2})] = P_1 + jQ_1; \\ \underline{S}_2 &= \underline{U} \underline{I}_2^* = R_2 I_2^2 - \omega M I_1 I_2 \sin(\gamma_{i1} - \gamma_{i2}) + j[\omega L_2 I_2^2 + \omega M I_1 I_2 \cos(\gamma_{i1} - \gamma_{i2})] = P_2 + jQ_2; \end{aligned} \quad (\text{L12.25})$$

Se notează cu  $\theta = \gamma_{i1} - \gamma_{i2} = \varphi_2 - \varphi_1$  unghiul dintre curenții  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  și rezultă:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = P + jQ; \\ P &= P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2; \\ Q &= Q_1 + Q_2 = \omega L_1 I_1^2 + \omega L_2 I_2^2 + 2\omega M I_1 I_2 \cos\theta. \end{aligned} \quad (\text{L12.26})$$

Aceste puteri electrice se pot determina experimental cu ajutorul montajului prezentat în figura L12.13, precum și analitic, cunoscând în prealabil reactanța mutuală



$X_m = \omega M$  din tabelul L12.4, cât și parametrii proprii ai celor două bobine ( $R_1, R_2, X_1, X_2$  din tabelul L12.1). Pentru diferite regimuri de funcționare obținute prin reglarea autotransformatorului ATR, se măsoară tensiunea, curenții și puterile totală și de pe cele două bobine și valorile acestor mărimi se trec în tabelul L12.5.

La conectarea în paralel a bobinelor de reactanță cuplate magnetic, diagrama fazorială se trasează dacă se cunosc parametrii celor două bobine ( $R_1, R_2, X_1, X_2$  și  $X_m$ ), valorile efective ale curenților  $I_1$  și  $I_2$ , precum și fazele inițiale ale acestora. Impunând tensiunea  $\underline{U}$  origine de fază, rezultă aceste faze inițiale din rel. ( L12.21).

Tabelul L12.5.

Nr. crt.	U	I	P	S = UI	cosφ = P/S	I <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>	S <sub>1</sub> = UI <sub>1</sub>	cosφ <sub>1</sub> = P <sub>1</sub> /S <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>	S <sub>2</sub> = UI <sub>2</sub>	cosφ <sub>2</sub> = P <sub>2</sub> /S <sub>2</sub>	P <sub>1</sub> = R <sub>1</sub> I <sub>1</sub> <sup>2</sup>	P <sub>2</sub> = R <sub>2</sub> I <sub>2</sub> <sup>2</sup>	P = P <sub>1</sub> +P <sub>2</sub>
	[V]	[A]	[W]	[VA]		[A]	[W]	[VA]		[A]	[W]	[VA]		[W]	[W]	[W]
1.																
2.																

Ținând seama de relațiile (3.6) pentru bobine reale cuplate magnetic, se pot face următoarele observații privind defazajele curenților  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$ , în raport cu tensiunea  $\underline{U}$ :

- curentul total  $\underline{I}$  este defazat totdeauna în urma tensiunii  $\underline{U}$  (defazaj inductiv,  $\varphi_{ind}$ ), fazorul  $\underline{I}$  fiind situat în cadranul IV (fig. L12.12);
- în funcție de parametrii bobinelor ( $R_1, R_2, X_1, X_2$ ) și mărimea  $X_m$ , curenții prin bobine  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$  pot fi ambii defazați în urma tensiunii  $\underline{U}$ , sau numai unul dintre ei poate fi defazat înaintea tensiunii (defazaj capacitiv,  $\varphi_{cap}$ ).

## CONCLUZII

1. Studiul analitic și experimental pune în evidență funcționarea bobinelor reale în regim permanent sinusoidal, atunci când acestea prezintă sau nu cuplaje magnetice.

2. Metodele experimentale prezentate, simple și eficiente, permit determinarea cu aproximație bună a parametrilor bobinei.

3. Din rezultatele experimentale obținute se pot trasa, de asemenea, pentru fiecare caz în parte studiat, diagrame fazoriale de tensiuni și curenți și se pot efectua bilanțuri de puteri.

4. S-au pus în evidență pentru fiecare caz în parte defazajele dintre curenți și tensiuni, modul cum se comportă bobinele cu și fără cuplaje, conectate în serie și în paralel.

5. La bobinele cuplate prin inductanță mutuală se pune în evidență transferul puterilor active și reactive de la o bobină la alta prin cuplaj magnetic. De exemplu, de pe diagrama fazorială (fig. L12.12), se observă că bobina 2 transferă putere activă bobinei 1, însă ambele absorb putere reactivă ( $P_1 > 0, Q_1 > 0, P_2 < 0, Q_2 > 0$ ), în grupul celor 4 puteri numai câte una singură poate fi negativă.

## SUDIUL REZONANȚEI ÎN CICRUIŢELE CU BOBINA NELINIARĂ. FENOMENUL DE FEROREZONANȚĂ.

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

În circuitele electrice care conțin bobine neliniare (cu miez de fier) și condensatoare, se constată fenomene de rezonanță specifice, diferite de cele din circuitele cu elemente liniare.

Dacă se conectează o bobină cu miez de fier în serie cu un condensator liniar și se variază tensiunea aplicată la bornele circuitului, se ajunge – datorită dependenței neliniare dintre tensiune și curent – ca la o anumită valoare a tensiunii aplicate circuitului, tensiunile la bornele bobinei și condensatorului să aibă valori efective egale și în opoziție de fază.

În circuitele liniare, la valori date ale inductivității și capacității condensatorului, acest fenomen constituie rezonanța de tensiuni care se obține exclusiv prin variația frecvenței.

În circuitele neliniare, cu bobină și condensator în serie, fenomenul de rezonanță, denumit *ferorezonanță serie*, intervine, la o frecvență dată, exclusiv prin variația tensiunii aplicate. Circuitul se numește *ferorezonant*.

Dacă se conectează o bobină cu miez de fier în paralel cu un condensator și se variază intensitatea curentului, se ajunge ca la o anumită valoare a curentului la bornele circuitului, curenții prin bobină și condensator să aibă valori efective egale și în opoziție de fază, fenomen numit *ferorezonanță paralel*. Circuitul se numește *antiferorezonant*.

#### 1.1. Ferorezonanța circuitului serie

Se consideră circuitul serie din figura L13.1 care conține o bobină neliniară  $L$  (cu miez de fier) și un condensator  $C$ , presupus liniar, alimentat de la o sursă de tensiune sinusoidală.

Deși bobina este neliniară, pentru excitație sinusoidală,  $u(t) = \sqrt{2}U \sin \omega t$ , tensiunile la bornele elementelor de circuit vor fi tot sinusoidale și ecuația de tensiuni a circuitului se poate scrie în complex simplificat, iar caracteristica tensiune – curent rezultantă  $U(I)$  în valori efective se obține prin însumarea tensiunilor în opoziție de fază ale bobinei  $U_L$  și condensatorului  $U_C$  :

$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C ; \quad U = U_L - U_C . \quad (\text{L13.1})$$

Dacă se neglijează pierderile în fier și rezistența bobinei, caracteristica tensiune–curent (volt–amper)  $U_L(I)$  a acesteia are forma curbei de magnetizare  $\psi = \psi(i)$  și este reprezentată în figura L13.2. Caracteristica tensiune–curent a condensatorului  $U_C(I)$  este o dreaptă trasată în cadranul IV, deoarece tensiunile  $u_L$  și  $u_C$  sunt în opoziție de fază.

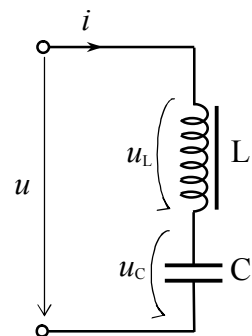


Fig. L13.1.

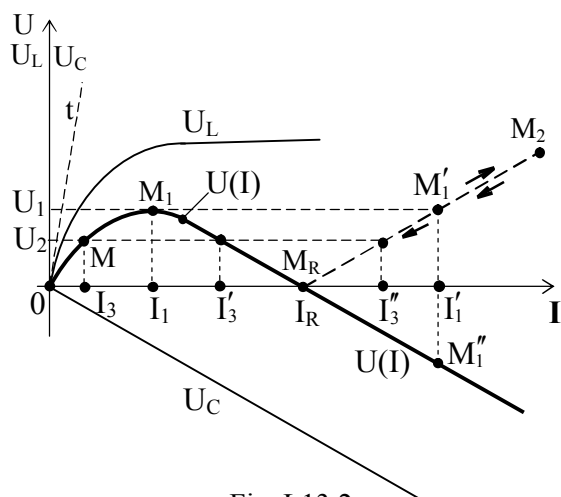


Fig. L13.2.

Dacă panta caracteristicii  $U_C(I)$  este în valoare absolută mai mică decât panta tangentei în origine ( $t$ ) la curba  $U_L(I)$ , caracteristica tensiune – curent a circuitului,  $U(I) = U_L(I) - U_C(I)$ , prezintă o concavitate în cadranul I, intersectează axa absciselor în punctul  $M_R$  și are în cadranul IV aproximativ forma unei drepte.

Pentru a urmări mai ușor raționamentul, s-a trasat în cadranul I, ramura din cadranul IV a curbei  $U(I)$ . Dacă panta caracteristicii  $U_C(I)$  este mai mare decât panta tangentei în origine la curba  $U_L(I)$ , nu apare fenomenul de ferorezonanță. Dând valori crescătoare tensiunii aplicate, punctul de funcționare  $M$  se deplasează pe ramura  $OM_1$  a caracteristicii  $U = U(I)$ . Pe această ramură, la valori crescătoare sau descrescătoare ale tensiunii  $U$ , corespund valori crescătoare sau descrescătoare ale curentului  $I$ , adică pe această ramură funcționarea este stabilă. La o creștere pozitivă a tensiunii  $U$ , punctul de funcționare trece din poziția  $M_1$  căruia îi corespunde curentul  $I_1$ , în poziția  $M_1'$  căruia îi corespunde curentul  $I_1'$  (propriu-zis, punctul de funcționare trece din  $M_1$  în  $M_1''$  pe ramura curbei  $U(I)$  din cadranul IV, dar pentru ușurința urmăririi pe diagramă se va utiliza ramura curbei din cadranul I). În punctul  $M_1$  curentul este discontinuu, deoarece la o creștere infinit mică a tensiunii aplicate  $\Delta U$  corespunde o creștere finită a curentului,  $I_1' - I_1$ . Totodată are loc o răsturnare de fază: în punctul  $M_1$  curentul este inductiv deoarece predomină reactanța inductivă, iar în punctul  $M_1'$  curentul este capacitiv și predomină reactanța capacitivă. Continuând cu creșterea tensiunii aplicate, punctul de funcționare se deplasează pe ramura  $M_1'M_2$ , tensiunea fiind defazată în urma curentului. Dacă din punctul  $M_2$  se reduce tensiunea, curentul descrește și se ajunge în punctul  $M_R$ , în care tensiunea e nulă, curentul nu este nul, având intensitatea  $I_R$ . Acest punct în care tensiunile la bornele bobinei și condensatorului sunt egale și în opoziție de fază și deci  $U_L - U_C = 0$ , iar curentul este finit, se numește de rezonanță.

Pe ramura  $M_1'M_2$ , la valori crescătoare sau descrescătoare ale tensiunii aplicate, corespund valori crescătoare, respectiv descrescătoare ale curentului, prin urmare pe această ramură funcționarea este stabilă.

Pe ramura  $M_1M_R$  funcționarea este instabilă, deoarece la valori crescătoare sau descrescătoare ale tensiunii, corespund valori descrescătoare, respectiv crescătoare ale curentului. Pe ramura  $M_1'M_R$ , pentru valori ale tensiunii aplicate cuprinse între 0 și  $U_1$  curentii pot avea trei valori: de exemplu pentru  $U = U_2$  sunt posibile trei intensități ale

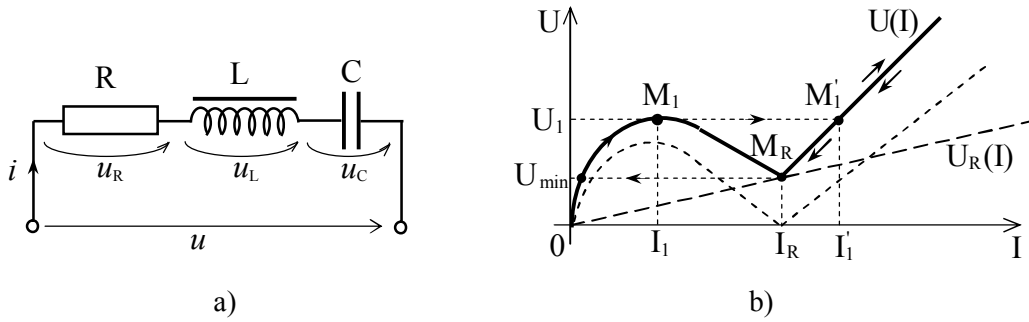


Fig. L13.3.

curenților  $I_3, I'_3$  și  $I''_3$ , din care prima și ultima corespund unei funcționări stabile, respectiv cvasistabile. Urmează că punctul de funcționare nu parcurge ramura  $M_1M_R$ , nici la creșterea și nici la reducerea tensiunii aplicate.

În realitate, rezistența înfășurării bobinei și pierderile în fier nu sunt nule, acestea putând fi echivalate printr-o rezistență  $R$  înseriată cu bobina neliniară și cu condensatorul presupus liniar (fig. L13.3,a). În acest caz caracteristica circuitului ferorezonant se modifică ca în figura L13.3,b (s-a trasat cu linie întreruptă caracteristica circuitului fără pierderi).

Dacă se conectează în serie cu bobina o rezistență mare, se poate obține ca punctul de funcționare să se deplaseze continuu pe întreaga caracteristică  $U(I)$ .

## 1.2. Ferorezonanța circuitului paralel

Se conectează bobina cu miez de fier în paralel cu condensatorul liniar de capacitate  $C$  și se injectează un curent sinusoidal  $i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega t$  (fig. L13.4,a).

Tensiunea  $u$  la bornele bobinei și condensatorului este nesinusoidală datorită nelinierității bobinei și se înlocuiește cu o tensiune echivalentă sinusoidală. Notând cu  $i_L$  și  $i_C$  curenții prin bobină și prin condensator, curentul prin circuit va fi:

$$i = i_L + i_C \tag{L13.2}$$

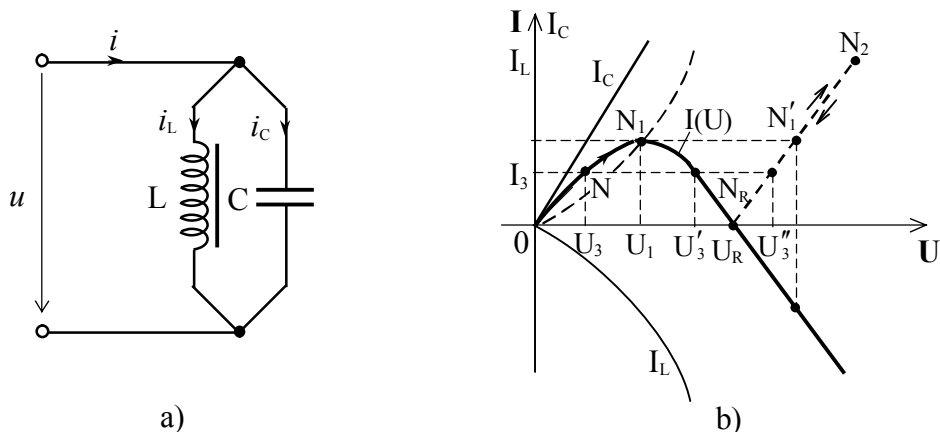


Fig. L13.4.

Se alege capacitatea condensatorului astfel încât panta caracteristicii curent – tensiune  $I_C(U)$  a condensatorului să fie mai mare decât panta în origine, în valoare

absolută, a caracteristicii curent – tensiune  $I_L(U)$  a bobinei. În acest caz, caracteristica curent – tensiune a circuitului paralel,  $I = I(U)$ , are o concavitate în cadranul I, intersectează axa absciselor în punctul  $M_R$  și are în cadranul IV aproximativ forma unei drepte (fig. L13.4,b).

Forma caracteristicii  $I = I(U)$  în planul  $(I,U)$  pentru circuitul paralel, este asemănătoare cu forma caracteristicii  $U = U(I)$  în planul  $(U,I)$  pentru circuitul serie, raționamentul este același, problemele fiind duale.

Pentru a obține reglarea continuă a intensității curentului absorbit, se conectează în serie cu circuitul paralel un rezistor a cărui rezistență este mult mai mare decât impedanța echivalentă a circuitului LC paralel.

În realitate, pierderile în fier și rezistența înfășurării bobinei nu sunt nule și se pot echivala printr-un rezistor de conductanță  $G$ , presupus liniar, conectat în paralel cu bobina și condensatorul ca în figura L13.5,a). Caracteristica curent – tensiune  $I = I(U)$  are forma din figura L13.5,b), fiind obținută din însumarea caracteristicii inițiale (trasată cu linie întreruptă) cu cea a rezistorului paralel,  $I_G(U)$ , presupusă liniară.

Dacă se conectează circuitul paralel la o sursă cu rezistență interioară mică și se variază tensiunea  $U$ , se poate obține ca punctul de funcționare să se deplaseze continuu pe întreaga caracteristică.

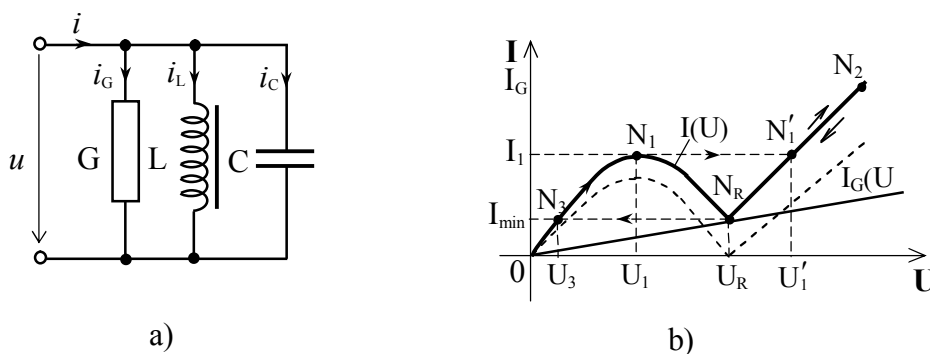


Fig. L13.5.

## 2. MODUL DE LUCRU

### 2.1. Ferorezonanța serie

Se realizează un montaj pentru ferorezonanța circuitului serie după schema electrică din figura L13.6.

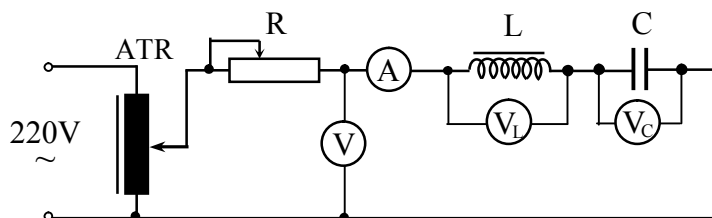


Fig. L13.6.

❶ Cu rezistența  $R$  de valoare mare în circuitul de alimentare (sursă de curent), se reglează cu ajutorul autotransformatorului reglabil ATR tensiunea de alimentare și se citesc curentul  $I$ , tensiunea  $U$  la bornele circuitului LC serie și tensiunile pe bobină  $U_L$  și

pe condensator  $U_C$ . Valorile acestora se trec în tabelul L13.1 și se trasează prin puncte, pe același grafic, caracteristicile  $U(I)$ ,  $U_L(I)$  și  $U_C(I)$  după datele trecute în tabel.

Tabelul L13.1

I [A]				...
U [V]				...
$U_L$ [V]				...
$U_C$ [V]				...

② Cu rezistența  $R$  scoasă din circuit se trasează caracteristica  $U(I)$  de tipul celei din fig. 1.4 în care se pun în evidență salturile de curent.

## 2.2. Ferorezonanța paralel

Se realizează montajul pentru circuitul ferorezonant paralel după schema electrică din figura L13.7.

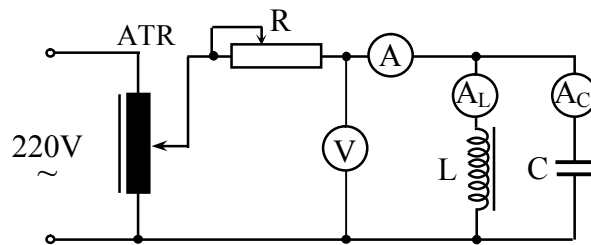


Fig. L13.7.

① Cu rezistența  $R$  scoasă din circuit se măsoară curenții  $I$ ,  $I_L$  și  $I_C$  la variația tensiunii de alimentare  $U$ . Datele se trec în tabelul L13.2. Se trasează caracteristicile  $I(U)$ ,  $I_L(U)$  și  $I_C(U)$ .

Tabelul L13.2

U [V]				...
I [A]				...
$I_L$ [A]				...
$I_C$ [A]				...

② Cu rezistența  $R$  de valoare foarte mare (sursă de curent sinusoidal) se iau datele și se trasează caracteristica  $I(U)$ . Se pun în evidență discontinuitățile tensiunii la bornele circuitului ferorezonant paralel.

## STUDIUL CIRCUITELOR TRIFAZATE SIMETRICE ȘI ECHILIBRATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

#### 1.1. Sisteme trifazate simetrice de mărimi sinusoidale

Circuitele electrice trifazate se utilizează pe scară largă în producerea, transportul și distribuția energiei electrice.

Cel mai simplu sistem trifazat conține un generator de energie electrică trifazat, o linie electrică de transport cu trei conductoare principale (de fază) și un receptor trifazat.

Un *circuit electric trifazat* este un ansamblu de trei circuite monofazate cu legături conductoare între ele parcurse de curenți de aceeași frecvență, defazați între ei, fiecare circuit monofazat component constituind o *fază*. Sistemele de mărimi de aceeași natură (tensiuni, curenți, t.e.m., etc.) care există într-un circuit trifazat se numesc *sisteme trifazate*. În această lucrare se consideră circuitele trifazate în care tensiunile și curenții sunt mărimi sinusoidale ce formează *sisteme trifazate simetrice*.

Un *sistem trifazat simetric de succesiune directă de mărimi sinusoidale* (tensiuni, de exemplu) este constituit din trei mărimi sinusoidale de aceeași frecvență, având valori efective egale, fiecare mărime fiind defazată în urma celei care îi precede cu un unghi egal cu  $2\pi/3$ :

$$\begin{cases} u_1(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha) \\ u_2(t) = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3(t) = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{L14.1})$$

*Sistemul trifazat este de succesiune inversă* dacă fiecare mărime (tensiune) este defazată în înaintea celei care îi precede cu un unghi egal cu  $2\pi/3$ ;

$$\begin{cases} u_1(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha) \\ u_2(t) = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3(t) = \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{L14.2})$$

Sistemele trifazate sinusoidale se pot reprezenta simbolic, de exemplu în complex simplificat. Utilizând operatorul de rotație în complex cu unghiul  $2\pi/3$ , notat cu  $a$ ,

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = a^{-1} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\text{L14.3})$$

fazorii complecși ai sistemului trifazat simetric de succesiune directă (L14.1) se scriu

$$\underline{U}_1 = Ue^{j\alpha}, \quad \underline{U}_2 = a^2 \underline{U}_1, \quad \underline{U}_3 = a \cdot \underline{U}_1, \quad (\text{L14.4})$$

iar cei ai sistemului trifazat simetric de succesiune inversă (L14.2) sunt

$$\underline{U}_1 = \underline{U}e^{j\alpha}, \quad \underline{U}_2 = a \underline{U}_1, \quad \underline{U}_3 = a^2 \underline{U}_1. \quad (\text{L14.5})$$

Diagramele fazoriale corespunzătoare celor două tipuri de sisteme trifazate sunt prezentate în figura L14.1.

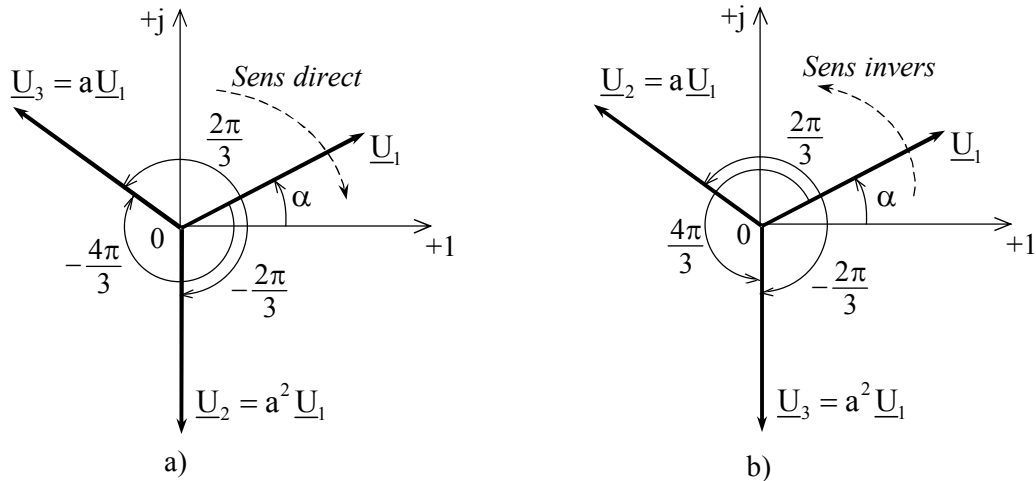


Fig. L14.1. Reprezentarea fazorială a sistemelor trifazate simetrice: a) sistemul de succesiune directă; b) sistemul de succesiune inversă.

Din expresiile analitice (L14.1) și (L14.2), din reprezentările lor simbolice (L14.4) și (L14.5), precum și din diagramele de fazori din fig.L14.1, rezultă că, totdeauna, suma mărimilor sinusoidale ale unui sistem trifazat simetric este nulă:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0; \quad \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0. \quad (\text{L14.6})$$

Sistemele trifazate simetrice de tensiuni sinusoidale aplicate rețelelor electrice de alimentare sunt în mod normal de succesiune directă și sunt produse de generatoarele trifazate din centralele electrice de diferite tipuri: termoelectrice, hidroelectrice, nucleare-electrice. Principial, un generator electric trifazat este o mașină electrică rotativă, având trei înfășurări dispuse simetric pe circumferința statorului în care câmpul magnetic produs de rotor induce trei tensiuni electromotoare ce formează un sistem trifazat simetric.

Un receptor trifazat și o linie electrică trifazată de alimentare cu energie electrică se pot caracteriza cu ajutorul impedanțelor fazelor. În cazul în care, atât receptorul trifazat, cât și linia electrică trifazată au impedanțele fazelor identice, sistemul trifazat linie-receptor se numește *echilibrat*, impedanțele pe faze fiind de forma:

$$\underline{Z}_{r1} = \underline{Z}_{r2} = \underline{Z}_{r3} = \underline{Z}_r = Z_r e^{j\varphi_r}; \quad \underline{Z}_{l1} = \underline{Z}_{l2} = \underline{Z}_{l3} = \underline{Z}_l = Z_l e^{j\varphi_l} \quad (\text{L14.7})$$

Circuitele electrice trifazate liniare funcționează în regim permanent sinusoidal (r.p.s.) simetric și echilibrat dacă tensiunile rețelei de alimentare sunt sinusoidale și formează sistem trifazat simetric, iar linia și receptorul au impedanțele fazelor identice (L14.7). În acest regim toate sistemele trifazate de mărimi (tensiuni, curenți, t.e.m., fluxuri magnetice, etc.) formează sisteme trifazate simetrice de aceeași succesiune.



Fazelor circuitelor trifazate se conectează în stea sau în triunghi. De regulă, înfășurările generatoarelor trifazate din centralele electrice se conectează în stea, iar impedențele de fază ale receptoarelor se conectează, atât în stea, cât și în triunghi.

În cele ce urmează se consideră circuitele trifazate liniare, simetrice și echilibrate, în regim permanent sinusoidal, de tip generator - line - receptor, conectate în stea și în triunghi. Se notează cu R, S, T bornele generatorului și cu A, B, C bornele receptorului.

## 1.2. Conexiunea în stea a sistemelor trifazate

Circuitul trifazat în conexiunea stea se obține unind începuturile fazelor la generator și respectiv la receptor, în câte un punct comun, numit *punct neutru* sau *de nul* al generatorului 0, respectiv al receptorului N (fig. L14.2). Conductorul care unește neutrul receptorului N cu neutrul generatorului 0 (trasat cu linie întreruptă în fig. L14.2) se numește *fir neutru* sau *conductor de nul*.

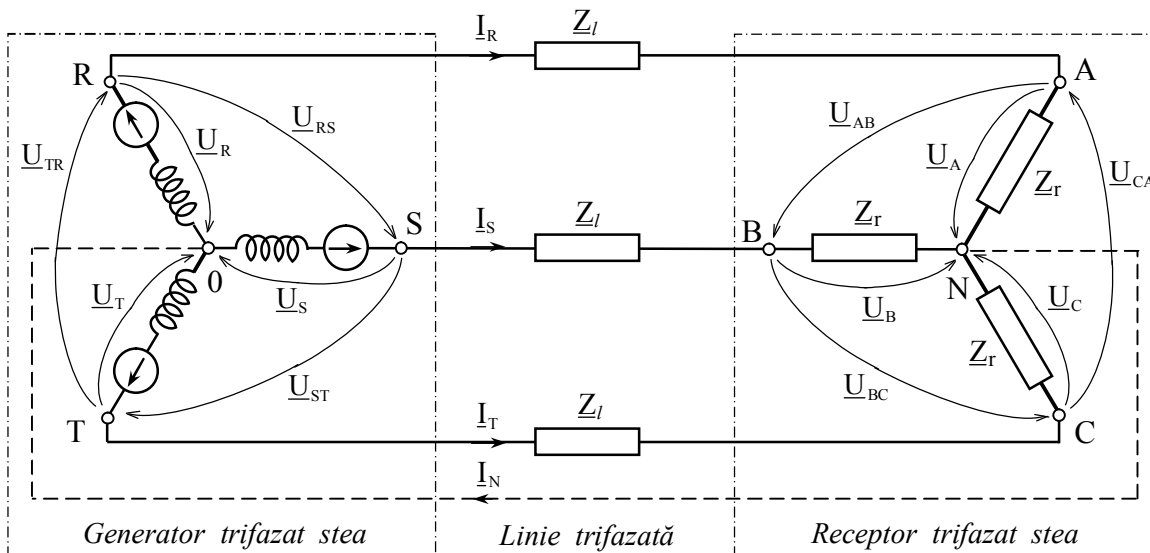


Fig. L14.2. Conexiunea în stea a sistemelor trifazate.

Curenții electrici care circulă prin fazele generatorului, respectiv prin impedențele de fază ale receptorului, se numesc *curenți de fază* la generator, respectiv la receptor. Curenții care circulă pe conductoarele liniei,  $\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$ , se numesc *curenți de linie*. Se constată că la conexiunea în stea, curenții de fază coincid cu cei de linie și deci, au valori efective egale. Curenții de linie, formând sistem trifazat simetric, suma lor este nulă. Prin urmare, curentul prin firul neutru este nul,

$$\underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \quad (\text{L14.8})$$

și deci, în cazul sistemelor trifazate simetrice și echilibrate, firul neutru poate lipsi.

Tensiunile electrice pe fazele generatorului,  $\underline{U}_R, \underline{U}_S, \underline{U}_T$ , respectiv tensiunile electrice de pe impedențele de sarcină ale receptorului,  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ , se numesc *tensiuni de fază, simple sau stelate*, la generator, respectiv la receptor.

Tensiunile electrice dintre bornele generatorului,  $\underline{U}_{RS}, \underline{U}_{ST}, \underline{U}_{TR}$ , egale cu tensiunile dintre conductoarele liniei la generator, respectiv tensiunile electrice dintre

bornele receptorului,  $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ , egale cu tensiunile dintre conductoarele liniei la receptor, se numesc *tensiuni de linie* sau *compuse*, la generator, respectiv, la receptor.

Tensiunile de fază ale generatorului sunt simetrice și se scriu:

$$\underline{U}_R = U_f^{(g)} e^{j\alpha_g} = \underline{U}_f^{(g)}; \quad \underline{U}_S = a^2 \underline{U}_f^{(g)}; \quad \underline{U}_T = a \underline{U}_f^{(g)}. \quad (L14.9)$$

Tensiunile de linie la generator se exprimă în funcție de tensiunile de fază astfel:

$$\underline{U}_{RS} = \underline{U}_R - \underline{U}_S; \quad \underline{U}_{ST} = \underline{U}_S - \underline{U}_T; \quad \underline{U}_{TR} = \underline{U}_T - \underline{U}_R. \quad (L14.10)$$

În figura L14.3 se prezintă diagrama fazorială a tensiunilor și curenților la generator. S-a luat ca referință sistemul tensiunilor de fază,  $\underline{U}_R, \underline{U}_S, \underline{U}_T$ , în raport cu care, utilizând (L14.10), s-au construit fazorii tensiunilor de linie  $\underline{U}_{RS}, \underline{U}_{ST}, \underline{U}_{TR}$ . Fazorii tensiunilor de linie pot fi translați ca în figură, formând astfel laturile unui triunghi echilateral la care tensiunile de fază au modulul egal cu raza cercului circumscris triunghiului. Pe diagrama fazorială s-au reprezentat și fazorii curenților,  $\underline{I}_R, \underline{I}_S, \underline{I}_T$ , presupunând un defazaj  $\varphi_g$  al acestora față de tensiunile de fază la generator.

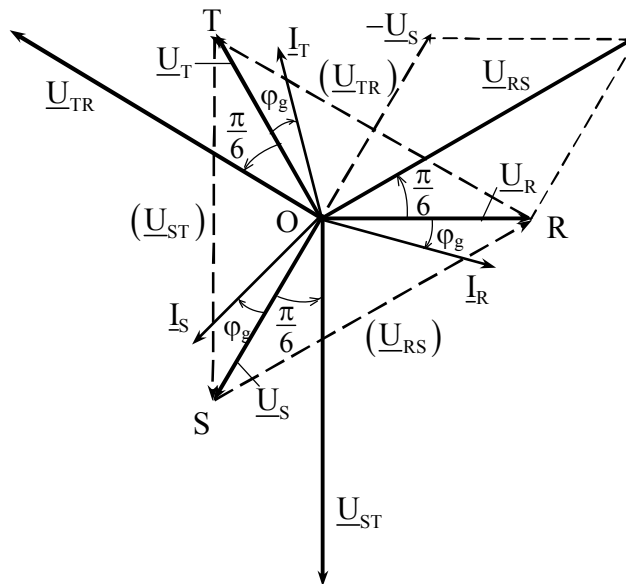


Fig. L14.3. Diagrama fazorială la generator.

Din diagrama fazorială se constată că și tensiunile de linie formează sistem trifazat simetric, fiind defazate cu un unghi egal cu  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ) înaintea tensiunilor de fază și având valoarea efectivă (modulul) de  $\sqrt{3}$  ori mai mare ca valoarea efectivă a tensiunilor de fază:  $U_l^{(g)} = \sqrt{3} U_f^{(g)}$ .

Relații similare cu (L14.9) și (L14.10) pot fi scrise și pentru tensiunile de fază și respectiv de linie la receptor:

$$\underline{U}_A = U_f^{(r)} e^{j\alpha_r} = \underline{U}_f^{(r)}; \quad \underline{U}_B = a^2 \underline{U}_f^{(r)}; \quad \underline{U}_C = a \underline{U}_f^{(r)}, \quad (L14.11)$$

respectiv  $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (L14.11)$

Diagrama fazorială a tensiunilor la receptor este similară celei de la generator și deci tensiunile de linie la receptor formează, de asemenea, sistem trifazat simetric, fiind defazate cu  $\pi/6$  înaintea tensiunilor de fază și având valoarea efectivă de  $\sqrt{3}$  ori mai mare ca valoarea efectivă a tensiunilor de fază:  $U_l^{(r)} = \sqrt{3} U_f^{(r)}$ .

În concluzie, la conexiunea în stea a circuitelor trifazate simetrice și echilibrate, funcționând în regim permanent sinusoidal, valoarea efectivă a tensiunilor de linie este  $\sqrt{3}$  ori mai mare ca valoarea efectivă a tensiunilor de fază, iar valoarea efectivă a curenților de linie este egală cu valoarea efectivă a curenților de fază:

$$\begin{cases} U_l = \sqrt{3}U_f \\ I_l = I_f \end{cases} \quad (\text{L14.12})$$

În circuitele electrice trifazate simetrice și echilibrate în r.p.s., totdeauna curentul  $\underline{I}_N$  și tensiunea  $\underline{U}_{NO}$  sunt nule pe conductorul neutru. Rezultă că și puterile electrice pe conductorul neutru sunt nule. În acest caz, puterile electrice activă P, reactivă Q și aparentă S se determină ca fiind de trei ori puterea respectivă pe o fază. De exemplu, la receptor, aceste puteri se calculează astfel:

$$\begin{cases} P = 3U_f^{(r)}I_f \cos \varphi_r = \sqrt{3}U_l^{(r)}I_l \cos \varphi_r; \\ Q = 3U_f^{(r)}I_f \sin \varphi_r = \sqrt{3}U_l^{(r)}I_l \sin \varphi_r; \\ S = 3U_f^{(r)}I_f = \sqrt{3}U_l^{(r)}I_l; \end{cases} \quad (\text{L14.13})$$

în care  $\varphi_r$  este unghiul de defazaj dintre tensiune și curent pe fazele receptorului.

## 1.2. Conexiunea în triunghi a sistemelor trifazate

Circuitele trifazate în conexiunea triunghi se realizează unind sfârșitul primei faze cu începutul fazei următoare, ș.a.m.d., iar punctele comune constituie bornele de acces. Întrucât generatoarele electrice nu se conectează în triunghi, se consideră schema de principiu a sistemului cu receptorul conectat în triunghi, prezentată în figura L14.4.

La conexiunea în triunghi a receptorului trifazat, tensiunile de fază coincid cu tensiunile de linie la receptor, însă curenții de fază și de linie diferă. În regim permanent sinusoidal, simetric și echilibrat, între curenții de linie  $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$  și de fază  $\underline{I}_{AB}, \underline{I}_{BC}, \underline{I}_{CA}$ , la receptorul conectat în triunghi există relațiile:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{AB} - \underline{I}_{CA}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{AB}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{CA} - \underline{I}_{BC}. \quad (\text{L14.14})$$

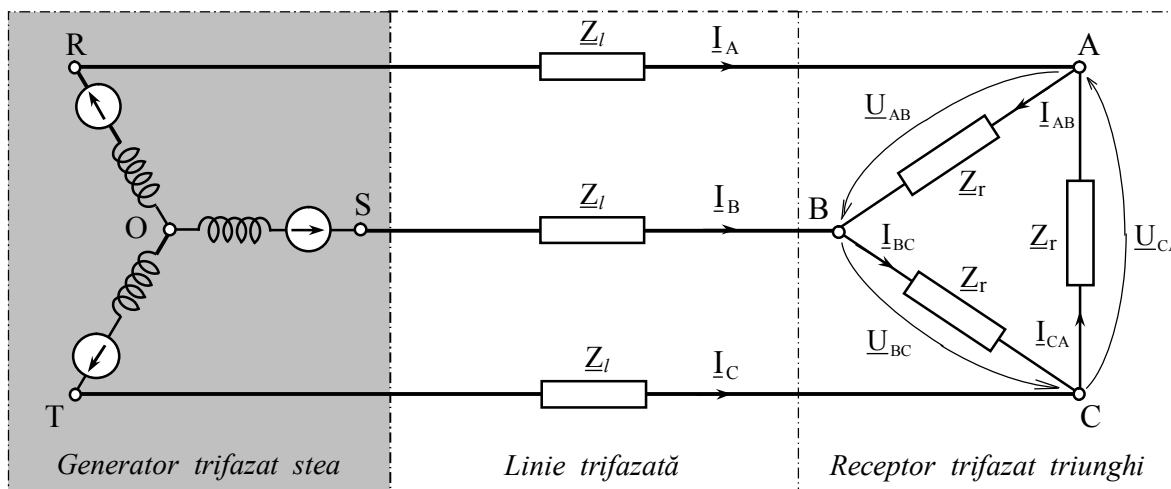


Fig. L14.4. Conexiunea în triunghi a receptorului trifazat

Tensiunile de fază la receptor fiind simetrice și curenții de fază formează sistem trifazat simetric, fiecare fiind defazat față de tensiunea de fază omoloagă cu același unghi,  $\varphi_r$ .

În figura L14.5 s-a construit diagrama fazorială a curenților la receptorul conectat în triunghi luând ca referință sistemul simetric al tensiunilor de fază, identice cu cele de linie la receptor. Atât din diagrama fazorială, cât și pe baza relațiilor (L14.14), se verifică ușor că și curenții de linie formează sistem trifazat simetric, fiind defazați în urma curenților de fază cu un unghi egal cu  $\pi/6$  ( $30^\circ$ ) și având valoarea efectivă de  $\sqrt{3}$  ori mai mare ca valoarea efectivă a curenților de fază.

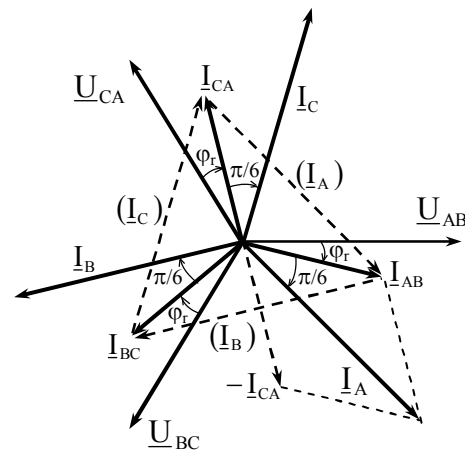


Fig. L14.5.

*În concluzie, la conectarea în triunghi a circuitelor trifazate, simetrice și echilibrate, funcționând în regim permanent sinusoidal, tensiunile de linie coincid cu tensiunile de fază, având valori efective egale, iar curenții de linie au valoarea efectivă de  $\sqrt{3}$  ori mai mare ca valoarea efectivă a curenților de fază:*

$$\begin{cases} U_l = U_f \\ I_l = \sqrt{3} I_f \end{cases} \quad (\text{L14.15})$$

Puterile electrice reprezintă, ca și în cazul conexiunii în stea, triplul puterilor electrice pe o fază și se determină cu aceleași expresii (L14.13). În care  $\varphi_f$  reprezintă tot defazajul dintre tensiunea și curenții pe fază. Prin schimbarea conexiunii receptorului din stea în triunghi, impedanțele pe faze nu se modifică, însă tensiunile și curenții de fază cresc de  $\sqrt{3}$  ori și deci, puterile electrice cresc de trei ori. De aceea la pornirea motoarelor electrice trifazate cu conexiunea în triunghi, pentru a se diminua șocul produs în rețea, se conectează fazele în stea, iar după pornire, cu ajutorul comutatorului stea-triunghi, se conectează în triunghi. Unul din cele mai răspândite receptoare trifazate îl constituie mașina electrică, asincronă sau sincronă. În întrefierul acestei mașini se produce un câmp magnetic învârtitor.

#### 1.4. Câmpul magnetic învârtitor

Se consideră un receptor trifazat echilibrat format din trei bobine identice, fiecare cu  $N$  spire și având, de exemplu secțiunea pătrată, așezate simetric, fie în formă de stea, fie în triunghi, în așa fel încât și cuplajele magnetice dintre bobine să fie simetrice. În continuare se consideră cele trei bobine identice dispuse simetric în spațiu după laturile unui triunghi echilateral (cu axele la  $120^\circ$ , fig. L14.6) și parcurse de un sistem trifazat simetric de curenți sinusoidali de succesiune directă

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta) \\ i_2 = \sqrt{2} I \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 = \sqrt{2} I \sin\left(\omega t + \beta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{L14.16})$$

Inducțiile magnetice produse de cele trei bobine parcurse de curenții  $i_k$  ( $k = 1,2,3$ ) în punctul 0 formează un sistem trifazat simetric de forma:

$$\begin{cases} \bar{B}_1 = \bar{n}_1 \cdot B_m \sin(\omega t + \beta) \\ \bar{B}_2 = \bar{n}_2 \cdot B_m \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \bar{B}_3 = \bar{n}_3 \cdot B_m \sin\left(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{L14.17})$$

în care valoarea maximă  $B_m$  a inducției magnetice în acest caz este

$$B_m = \frac{6\sqrt{3} \mu_0 NI}{\pi\sqrt{7} a} \quad (\text{L14.18})$$

Inducția magnetică rezultantă  $\bar{B}$  în centrul 0 al triunghiului format din cele trei bobine este

$$\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} \quad (\text{L14.18})$$

în care:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\sqrt{3}}{2}(B_2 - B_3) = -\frac{3}{2}B_m \cos(\omega t + \beta) \\ B_y = B_1 - \frac{1}{2}(B_2 + B_3) = \frac{3}{2}B_m \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (\text{L14.19})$$

Modulul și argumentul inducției magnetice rezultante  $\bar{B}$  va fi

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} \cdot B_m; \quad \text{tg}\alpha = \frac{B_y}{B_x} = \text{tg}(\omega t + \beta) \quad (\text{L14.20})$$

La aceeași concluzie (L14.20) se ajunge determinând inducția magnetică rezultantă  $\bar{B}$  pe cale grafică așa cum se arată în figura L14.6. Inducția magnetică rezultantă  $\bar{B}$  în punctul O are modulul constant (L14.20), se rotește cu viteza unghiulară  $\omega$  (egală cu pulsația curenților), în sens orar și afixul lui  $\bar{B}$  descrie un cerc. Dacă se inversează două bobine între ele, sau se schimbă două faze între ele, bobinele rămânând fixe, se obține tot un câmp magnetic învârtitor de tip circular, dar care se rotește în sens invers orar. Aceste situații de funcționare se pot pune ușor în evidență, dacă în punctul O se introduce un ac magnetic.

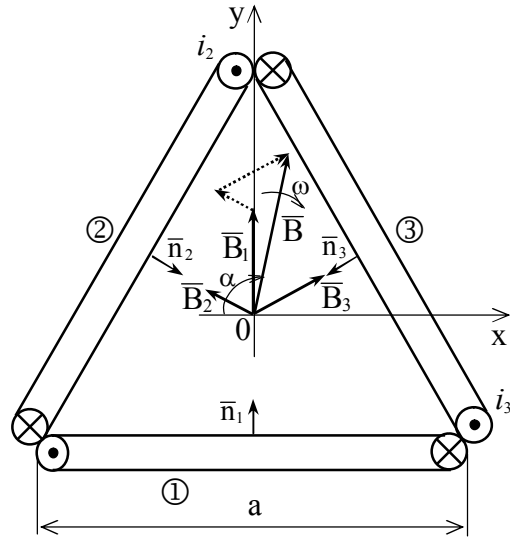


Fig.L14.6

## 2. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

### 2.1. Circuitul trifazat în conexiunea stea

Se realizează montajul după schema figura L14.7 reprezentând un circuit trifazat echi-librat format dintr-un receptor constituit din trei bobine identice  $b_1, b_2, b_3$ , conectate în stea și dispuse simetric în spațiu, alimentat cu tensiuni simetrice prin intermediul a trei reostate  $R_h$  de la un transformator trifazat TR cu înfășurările conectate în stea (conexiunea  $Y_{y0}$ ).

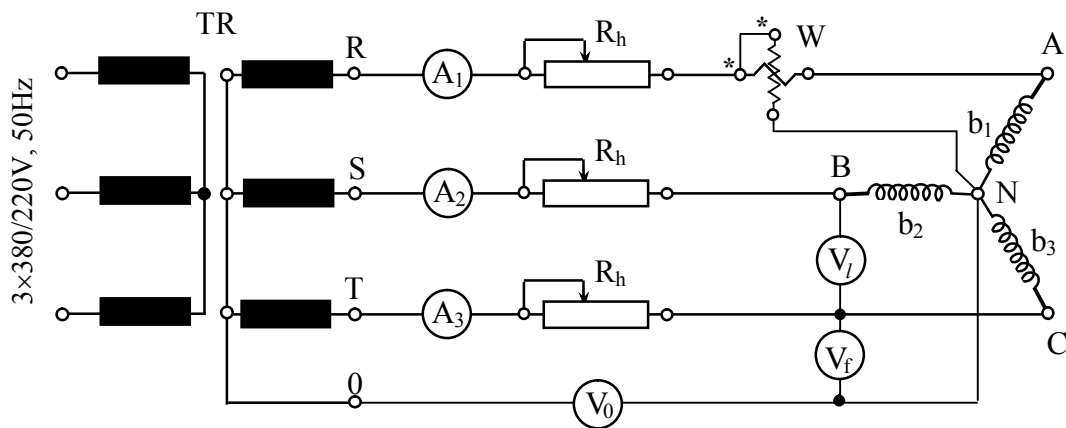


Fig. L14.7. Schema de montaj pentru circuitul în conexiunea stea.

Se verifică funcționarea circuitului trifazat cu conexiunea în stea în regim permanent sinusoidal simetric și echilibrat procedând astfel:

- se reglează curenții de linie cu ajutorul reostatelor  $R_h$  astfel încât valorile lor efective indicate de ampermetrele  $A_1, A_2, A_3$  să fie egale;
- se măsoară valorile efective ale tensiunilor de linie și de fază care trebuie să fie egale:  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l$ ;  $U_{AN} = U_{BN} = U_{CN} = U_f$ .

Dacă condițiile a) și b) sunt satisfăcute, diferența de potențial  $U_{N0}$  dintre neutrul receptorului și neutrul secundarului transformatorului este nulă. În aceste condiții, circuitul funcționează în r.p.s. simetric și echilibrat. Se realizează o succesiune de regimuri echilibrate, modificând reostatetele  $R_h$  încât valorile efective ale curenților de linie să fie egale. Valorile mărimilor măsurate se trec în tabelul L14.1.

Tabelul L14.1.

Nr. crt.	$I_l = I_f$	$U_f$	$U_l$	$\frac{U_l}{U_f}$	$P_f$	$\cos\varphi_f = \frac{P_f}{(U_f I_f)}$	$P = 3P_f = 3U_f I_f \cos\varphi_f$	$Q = 3Q_f = 3U_f I_f \sin\varphi_f$	$S = 3U_f I_f = \sqrt{P^2 + Q^2}$
	[A]	[V]	[V]		[W]		[W]	[VAR]	(VA)
1.									
2.									

## 2.2. Circuitul trifazat în conexiunea triunghi

Se realizează montajul după schema din figura L14.8 în care bobinele receptorului sunt conectate în triunghi.

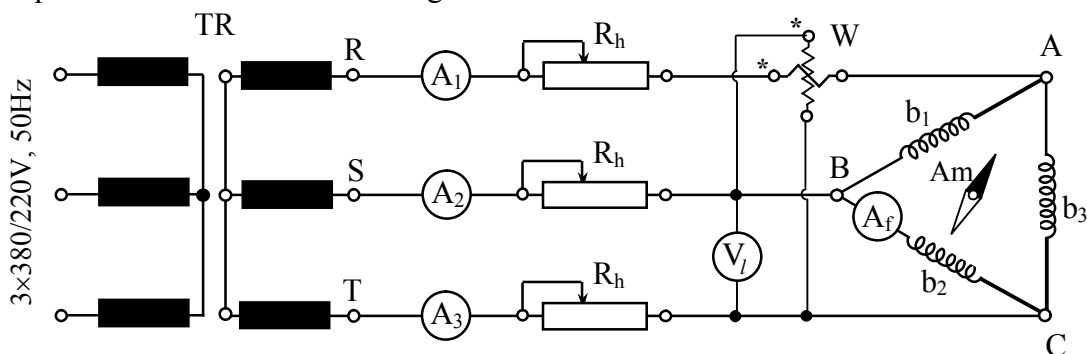


Fig. L14.8. Schema de montaj pentru circuitul în conexiunea triunghi.

Ca și în cazul circuitului în conexiunea stea, presupunând tensiunile din secundarul transformatorului TR simetrice și receptorul echilibrat, circuitul trifazat cu receptorul în conexiunea triunghi din figura L14.8 funcționează în regim permanent sinusoidal simetric și echilibrat atunci când valorile efective ale curenților de linie sunt egale. Reglând reostatele  $R_h$ , se obțin regimuri de funcționare echilibrate a căror mărimi sunt prezentate în tabelul L14.2.

Tabelul L14.2.

Nr. crt.	$I_l$	$I_f$	$\frac{I_l}{I_f}$	$U_l=U_f$	$Q'$	$Q = \sqrt{3} Q' =$ $= \sqrt{3} U_l I_l \sin\varphi_r$	$\sin\varphi_r =$ $= Q'/(U_l I_l)$	$P = 3P_f =$ $= 3U_f I_f \cos\varphi_r$	$S = 3U_f I_f =$ $= \sqrt{P^2 + Q^2}$
	[A]	[A]		[V]	[VAR]	[VAR]		[W]	(VA)
1.									
2.									
⋮									

Pentru determinarea puterilor se montează wattmetrul cu bobina de curent înseriată pe faza A a liniei de alimentare și cu bobina de tensiune se conectată între fazele B și C (fig. L14.8). În această situație, conform diagramei fazoriale din figura L14.5, wattmetrul va indica o putere reactivă dată de relația:

$$Q' = U_{AB} I_A \cos(\underline{U}_{AB}, \underline{I}_A) = U_{AB} I_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r\right) = U_l I_l \sin\varphi_r = \frac{Q}{\sqrt{3}} \quad (\text{L14.21})$$

În centrul triunghiului format din cele trei bobine, atât la conexiunea în stea, cât și în triunghi, se plasează un ac magnetic  $A_m$ . Dacă curenții ce parcurg bobinele formează un sistem trifazat de succesiune directă, acul magnetic se va roti în sensul orar, iar dacă succesiunea fazelor este inversă, acul magnetic se va roti în sens invers orar.

### 2.3. Conținutul referatului

Pe baza valorilor măsurate sau calculate din cele două tabele se vor construi diagramele fazoriale de tensiuni și curenți pentru receptorul conectat în stea și în triunghi.

Se vor consemna concluziile desprinse referitoare la cele două tipuri de conexiuni ale circuitelor trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni simetrice sinusoidale și cele referitoare la producerea câmpului magnetic învârtitor.

## CIRCUITE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

### 1. NOȚIUNI TEORETICE GENERALE

Circuitele electrice trifazate dezechilibrate au impedanțele echivalente ale fazelor diferite, ceea ce determină nesimetria sistemelor de curenți și tensiuni chiar și în situația în care sistemul tensiunilor de alimentare este simetric. În practică și în unele tratate se utilizează noțiunile de *dezechilibru simplu* pentru situația în care sistemul tensiunilor de alimentare este simetric și receptorul este dezechilibrat și de *dezechilibru total* pentru situația în care sistemul tensiunilor de alimentare este nesimetric și receptorul trifazat este dezechilibrat. Cu aceeași semnificație se utilizează uneori și noțiunile de *nesimetrie simplă* și *nesimetrie totală*.

Analiza acestor circuite se efectuează, fie prin metoda directă (cu ajutorul metodelor de analiză a circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal), fie prin metoda indirectă – metoda componentelor simetrice.

În cadrul lucrării se studiază o categorie răspândită în practică de circuite trifazate dezechilibrate fără cuplaje magnetice, funcționând în regim permanent sinusoidal.

Fie un receptor trifazat dezechilibrat (cu impedanțele fazelor diferite) în conexiunea stea cu fir neutru (fig. L15.1), căruia i se aplică un sistem trifazat nesimetric de tensiuni de fază notate cu  $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$ .

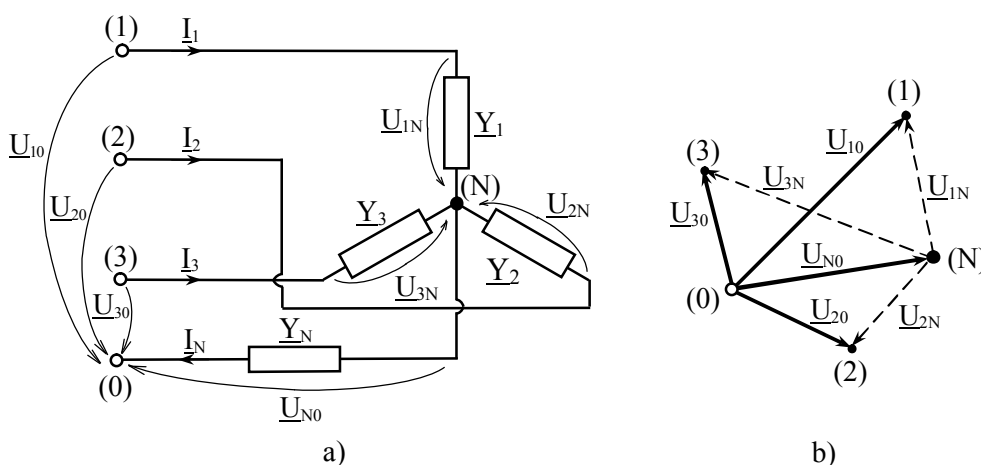


Fig. L15.1: a) Receptorul trifazat dezechilibrat conectat în stea în stea cu fir neutru;  
b) diagrama fazorială a tensiunilor de fază.



Curenții pe fazele receptorului dezechilibrat în conexiunea stea cu fir neutru (fig. L15.1,a) se determină cu relația

$$I_k = Y_k(V_k - V_N) = Y_k U_{kN}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (L15.1)$$

unde  $Y_k = 1/Z_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) sunt admitanțele fazelor receptorului.

Aplicând teoremei a I-a Kirchhoff în punctul neutru (N) al receptorului, rezultă:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_N = Y_N U_{N0}, \quad (L15.2)$$

unde  $U_{N0} = V_N - V_0$  este căderea de tensiune pe conductorul de nul (*deplasarea neutrului*) cu admitanța  $Y_N = 1/Z_N$ . Înlocuind curenții  $I_k$  dați de (L15.1) în (L15.2), expresia tensiunii  $U_{N0}$ , numită și *deplasarea neutrului*, rezultă:

$$U_{N0} = \frac{Y_1 U_{10} + Y_2 U_{20} + Y_3 U_{30}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \quad (L15.3)$$

în care  $U_{k0} = V_k - V_0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Tensiune  $U_{N0}$  are modulul (valoarea efectivă) maxim atunci când conductorul neutru lipsește ( $Y_N = 0$ , rel. L15.3).

În cazul particular în care receptorul este echilibrat  $Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y$ , tensiunea  $U_{N0}$  între neutrul receptorului (N) și neutrul rețelei de alimentare (0) devine:

- când conductorul neutru există

$$U_{N0} = \frac{U_{10} + U_{20} + U_{30}}{3 + Y_N / Y}; \quad (L15.4)$$

- când conductorul neutru lipsește:

$$U_{N0} = \frac{U_{10} + U_{20} + U_{30}}{3}. \quad (L15.5)$$

Tensiunile pe fazele receptorului dezechilibrat  $U_{kN}$ , se obțin aplicând teorema a II-a Kirchhoff ochiurilor  $[k, N, 0, k]$ :  $U_{kN} = U_{k0} - U_{N0}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Rezultă astfel:

$$\begin{aligned} U_{1N} &= \frac{Y_2 U_{12} - Y_3 U_{31} + Y_N U_{10}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \\ U_{2N} &= \frac{Y_3 U_{23} - Y_1 U_{12} + Y_N U_{20}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \\ U_{3N} &= \frac{Y_1 U_{31} - Y_2 U_{23} + Y_N U_{30}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \end{aligned} \quad (L15.6)$$

Sistemul trifazat de curenți de linie  $I_1, I_2, I_3$  se obține cu rel. (L15.1) în care se înlocuiesc tensiunile  $U_{kN}$  date de rel. (L15.6).

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1 \frac{Y_2 U_{12} - Y_3 U_{31} + Y_N U_{10}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \\ I_2 &= Y_2 \frac{Y_3 U_{23} - Y_1 U_{12} + Y_N U_{20}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \\ I_3 &= Y_3 \frac{Y_1 U_{31} - Y_2 U_{23} + Y_N U_{30}}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_N} \end{aligned} \quad (L15.7)$$

În lipsa conductorului de nul, aceste relații se particularizează pentru  $Y_N = 0$ .

În fig. L15.1,b) s-a trasat diagrama fazorială a tensiunilor de fază.

## 2. PARTEA EXPERIMENTALĂ

### 2.1. Receptoare trifazate dezechilibrate

Există situații diferite în care circuitele electrice trifazate funcționează în r.p.s. dezechilibrat, atât în funcționare normală cu receptoare dezechilibrate, ca de exemplu consumatori industriali, casnici, iluminat, etc., cât și în regim de avarie (scurtcircuite sau întreruperi pe faze).

De asemenea, există și anumite dispozitive a căror principiu de funcționare se bazează pe nesimetria tensiunilor sau curenților la receptorul trifazat. Un astfel de dispozitiv îl constituie cel pentru determinarea experimentală a succesiunii fazelor unui sistem trifazat simetric de tensiuni. În acest caz, receptorul trifazat nesimetric cu conexiunea stea, conține pe primele două faze lămpi cu incandescență, iar pe faza a treia un condensator (fig. L15.2,a) sau o bobină (fig. L15.2,b). Acest receptor trifazat fără conductor neutru este puternic nesimetric, diagramele fazoriale ale tensiunilor de fază fiind reprezentate în figura L15.3.

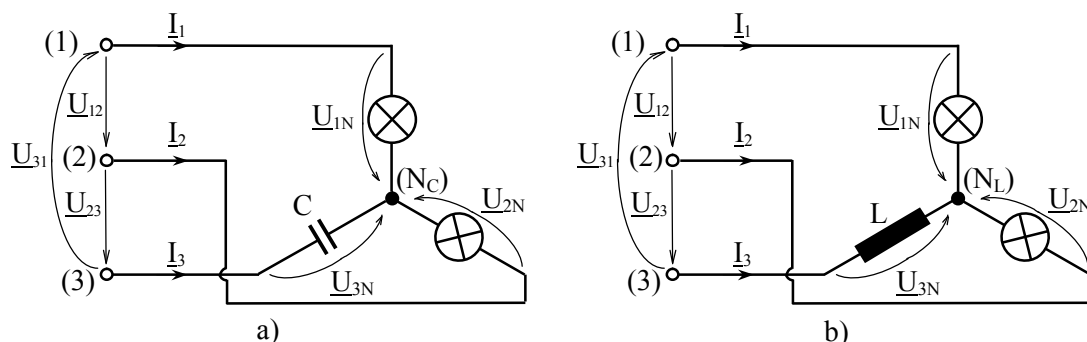


Fig. L15.2. Receptoare trifazate dezechilibrate conectate în stea: a) cu lămpi și condensator; b) cu lămpi și bobină .

Sistemul tensiunilor de linie este simetric,

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_l; \quad \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_l; \quad \underline{U}_{31} = a \underline{U}_l, \quad (\text{L15.8})$$

iar receptorul trifazat este dezechilibrat:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y} = G; \quad \underline{Y}_3 = G_3 - jB; \quad \underline{Y}_N = 0 \quad (\text{L15.9})$$

în care:  $G = 1/R$  – conductanța lămpilor;

$B = B_C < 0$  – susceptanța condensatorului

sau  $B = B_L > 0$  – susceptanța bobinei.

Sistemul trifazat nesimetric de tensiuni de fază la receptorul în stea se obține din rel. (L15.6), ținând cont de rel. (L15.9):

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1N} &= \frac{\underline{Y}_2 \underline{U}_{12} - \underline{Y}_3 \underline{U}_{31}}{2\underline{Y} + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}_{2N} &= \frac{\underline{Y}_3 \underline{U}_{23} - \underline{Y}_1 \underline{U}_{12}}{2\underline{Y} + \underline{Y}_3} \\ \underline{U}_{3N} &= \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{31} - \underline{Y}_2 \underline{U}_{23}}{2\underline{Y} + \underline{Y}_3} \end{aligned} \quad (\text{L15.10})$$

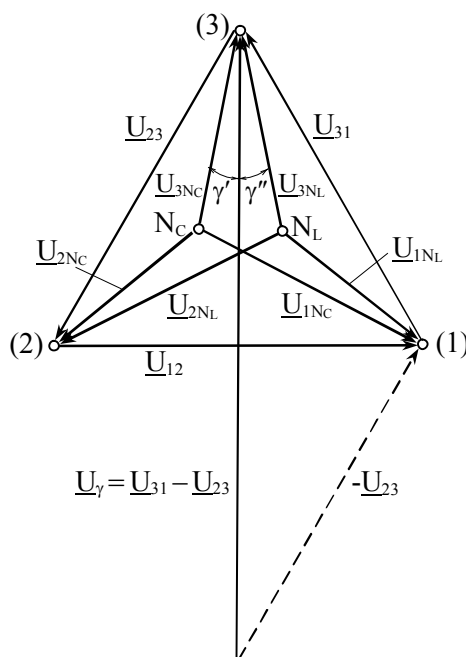


Fig. L15.3. Daigrama de tensiuni.

Dacă se neglijează pierderile în condensator și în bobină,  $G_3 = 0$ ,  $\underline{Y}_3 = -jB$ , tensiunea  $\underline{U}_{3N}$  la bornele acestora devine:

$$\underline{U}_{3N} = \frac{G}{2G + \underline{Y}_3} (\underline{U}_{31} - \underline{U}_{23}) = \frac{G}{2G + \underline{Y}_3} \underline{U}_\gamma \quad (\text{L15.11})$$

Se observă că fazorul  $\underline{U}_{3N}$  ( $\underline{U}_{3N_C}$  sau  $\underline{U}_{3N_L}$  în diagrama fazorială din fig. L15.3) este defazat față de fazorul  $\underline{U}_\gamma = \underline{U}_{31} - \underline{U}_{23}$  cu un unghi

$$\gamma = \arg \frac{G}{2G + \underline{Y}_3} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (\text{L15.12})$$

Acest unghi este negativ,  $\gamma = \gamma' < 0$  când  $\underline{Y}_3 = -jB_C$  este admitanța unui condensator, respectiv pozitiv,  $\gamma = \gamma'' < 0$  când  $\underline{Y}_3 = jB_L$  este admitanța unei bobine. În consecință, în cazul în care pe faza a treia se află un condensator (fig. L15.2,a), punctul neutru al receptorului  $N_C$  se deplasează la stânga verticalei  $\underline{U}_\gamma$ , iar când pe faza trei se află o bobină (fig. L15.2,b), punctul neutru al receptorului  $N_L$  se deplasează la dreapta verticalei  $\underline{U}_\gamma$  (fig. L15.3). Modificarea poziției punctului neutru, în ambele cazuri, este însoțită de apariția unor supratensiuni pe primele două faze, supratensiuni puse în evidență și prin modificarea intensităților luminoase a celor două lampi cu incandescență. Din rel. (L15.8) și (L15.10) rezultă:

$$\frac{\underline{U}_{1N}}{\underline{U}_{2N}} = \frac{G\underline{U}_{12} - \underline{Y}_3\underline{U}_{31}}{\underline{Y}_3\underline{U}_{23} - G\underline{U}_{12}} = \frac{G - a(G_3 - jB)}{a^2(G_3 - jB) - G} = \frac{2G + G_3 - \sqrt{3}B - j(\sqrt{3}G_3 + B)}{-2G - G_3 - \sqrt{3}B - j(\sqrt{3}G_3 - B)} \quad (\text{L15.13})$$

în care s-a înlocuit  $a = -1/2 + j\sqrt{3}/2$ , respectiv  $a^2 = -1/2 - j\sqrt{3}/2$ .

În cazul neglijării pierderilor în condensator și în bobină ( $G_3 = 0$ ), raportul valorilor efective ale tensiunilor pe fazele 1 și 2 la receptor rezultă:

$$\frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \sqrt{\frac{(2G - \sqrt{3}B)^2 + B^2}{(2G + \sqrt{3}B)^2 + B^2}} \quad (\text{L15.14})$$

Dacă receptorul conține un condensator (fig. L15.2,a),  $B < 0$  și rezultă  $U_{1N} > U_{2N}$ , iar când conține o bobină (fig. L15.2,b),  $B > 0$  și rezultă  $U_{1N} < U_{2N}$ , ceea ce rezultă și din diagrama fazorială trasată în fig. L15.3.

În cazul în care se aplică un sistem trifazat simetric de tensiuni de linie de succesiune directă, atunci în montajul cu condensator (fig. L15.2,a), această succesiune coincide cu sensul în care intensitatea luminoasă a celor două lămpi descrește, iar în montajul cu bobină (fig. L15.2,b), această intensitate luminoasă crește.

## 2.2. Verificarea experimentală a funcționării circuitelor trifazate dezechilibrate în regim permanent sinusoidal

Se studiază, mai întâi, cu ajutorul montajului din figura L15.4 funcționarea circuitului trifazat în regim permanent sinusoidal dezechilibrat, circuit care conține un receptor trifazat în conexiunea stea fără conductor neutru de forma celor prezentate în figura L15.2. Receptorul trifazat dezechilibrat se alimentează cu tensiuni simetrice din secundarul unui transformator trifazat.

Cu valorile efective ale tensiunilor și curenților măsurate de instrumentele de măsură de pe panou și cu un voltmetru portabil, se pot trasa, pentru diferite regimuri de încărcare (prin introducerea sau scoaterea acelorși rezistențe pe fazele R, S și T) diagramele fazoriale ale tensiunilor și curenților (fig. L15.5).

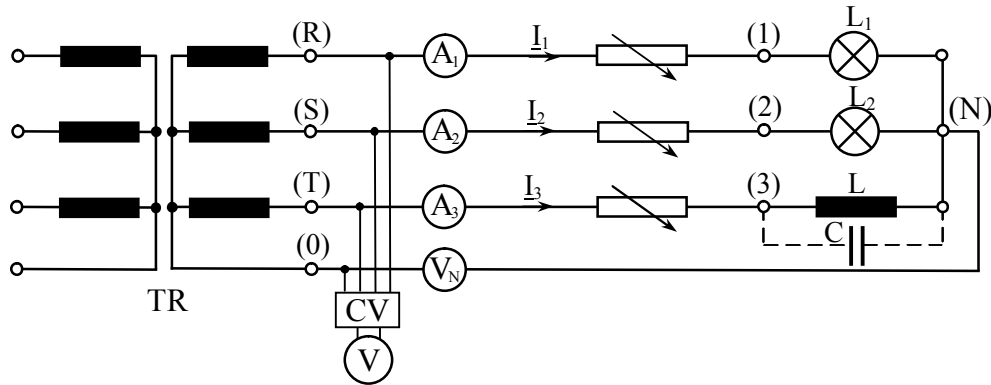


Fig. L15.4. Schema electrică a montajului experimental.

Pentru trasarea diagramelor fazoriale se procedează astfel:

- se reprezintă mai întâi, la o scară  $k_u$  aleasă convenabil, triunghiul echilateral al tensiunilor de linie simetrice  $\underline{U}_{12}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$  măsurate la bornele (1), (2), (3) ale receptorului și tensiunile de fază  $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$ ,  $\underline{U}_{30}$  măsurate între bornele acestuia nulul (0) din secundarul transformatorului TR (fig. L15.5,a);

- cu ajutorul unui compas se duc din punctele 1, 2, 3, la aceeași scară  $k_u$  tensiunile de fază la receptor  $\underline{U}_{1N_c}$ ,  $\underline{U}_{2N_c}$ ,  $\underline{U}_{3N_c}$ , determinând astfel punctul neutru  $N_c$

Rezultă, la scară, valoarea efectivă a tensiunii  $U_{N0}$  dintre neutrul receptorului ( $N_c$ ) și neutrul rețelei de alimentare (0) care trebuie să coincidă cu valoarea măsurată.

Pe diagrama de tensiuni se trasează și fazorii curenților de linie care coincid cu cei de fază. Cu valorile efective ale curenților măsurate de ampermetrele  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , la o scară  $k_i$  aleasă convenabil, se trasează fazorii curenților, ținând seama că pe fazele 1 și 2 (R și S) curenții  $\underline{I}_1$ , respectiv  $\underline{I}_2$  sunt în fază cu tensiunile  $\underline{U}_{1N_c}$ , respectiv  $\underline{U}_{2N_c}$ , iar pe faza 3 (T) curenții  $\underline{I}_3$  este defazat cu  $\pi/2$  înaintea tensiunii  $\underline{U}_{3N_c}$ . Dacă voltmetrul  $V_N$  are impedanța internă mare, atunci  $I_N = 0$  și diagrama fazorială de curenți trebuie să verifice relația  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ .

Supratensiunile care apar, determinate experimental ( $\underline{U}_{1N_c} / \underline{U}_{2N_c}$ ) se compară cu cele determinate cu ajutorul rel. (L15.14). De exemplu în cazul particular în care  $G = B$ , ( $1/R = \omega C$ ) din rel. (L15.14) rezultă:

$$\frac{U_{1N_c}}{U_{2N_c}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2 + 1}{(2 - \sqrt{3})^2 + 1}} = 3,73 \quad (\text{L15.15})$$

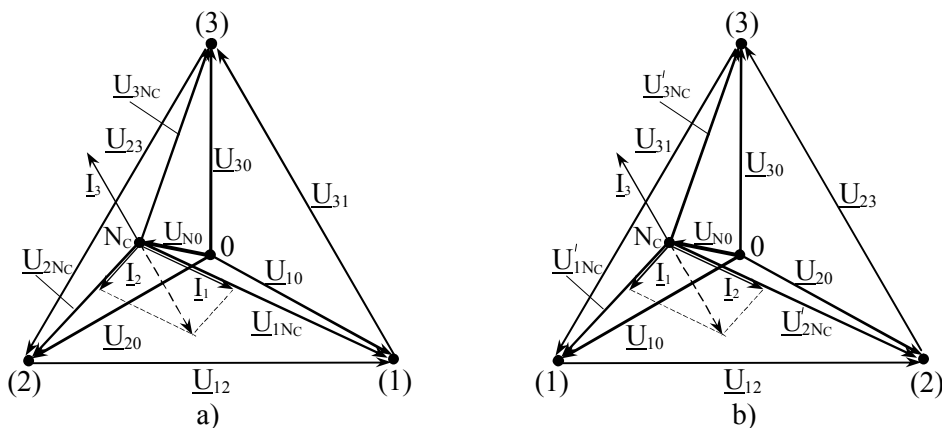


Fig. L15.5. Diagrame de tensiuni: a) succesiune directă; b) succesiune inversă.

În cazul în care receptorului trifazat dezechilibrat i se aplică un sistem trifazat simetric de tensiuni de fază de succesiune inversă (schimbând de exemplu bornele (R) și (S) din secundarul transformatorului TR între ele) atunci diagrama fazorială a tensiunilor și curenților se trasează în același mod ca și în cazul prezentat mai înainte (fig. L15.5,a) și se obține diagrama prezentată în figura L15.5,b). Se observă că fazorul  $\underline{U}'_{3N_C}$  corespunzător tensiunii pe condensator, adică pe faza 3 (care nu se modifică), are aceeași poziție ca în cazul succesiunii directe (fig. L15.5,a), deoarece fazorul  $\underline{U}_{31} - \underline{U}_{23}$ , ca și coeficientul  $G/(2G + \underline{Y}_3)$  sunt invariabili în raport cu succesiunea sistemului simetric de tensiuni de linie aplicat. Rezultă deci că poziția punctului neutru ( $N_C$ ) se deplasează totdeauna la stânga punctului neutru (0) a rețelei pentru receptorul capacitiv. Supratensiunea care apare se determină din rel.(L15.14), considerând sistemul de succesiune inversă de forma:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_j; \underline{U}_{23} = a\underline{U}_j; \underline{U}_{31} = a^2\underline{U}_j, \quad (L15.16)$$

Rezultă  $U'_{1N_C}/U'_{2N_C} < 1$ , iar ordinea de succesiune inversă corespunde sensului în care intensitatea lămpilor  $L_1$  și  $L_2$  crește. Se poate observa că în aceste diagrame fazorii  $\underline{U}_{3N_C}$  și  $\underline{U}_{2N_C}$  (L15.5,a), respectiv  $\underline{U}'_{3N_C}$  și  $\underline{U}'_{2N_C}$  (L15.5,b) nu pot fi defazați cu  $\pi/2$ .

În partea a doua a încercărilor experimentale, condensatorul C se substituie cu o bobină, având susceptanța inductivă  $B_L$  de același ordin de mărime cu susceptanța  $B_C$  a condensatorului. Aplicând acestui receptor un sistem trifazat simetric de tensiuni de linie de succesiune directă, se obține tensiunea pe bobină  $\underline{U}_{3N_L}$  de aceeași formă (L15.11), în care  $\underline{Y}_3 = jB_L$ , ( $B > 0$ ). Din diagrama fazorială a tensiunilor, prezentată în figura L15.3, rezultă că neutrul  $N_L$  al receptorului inductiv se deplasează la dreapta neutrulei 0 al generatorului. Apare în acest caz o supratensiune pe faza 2, pusă în evidență, atât de diagrama fazorială, cât și de rel.(L15.14). Modificând la fel rezistențele pe fazele R și S, se obține o succesiune de regimuri de funcționare, mărimile indicate de instrumentele de măsură trecându-se în tabelul L15.1.

Pentru cazul particular în care  $G = B$ , din rel.(L15.14) rezultă  $\underline{U}_{1N_L}/\underline{U}_{2N_L} \cong 0,27$ . Rezultă că ordinea de succesiune directă a fazelor corespunde ordinii în care crește intensitatea luminoasă pe cele două lămpi.

Aplicând acestui receptor un sistem trifazat simetric de tensiuni de linie de succesiune inversă, punctul neutru al receptorului  $N_L$  se deplasează tot la dreapta punctului 0 al generatorului și apare o supratensiune pe faza 1 față de faza 2. Ordinea de succesiune directă în acest caz, este ordinea în care scade intensitatea luminoasă a lămpilor (de la  $L_1$  spre  $L_2$ ).

Tabelul L15.1.

Tip circuit	Succes. fazelor	$U_{12}, U_{23}, U_{31}$ [V]	$U_{10}, U_{20}, U_{30}$ [V]	$I_1$ [A]	$I_2$ [A]	$I_3$ [A]	$U_{1N}$ [V]	$U_{2N}$ [V]	$U_{3N}$ [V]	$U_{N0}$ [V]
Circuitul cu condensator	directă									
	inversă									
Circuitul cu bobină	directă									
	inversă									

## FILTRE PENTRU COMPONENTE SIMETRICE

### 1. NOȚIUNI TEORETICE

#### 1.2. Principiul metodei componentelor simetrice

Filtrele pentru componente simetrice sunt circuite prevăzute cu borne de intrare la care se aplică mărimile nesimetrice și cu borne de ieșire la care se obțin componentele lor simetrice. Ele servesc pentru măsurarea componentelor simetrice, precum și pentru detectarea și protejarea împotriva regimurilor de avarie.

Metoda componentelor simetrice este o metodă indirectă de calcul a circuitelor trifazate liniare în regim permanent sinusoidal și constă în descompunerea unui sistem trifazat nesimetric de mărimi sinusoidale în trei sisteme simetrice, numite *componente simetrice* și apoi în suprapunerea regimurilor de funcționare produse de fiecare sistem simetric în parte.

Fie sistemul trifazat nesimetric dat de mărimile

$$\begin{cases} y_1(t) = \sqrt{2}Y_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ y_2(t) = \sqrt{2}Y_2 \sin(\omega t + \gamma_2) , \\ y_3(t) = \sqrt{2}Y_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \end{cases} \quad (\text{L16.1})$$

cu reprezentarea în complex:

$$\underline{Y}_1 = Y_1 e^{j\gamma_1}, \underline{Y}_2 = Y_2 e^{j\gamma_2}, \underline{Y}_3 = Y_3 e^{j\gamma_3} . \quad (\text{L16.2})$$

Sistemul nesimetric se descompune în trei sisteme simetrice (fig. L16.1):

- 1) sistemul simetric de succesiune directă,  $\underline{Y}_{1d} = \underline{Y}_d$ ;  $\underline{Y}_{2d} = a^2 \underline{Y}_d$ ;  $\underline{Y}_{3d} = a \underline{Y}_d$ ;
- 2) sistemul simetric de succesiune inversă,  $\underline{Y}_{1i} = \underline{Y}_i$ ;  $\underline{Y}_{2i} = a \underline{Y}_i$ ;  $\underline{Y}_{3i} = a^2 \underline{Y}_i$ ;
- 3) sistemul omopolar,  $\underline{Y}_{1h} = \underline{Y}_h$ ;  $\underline{Y}_{2h} = \underline{Y}_h$ ;  $\underline{Y}_{3h} = \underline{Y}_h$ .

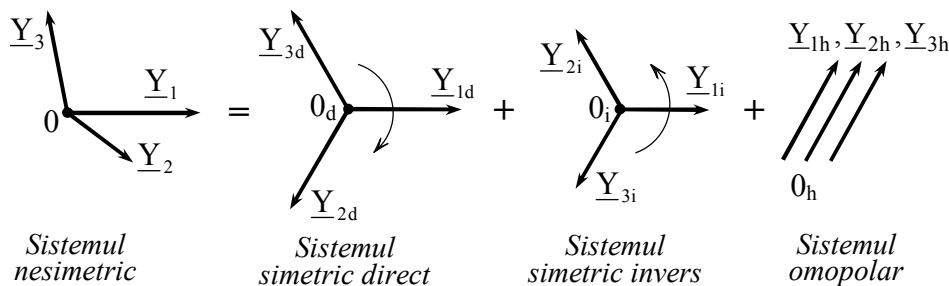


Fig. L16.1.

Relațiile dintre componentele corespunzătoare sistemului nesimetric și cele ale sistemelor simetrice sunt:

$$\begin{cases} \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{1d} + \underline{Y}_{1i} + \underline{Y}_{1h} \\ \underline{Y}_2 = \underline{Y}_{2d} + \underline{Y}_{2i} + \underline{Y}_{2h} \\ \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{3d} + \underline{Y}_{3i} + \underline{Y}_{3h} \end{cases} \quad \text{respectiv,} \quad \begin{cases} \underline{Y}_1 = \underline{Y}_d + \underline{Y}_i + \underline{Y}_h \\ \underline{Y}_2 = a^2 \underline{Y}_d + a \underline{Y}_i + \underline{Y}_h \\ \underline{Y}_3 = a \underline{Y}_d + a^2 \underline{Y}_i + \underline{Y}_h \end{cases} \quad (\text{L16.6})$$

Mărimile fundamentale  $\underline{Y}_d$ ,  $\underline{Y}_i$  și  $\underline{Y}_h$  se numesc respectiv *componenta directă*, *componenta inversă* și *componenta omopolară*.

Rezolvând invers sistemul de ecuații (L16.6), se obține:

$$\begin{cases} \underline{Y}_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + a \underline{Y}_2 + a^2 \underline{Y}_3) \\ \underline{Y}_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + a^2 \underline{Y}_2 + a \underline{Y}_3) \\ \underline{Y}_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \end{cases} \quad (\text{L16.7})$$

## 1.2. Exemple practice de filtre pentru componente simetrice

### 1.2.1. Filtrul pentru componenta omopolară de tensiune

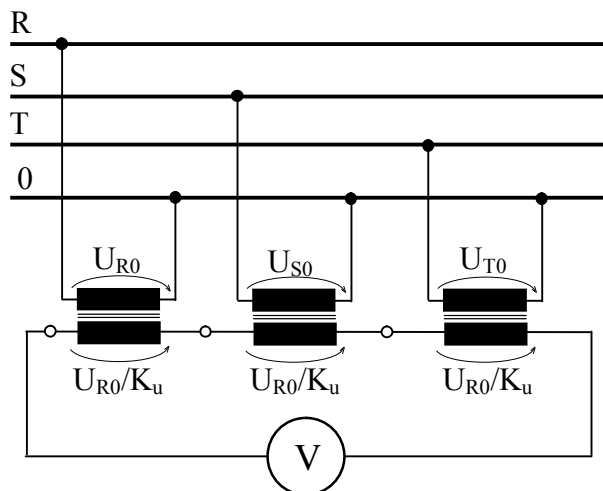


Fig. L16.2.

Filtrul prezentat în figura L16.2 se compune din trei transformatoare monofazate de tensiune identice cu înfășurările primare conectate între fiecare conductor de fază și firul neutru (nul) și cu înfășurările secundare legate în serie cu un voltmetru V.

S-a notat cu  $K_u$  raportul de transformare al transformatoarelor. Tensiunea la bornele voltmetrului este dată de relația

$$U = \frac{1}{K_u} (U_{R0} + U_{S0} + U_{T0}) = \frac{3}{K_u} U_h, \quad (\text{L16.8})$$

în care  $U_h$  este valoarea efectivă a componentei omopolară a tensiunilor de fază.

### 1.2.2. Filtrul pentru componenta omopolară de curent

Schema filtrului prezentat în fig. L16.3 se compune din trei transformatoare de curent identice, cu înfășurările primare conectate în serie cu fiecare fază și cu înfășurările secundare legate în paralel cu un ampermetru A. Curentul prin ampermetru rezultă

$$I = \frac{1}{K_I} (I_R + I_S + I_T) = \frac{3}{K_I} I_h \quad (\text{L16.9})$$

în care,  $K_I$  este raportul de transformare al curentilor,  $I_h$  – valoarea efectivă a componente omopolare de curent.

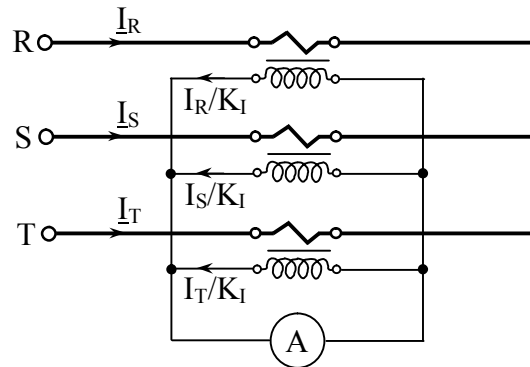


Fig. L16.3.

### 1.2.3. Filtrul pentru componentele directă și inversă ale tensiunilor de linie

În figura L16.4 se prezintă filtrul propus de L.P. Kalantarov. Nesimetria sistemului tensiunilor de linie este asigurată prin alimentarea primei faze cu o tensiune reglabilă în trepte din secundarul transformatorului TR.

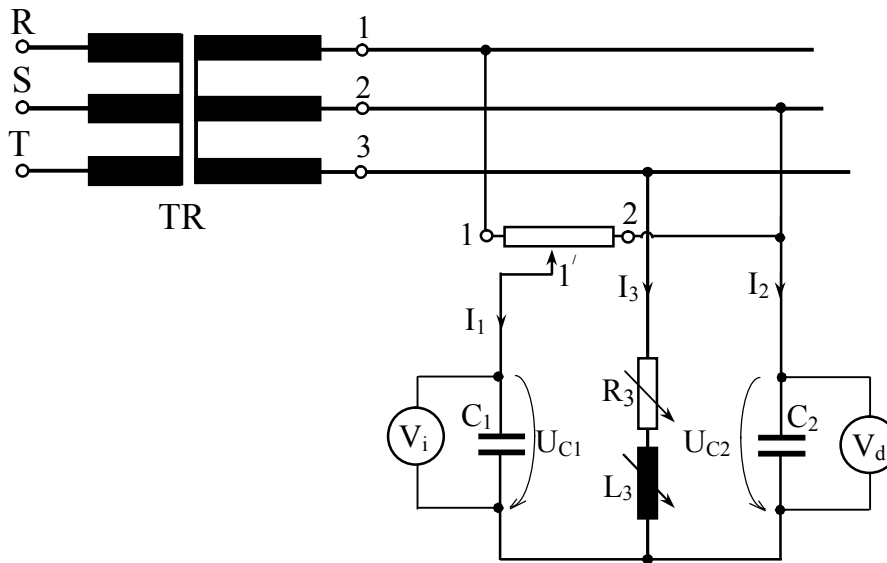


Fig. L16.4.

Fie  $\underline{U}_{1'2}$ ,  $\underline{U}_{23}$ ,  $\underline{U}_{31}$ , un sistem nesimetric de tensiuni de linie (fig. L16.5), având componentele simetrice  $\underline{U}_{\ell d}$  și  $\underline{U}_{\ell i}$ .

Componenta omopolară  $U_h = 0$  și

$$\begin{cases} \underline{U}_{1'2} = \underline{U}_{\ell d} + \underline{U}_{\ell i} \\ \underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}_{\ell d} + a \underline{U}_{\ell i} \\ \underline{U}_{31'} = a \underline{U}_{\ell d} + a^2 \underline{U}_{\ell i} \end{cases} \quad (\text{L16.10})$$

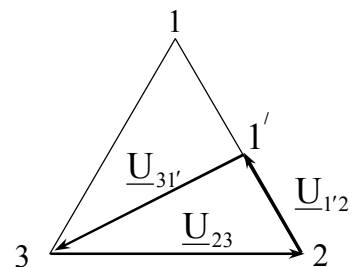


Fig. L16.5.



În circuitul din fig. L16.4 se consideră identice condensatoarele,  $C_1 = C_2 = C$ ,

$$X_{C_1} = X_{C_2} = X \quad (\text{L16.11})$$

și se determină valorile rezistenței rezistorului  $R_3$  și reactanței bobinei,  $X_3 = \omega L_3$ , astfel încât tensiunea pe cele două condensatoare  $U_{C1}$  și  $U_{C2}$ , măsurate cu voltmetrele  $V_i$  și  $V_d$ , să fie proporționale cu  $U_{\ell i}$ , respectiv  $U_{\ell d}$ . În acest scop se exprimă  $\underline{U}_{C1}$  și  $\underline{U}_{C2}$  și se impune condiția de proporționalitate.

Din schema prezentată în figura L16.4, rezultă

$$\begin{cases} \underline{U}_{1'2} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 \\ 0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \end{cases} \quad (\text{L16.11})$$

Dacă se are în vedere că  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = -jX = -j/\omega C$ ,  $\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3$  și că tensiunile pe cele două condensatoare sunt  $\underline{U}_{C1} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1$  și  $\underline{U}_{C2} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$  din rel. (L16.11) se determină:

$$\begin{cases} \underline{U}_{C1} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{Z} \frac{(\underline{Z} + \underline{Z}_3) \underline{U}_{1'2} + \underline{Z} \underline{U}_{13}}{\underline{Z}(2\underline{Z}_3 + \underline{Z})} \\ \underline{U}_{C2} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{Z} \frac{\underline{Z} \underline{U}_{23} - \underline{Z}_3 \underline{U}_{1'2}}{\underline{Z}(2\underline{Z}_3 + \underline{Z})} \end{cases} \quad (\text{L16.12})$$

Exprimând în (L16.12) tensiunile de linie prin componentele lor simetrice, se obține:

$$\begin{cases} \underline{U}_{C1} = \frac{(\underline{Z}_3 - a\underline{Z}) \underline{U}_{\ell d} + (\underline{Z}_3 - a^2 \underline{Z}) \underline{U}_{\ell i}}{2\underline{Z}_3 + \underline{Z}} \\ \underline{U}_{C2} = \frac{(a^2 \underline{Z} - \underline{Z}_3) \underline{U}_{\ell d} + (a\underline{Z} - \underline{Z}_3) \underline{U}_{\ell i}}{2\underline{Z}_3 + \underline{Z}} \end{cases} \quad (\text{L16.13})$$

Pentru ca tensiunea  $\underline{U}_{C1}$  să fie proporțională cu componenta inversă  $U_{\ell i}$  și ca tensiunea  $\underline{U}_{C2}$  să fie proporțională cu componenta directă  $U_{\ell d}$  este necesar ca

$$\underline{Z}_3 - a\underline{Z} = 0 \quad \text{sau} \quad R_3 + jX_3 = \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-jX). \quad (\text{L16.14})$$

Se obțin valorile

$$\begin{cases} R_3 = \frac{X\sqrt{3}}{2} \\ X_3 = \frac{X}{2} \end{cases} \quad (\text{L16.15})$$

care permit dimensionarea filtrului.

În aceste condiții,

$$\begin{cases} \underline{U}_{C1} = \underline{U}_{\ell i} \\ \underline{U}_{C2} = \underline{U}_{\ell d} \end{cases} \quad (\text{L16.16})$$

Voltmetrele  $V_i$  și  $V_d$ , care indică valorile efective ale tensiunilor pe condensatoare, vor măsura direct (factor de proporționalitate 1) componenta inversă, respectiv directă a sistemului nesimetric al tensiunilor de linie.

### 1.2.4. Filtrul pentru componenta homopolară a sistemului nesimetric al tensiunilor de fază

Se consideră receptorul trifazat dezechilibrat cu impedanțele  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  conectate în stea ca în figura L16.6. Receptorul dezechilibrat, alimentat cu un sistem

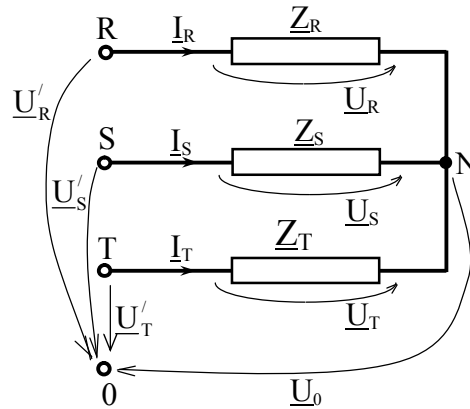


Fig. L16.6.

trifazat simetric de tensiuni  $U'_R, U'_S, U'_T$ , are tensiunile de fază  $\underline{U}_R, \underline{U}_S, \underline{U}_T$  nesimetrice

$$\begin{cases} \underline{U}_R = \underline{Z}_R \underline{I}_R = \underline{U}'_R - \underline{U}_0 \\ \underline{U}_S = \underline{Z}_S \underline{I}_S = \underline{U}'_S - \underline{U}_0 \\ \underline{U}_T = \underline{Z}_T \underline{I}_T = \underline{U}'_T - \underline{U}_0 \end{cases} \quad (\text{L16.17})$$

Componenta homopolară a sistemului nesimetric  $\underline{U}_R, \underline{U}_S, \underline{U}_T$  este dată de relația

$$\underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T) = \frac{1}{3}(\underline{U}'_R + \underline{U}'_S + \underline{U}'_T - 3\underline{U}_0) = -\underline{U}_0 \quad (\text{L16.18})$$

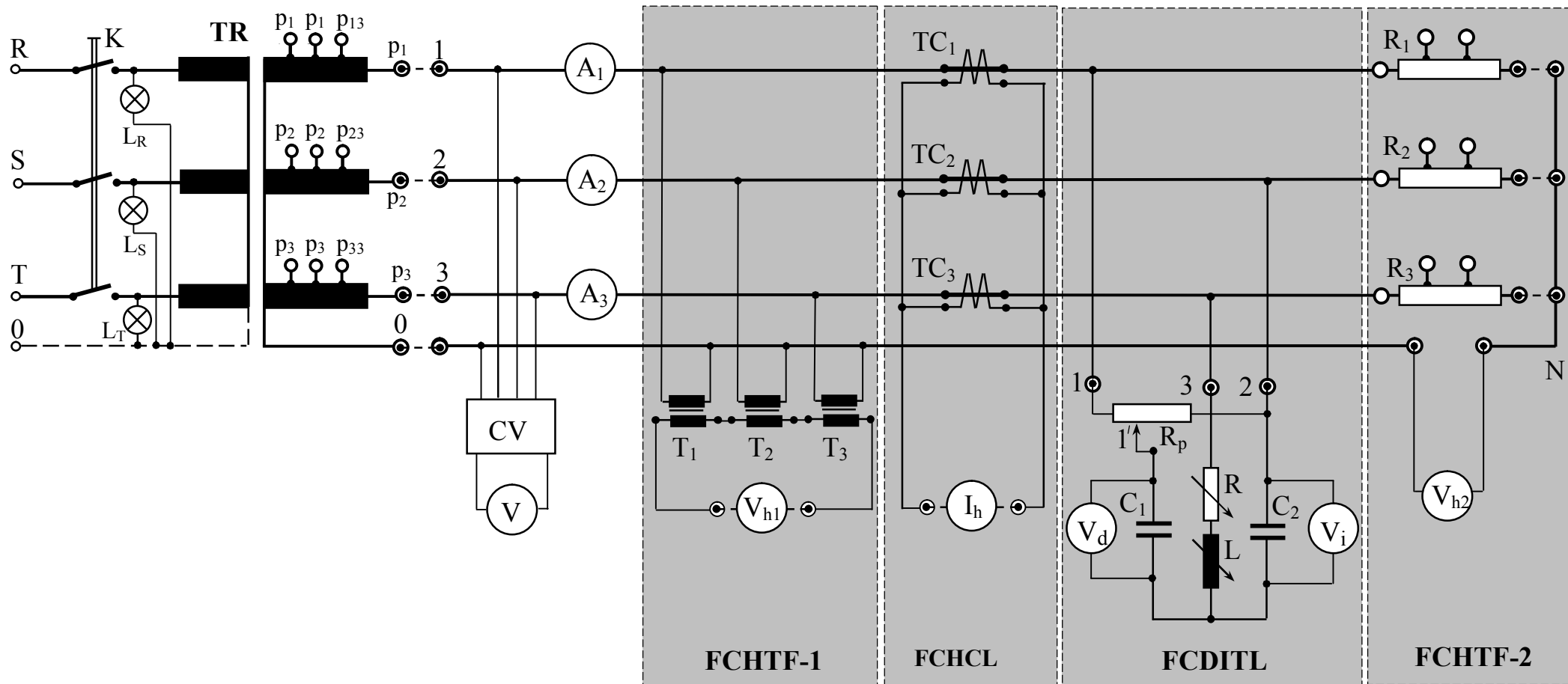
În aceste condiții un voltmetru montat între neutrul receptorului N și neutrul rețelei de alimentare 0, măsoară direct componenta homopolară a tensiunilor de fază ale receptorului.

## 2. MODUL DE LUCRU

### 2.1. Instalația experimentală

Schema electrică a instalației de laborator pentru studiul filtrelor pentru componente simetrice este prezentată în figura L16.7. Instalația cuprinde următoarele elemente:

- K = comutator pachet pentru conectarea tensiunii de alimentare;
- $L_R, L_S, L_T$  = lămpi de semnalizare (LED-uri) pentru prezența tensiunii pe cele trei faze ale rețelei de alimentare;
- TR = transformatorul trifazat de rețea pentru reducerea tensiunii;
- $A_1, A_2, A_3$  = ampermetre feromagnetice cu domeniul  $0 \div 3A$  pentru măsurarea curentului din secundarul transformatorului TR;
- CV = cheie voltmetrică CV;
- V = voltmetru pentru măsurarea tensiunilor din secundarul transformatorului;



**Fig. L16.7. SCHEMA ELECTRICĂ A INSTALAȚIEI PENTRU STUDIUL REȚELELOR ELECTRICE TRIFAZATE:**

FCHTF –1,2 = filtre pentru componenta homopolară a tensiunilor de fază – varianta 1, varianta 2;

FCHCL = filtrul pentru componenta homopolară a curenților de linie;

FCDITL = filtru pentru componentele directă și inversă a tensiunilor de linie.

- $T_1, T_2, T_3$  = transformatoare monofazate, utilizate pentru realizarea filtrului pentru componenta homopolară a tensiunilor de fază, FCHTF-1;
- $TC_1, TC_2, TC_3$  = transformatoare de curent, utilizate pentru realizarea filtrului pentru componenta homopolară a curenților de linie, FCHCL;
- $R_1, R_2, R_3$  = rezistoare de putere cu prize intermediare ce pot fi conectate în stea pentru a studia a doua variantă de filtru pentru componenta homopolară a tensiunilor de fază FCHTF-2.

Instalația este prevăzută cu trei borne la care se pot conecta diferite tipuri de filtre pentru componente simetrice. În figura L16.7 este exemplificată conectarea filtrului Kalantarov pentru componentele directă și inversă a tensiunilor de linie (FCDITL).

## 2.2. Filtre pentru componenta homopolară a tensiunilor de fază

Instalația din laborator permite realizarea a două filtre pentru măsurarea componentelor simetrice a tensiunilor de fază. În situația alimentării cu tensiuni simetrice (se fac legăturile la aceleași prize pe fiecare înfășurare din secundarul transformatorului de rețea) și se dezechilibrează receptorul format de rezistoarele  $R_1, R_2, R_3$  conectate în stea. Se conectează voltmetrele  $V_{h1}$  și  $V_{h2}$  la filtrele FCHTF-1, respectiv FCHTF-2. Componenta homopolară a tensiunilor de fază este indicată direct de voltmetrul  $V_{h2}$  conectat între nulul receptorului N și nulul rețelei de alimentare 0 (neutul secundarului transformatorului de rețea). Se măsoară tensiunile  $U_{1N}, U_{2N}, U_{3N}$  pe rezistoarele  $R_1, R_2, R_3$ . Componenta homopolară a tensiunilor de fază se determină și prin calcul cu relația (L16.18), respectiv,

$$U_h = \frac{1}{3}(U_{1N} + U_{2N} + U_{3N}). \quad (L16.19)$$

Aceeași componentă homopolară se determină și cu filtrul FCHTF-1. Se scurtcircuitază bornele la care s-a legat voltmetrul  $V_{h2}$  și se deconectează legătura la nulul 0 a secundarului transformatorului TR. Componenta homopolară se calculează funcție de tensiunea  $U_{h1}$  indicată de voltmetrul  $V_{h1}$  pe baza relației (L16.8) respectiv,

$$U_h = \frac{1}{3}(U_{1N} + U_{2N} + U_{3N}) = \frac{K_u}{3} U_{h1}. \quad (L16.20)$$

Se explică eventualele diferențe ale valorilor componente homopolare care rezultă din măsurarea acesteia cu ajutorul celor două filtre.

## 2.2. Filtrul pentru componenta homopolară a curenților de linie

Se conectează un ampermetru la bornele filtrului FCHCL. Pe firul neutru se înseriază un ampermetru (în locul voltmetrului  $V_{h2}$ ). Se dezechilibrează tensiunile de alimentare (se fac legăturile la prize diferite pe înfășurările de fază din secundarul transformatorului de rețea) și se citesc valorile curenților absorbiți de receptorul trifazat echilibrat format de rezistoarele  $R_1, R_2, R_3$  conectate în stea. Ampermetrul înseriat pe firul neutru indică direct valoarea componente homopolare a curenților de linie  $I_1, I_2, I_3$ . Aceeași valoare a componente homopolare a curenților se calculează funcție de curentul I indicat de ampermetrul montat la bornele filtrului FCHCL pe baza relației (L16.9) respectiv,

$$I_h = \frac{1}{3}(I_R + I_S + I_T) = \frac{K_I}{3} I. \quad (L16.21)$$

Se explică eventualele diferențe ale valorilor componentei homopolare a curenților obținute prin aceste două metode și prin calcul.

### 2.3. Filtrul pentru componentele directă și inversă ale tensiunilor de linie

Se calculează parametrii filtrului de tip Kalantarov cu relațiile (L16.15) pentru o valoare a capacității condensatoarelor  $C_1 = C_2 = 2\mu\text{F}$  și se realizează montajul filtrului FCDITL din figura L16.4. Se verifică funcționarea corectă a filtrului pentru două cazuri:

- tensiuni de alimentare simetrice (cursorul 1' al potențiometrului  $R_p$  pe poziția 1) – voltmetrul  $V_i$  trebuie să indice zero, iar voltmetrul  $V_d$  să indice valoarea tensiunii de linie din secundarul transformatorului de rețea TR;

- tensiuni de alimentare nesimetrice (cursorul 1' al potențiometrului  $R_p$  pe poziția 2) – tensiunea de linie  $U_{1'2} = 0$  și conform relațiilor (L16.10)  $U_{ld} = U_{li}$ . În acest caz indicațiile celor două voltmetre  $V_1$  și  $V_2$  trebuie să fie identice.

Dacă nu sunt îndeplinite aceste condiții se modifică  $R_3$  și  $L_3$  până se ajunge la un optimum.

Pentru trei poziții diferite ale cursorului potențiometrului  $R_p$  se măsoară tensiunile de linie și componentele lor simetrice, trecând datele în tabelul L16.1.

Tabelul L16.1.

Nr. crt.	$U_{1'2}$	$U_{23}$	$U_{31'}$	$U_{ld}$	$U_{li}$
	[V]	[V]	[V]	[V]	[V]
1.					
2.					
3.					

Componentele simetrice ale tensiunilor de linie directă  $U_{ld}$  și inversă  $U_{li}$  se exprimă funcție de tensiunile de alimentare nesimetrice ale filtrului,  $U_{1'2}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31'}$ , conform rel. (L 16.7), respectiv,

$$\begin{cases} U_{ld} = \frac{1}{3}(U_{1'2} + aU_{23} + a^2U_{31'}) \\ U_{li} = \frac{1}{3}(U_{1'2} + a^2U_{23} + aU_{31'}) \end{cases} \quad (\text{L16.22})$$

Valoarea efectivă a acestor componente este indicată direct de voltmetrele  $V_d$  și  $V_i$ . Pentru fiecare din cele trei grupuri de măsurători din tabelul 1 se determină și grafic valorile acestor componente prin construcția diagramelor fazoriale corespunzătoare, așa cum se exemplifică în figura L16.8.

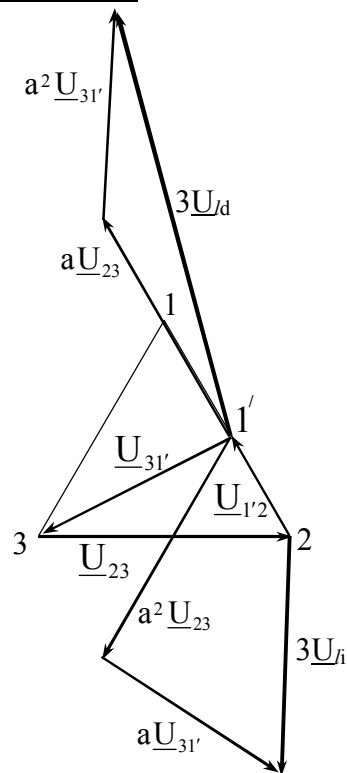


Fig. L16.8.

## ANALIZA ARMONICĂ A SEMNALELOR PERIODICE NESINUSOIDALE

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

În rețelele electrice de transport și distribuție a energiei electrice forma de variație în timp a tensiunilor și curenților nu este riguros sinusoidală, iar abaterea se numește *distorsiune sau deformare*.

Regimul permanent al circuitelor electrice caracterizat prin faptul că semnalele de tensiune sau/și de curent sunt mărimi periodice nesinusoidale se numește *regim permanent periodic nesinusoidal sau regim deformant*.

Analiza circuitelor electrice în regim permanent periodic nesinusoidal se realizează cel mai des printr-o analiză armonică bazată pe dezvoltarea în serie Fourier a semnalelor nesinusoidale din circuit.

#### 1.1. ANALIZA ARMONICĂ A SEMNALELOR PERIODICE

##### 1.1.1. Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor periodice nesinusoidale

O funcție de timp  $y(t)$  periodică, de perioadă  $T$ , care satisface condițiile lui Dirichlet, se reprezintă pe intervalul unei perioade prin seria:

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \sin k\omega t, \quad (L17.1)$$

numită *serie Fourier* sau *serie trigonometrică*.

Termenii  $A_{m1} \cos \omega t$  și  $B_{m1} \sin \omega t$  pentru  $k = 1$ , se numesc *fundamentale în cosinus*, respectiv *în sinus*, iar  $A_{mk} \cos k\omega t$  și  $B_{mk} \sin k\omega t$  pentru  $k \geq 2$ , sunt *armonici de ordinul  $k$  în cosinus*, respectiv *în sinus*, iar termenul  $A_0$  este *componenta continuă*.

Amplitudinile  $A_{mk}$ ,  $B_{mk}$  și componenta  $A_0$  se numesc și *coeficienți Fourier* și se determină cu relațiile [?]

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt; \quad A_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt; \quad B_{mk} = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt; \quad k = 1, 2, \dots \quad (L17.2)$$

În studiul circuitelor electrice în regim periodic permanent se utilizează și următoarea formă a dezvoltării în serie Fourier a unei funcții periodice:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (L17.3)$$

în care  $Y_0$  este componenta continuă și  $y_k(t)$  este armonica de ordinul  $k$ , având valoarea efectivă  $Y_k$  și faza inițială  $\gamma_k$  (redușă la intervalul  $[-\pi, \pi]$ ).

Identificând expresiile dezvoltărilor (L17.1) și (L17.3), rezultă următoarele relații între coeficienții Fourier ai celor două serii:

$$Y_0 = A_0; \sqrt{2}Y_k = \sqrt{A_{mk}^2 + B_{mk}^2}; \gamma_k = \arctg \frac{A_{mk}}{B_{mk}}. \quad (L17.4)$$

În electrotehnică, unde perioadei  $T$  îi corespunde unghiul  $2\pi$  și faza se notează cu  $\alpha = \omega t$ , seria Fourier se scrie sub forma

$$y(\alpha) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}A_k \cos k\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}B_k \sin k\alpha, \quad (L17.5)$$

$$\text{în care: } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) d\alpha; \sqrt{2}A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \cos k\alpha d\alpha; \sqrt{2}B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \sin k\alpha d\alpha;$$

$$\text{respectiv, } y(\alpha) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}Y_k \sin(k\alpha + \gamma_k), \quad (L17.6)$$

$$\text{cu: } Y_0 = A_0; Y_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{și} \quad \gamma_k = \arctg \frac{A_k}{B_k}.$$

### 1.1.2. Seria Fourier complexă

O funcție periodică reală  $y(t)$  care admite o dezvoltare în serie Fourier de forma (L17.1) se poate scrie și ca sumă a unei serii cu termeni complecși de forma [?]:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_{mk} e^{jk\omega t}, \quad (L17.7)$$

$$\text{unde, } C_{mk} = \frac{A_{mk} - jB_{mk}}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (L17.8)$$

se numește *amplitudine complexă spectrală*.

În analiza armonică interesează amplitudinile armonicilor și programele de calcul (de exemplu Matlab) utilizează forma discretă (numerică) a transformatei Fourier (DFT – Discret Fourier Transform) numită și *transformata Fourier rapidă* (FFT – Fast Fourier Transform) datorită rapidității de calcul. În acest fel, amplitudinea complexă spectrală se calculează cu o relație de forma:

$$C_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-jn\omega_s k}, \quad \omega_s = \frac{2\pi}{N} = 2\pi f_s, \quad (L17.9)$$

$N$  fiind numărul de eșantioane pe o perioadă ( $f_s$  – frecvența de eșantionare).

### 1.1.3. Spectrul de frecvență al unei mărimi periodice

Graficul amplitudinilor  $\sqrt{2}Y_k$  ale armonicilor unei funcții periodice cu dezvoltarea în serie de forma

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}Y_k \sin(k\omega t + \gamma_k),$$

conține în planul  $(\sqrt{2}Y, \omega)$  segmente proporționale cu amplitudinile  $\sqrt{2}Y_k$  și se numește *spectru de frecvență* (fig. L17.1,a). Spectrul funcțiilor periodice este un spectru discret.

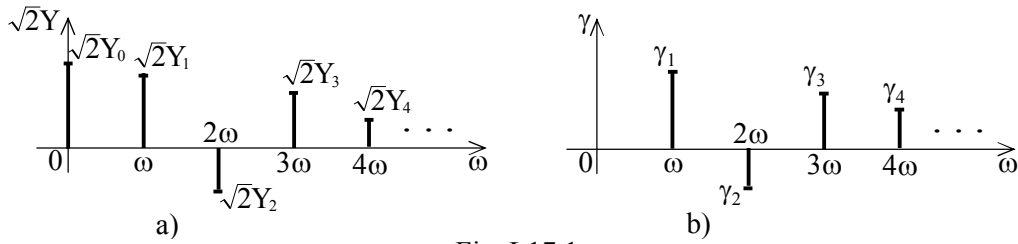


Fig. L17.1.

Seria Fourier a unei funcții este univoc determinată dacă pe lângă spectrul de frecvență al amplitudinilor se dă și *spectrul de frecvență al fazelor inițiale* ale armonicilor (fig. L17.1,b).

### 1.1.3. Mărimi caracteristice ale semnalelor periodice nesinusoidale

❶ *Valoarea efectivă Y a unei mărimi periodice y(t)* se definește în general, prin relația:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} \quad (\text{L17.10})$$

În funcție de valorile efective  $Y_k$  ale armonicilor și de valoarea componentei continue  $Y_0$  din dezvoltarea în serie Fourier, se obține [?]

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 + \dots} = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_d^2}, \quad (\text{L17.11})$$

unde  $Y_d$  se numește *reziduul deformat*, dat de valoarea efectivă a armonicilor de ordin superior ( $k \geq 2$ ):  $Y_d = \sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \dots + Y_n^2 + \dots}$

Astfel, pentru tensiune și curent cu dezvoltările

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \quad i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \beta_n),$$

valorile efective sunt respectiv

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_d^2}, \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_d^2},$$

unde reziduurile deformante ale tensiunii și curentului sunt respectiv

$$U_d = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_n^2 + \dots}; \quad I_d = \sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2 + \dots}$$

### ❷ *Factor de vârf, factor de formă și coeficient de distorsiune.*

*Factorul de vârf*  $k_v$  al unei funcții periodice alternative  $y(t)$ , se definește prin raportul dintre valoarea de vârf și valoarea efectivă:

$$k_v = \frac{\hat{y}}{Y} = \frac{Y_{\max}}{\sqrt{Y_1^2 + Y_d^2}}. \quad (\text{L17.12})$$

*Factorul de formă*  $k_f$  al unei funcții periodice alternative se definește prin raportul dintre valoarea efectivă  $Y$  și valoarea medie pe o jumătate de perioadă:

$$k_f = \frac{Y}{\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} y(t) dt} \quad (\text{L17.13})$$

în care  $t_0$  este momentul trecerii prin zero a funcției  $y(t)$  cu valori crescătoare.



Coeficientul de distorsiune  $k_d$  al unei funcții periodice  $y(t)$  se definește prin raportul dintre rezidiul deformat  $Y_d$  și valoarea efectivă a componentei alternative:

$$k_d = \frac{Y_d}{\sqrt{Y^2 - Y_0^2}} = \frac{\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2 + \dots}}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 + \dots}} \quad (L17.14)$$

Coeficientul  $k_d$  este pozitiv și subunitar. Dacă  $k_d \leq 0,05$  (5%) tensiunile și curenții periodici pot fi aproximați sinusoidali. În literatura de specialitate, coeficientul de distorsiune este notat THD (Total Harmonic Distorsion – engl.).

În cazul mărimilor sinusoidale:  $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$ ;  $k_v = \sqrt{2}$ ;  $k_d = 0$ .

## 2. STUDIUL EXPERIMENTAL AL REGIMULUI PERIODIC NESINUSOIDAL

### 2.1. GENERAREA ȘI ANALIZA ARMONICĂ A UNOR SEMNALE PERIODICE NESINUSOIDALE

Se realizează programe în Matlab pentru generarea unor semnale particulare, întâlnite frecvent în electrotehnică. Datele obținute sunt memorate în fișiere de date Matlab cu extensia \*.mat sub forma unei matrici având pe prima linie timpul și pe a doua valorile corespunzătoare ale funcției. Semnalele astfel memorate vor fi apoi analizate cu ajutorul unui program sau cu o interfață grafică interactivă realizate tot în mediul MATLAB. Se consideră următoarele două exemple.

❶ **Funcția crenel** are graficul simetric față de ordonată:  $y(t) = y(-t)$ . Un exemplu de astfel de undă (fig. L17.2) este descrisă de relația:

$$y(t) = \begin{cases} Y_m, & 0 \leq t < \frac{T}{3} \text{ si } \frac{2T}{3} \leq t < T \\ 0, & \frac{T}{3} \leq t < \frac{2T}{3} \end{cases} \quad (L17.15)$$

O variantă a programului MATLAB pentru generarea acestei unde este:

```
% Program pentru generarea unei CRENEL (funcție pară)
clear
clc
clg
A=1; f1=50; T=1/f1; P=4*A/T; p=10^(-4);
t=0:p:(2*T-p);
Np=max(size(t));
for i=1:Np
    if (((t(i)>=0)&(t(i)<T/3))|((t(i)>=2*T/3)&(t(i)<T)))
        y(i)=A;
    elseif ((t(i)>=T/3)&(t(i)<2*T/3))
        y(i)=0;
    else
        y(i)=y(i-(Np-1)/2);
    end
end
plot(t,y,'-w'), grid;
axis([0 .04 0 1.05 ]);
D=[t ;y] ; save D fdintef.mat;
```

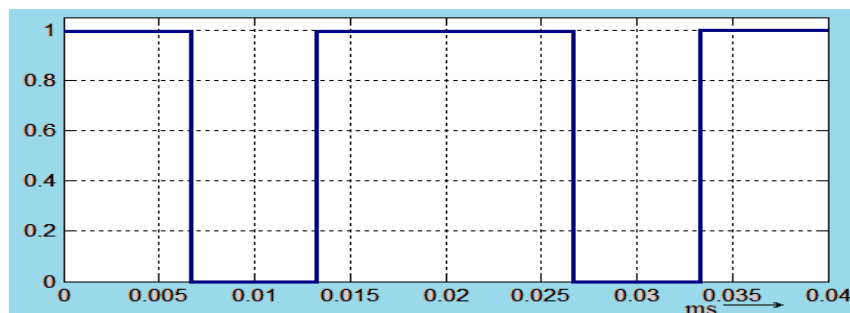


Fig. L17.2. Funcția crenel pară.

② **Funcția dinte de fierăstrău.** Funcția dinte de ferăstrău considerată este o funcție alternativ simetrică impară având curba simetrică față de origine,  $y(t) = -y(-t)$  și față de abscisă după suprapunerea semiperioadelor,  $y(t) = -y(t+T/2)$ . Forma unei este dată în figura L17.3 și are expresia analitică de forma:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ \frac{2(t-T)}{T}, & \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad (\text{L17.16})$$

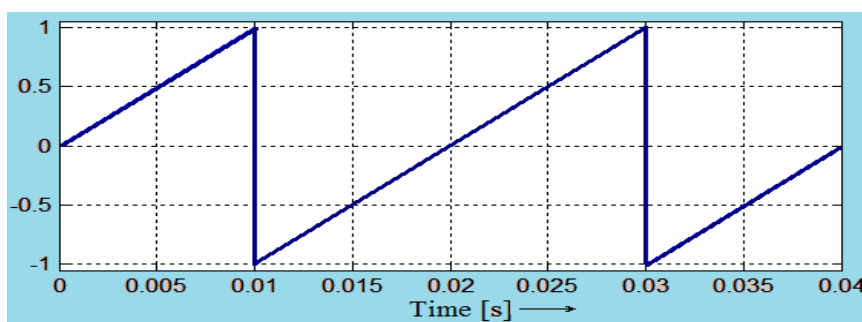


Fig. L17.3. Funcția dinte de fierăstrău.

③ **Analiza armonică a unei funcții arbitrar aleasă.**

Pentru verificarea programului de analiză armonică se consideră o funcție definită de relația:

$$y(t) = \sin\left(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) + 0,2 \cdot \sin\left(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) + 0,3 \cdot \sin\left(3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) + 0,6 \cdot \sin\left(6 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t\right) + 0,7 \cdot \sin\left(7 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Curba corespunzătoare acestei funcții este dată în figura L17.4.

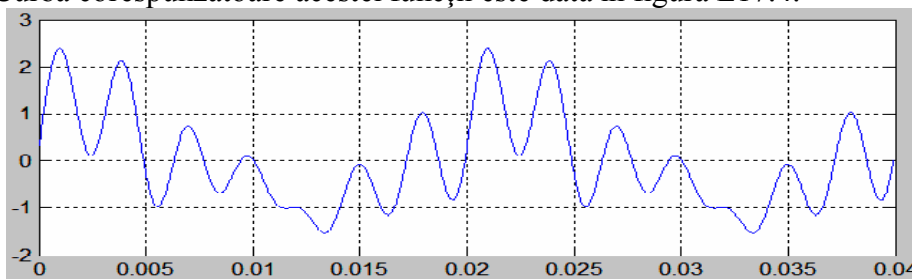


Fig. L17.4. Funcția arbitrar aleasă pentru analiza armonică.

După realizarea programelor de generare a acestor semnale se va efectua analiza armonică, utilizând programele existente, realizate în Matlab.

O interfață grafică interactivă permite analiza armonică a semnalelor generate prin programe sau obținute prin simulare sau prin achiziții de date din instalații reale și stocate în fișiere de date cu extensia *mat* (\*.mat). Interfața grafică, cu panoul interactiv prezentat în figura L17.5, permite analiza armonică a semnalelor distorsionate cu transformata Fourier rapidă (FFT), realizând următoarele funcții:

- ① afișarea curbei semnalului temporal analizat;
- ② determinarea și afișarea grafică a spectrului amplitudinilor și a coeficientului total de distorsiuni (THD);
- ③ determinarea și afișarea grafică a spectrului de frecvență al fazelor;
- ④ determinarea și afișarea grafică a densității spectrale de putere.

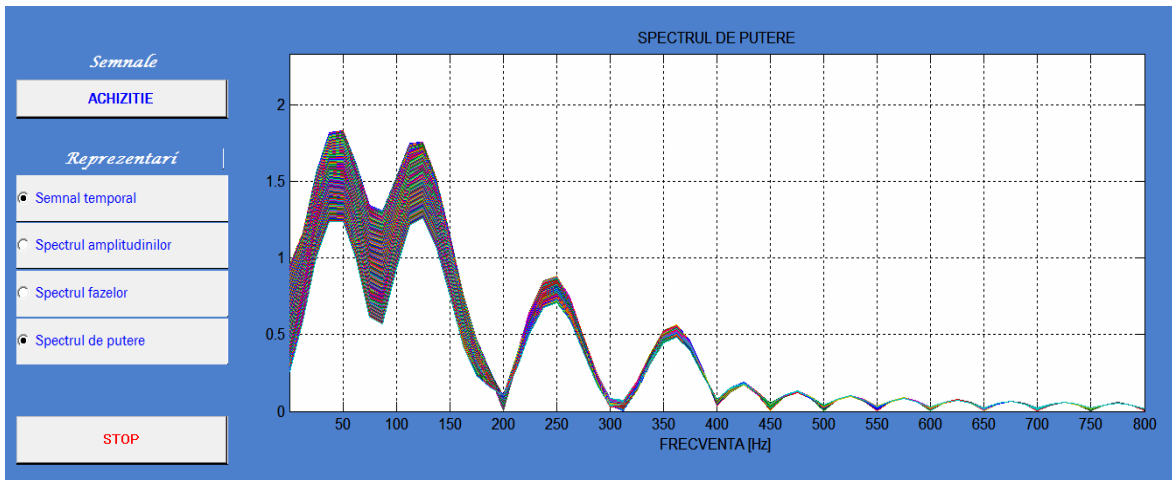


Fig. L17.5. Interfața grafică interactivă pentru analiza armonică.

## 2.2. SIMULAREA ȘI ANALIZA ARMONICĂ A CURENTULUI DE REȚEA A UNUI REDRESOR TRIFAZAT

Pentru analiza armonică a regimului deformant produs de mutatoare se consideră cazul unui redresor de putere în punte trifazată complet comandată. Redresorul este simulat cu ajutorul programului Simulink din mediul Matlab, schema bloc de simulare fiind prezentată în figura L17.6.

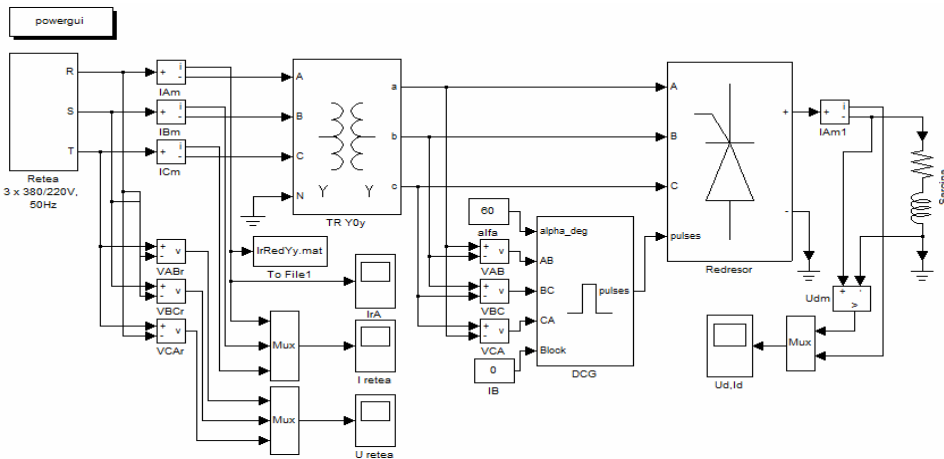


Fig. L17.7. Schema bloc de simulare a redresorului trifazat.

Principalele blocuri ale schemei de simulare sunt:

- *Rețea* – rețeaua trifazată de alimentare,  $3 \times 380/220V$ , 50Hz;
- *TR* – transformator trifazat, bloc din biblioteca PowerSys cu posibilitatea setării conexiunilor din primar și secundar, și ai principalilor parametri;
- *Redresor* – redresor trifazat în punte complet comandată cu tiristoare, bloc din biblioteca PowerSys;
- *DCG* – circuitul de comandă pe grilă a tiristoarelor redresorului, bloc din biblioteca PowerSys cu posibilitatea prescrierii unghiului de comandă  $\alpha$ .

Schema de simulare mai cuprinde: traductoare de tensiune și de curent, multiplexoare, osciloscoape pentru vizualizarea undelor de tensiune și de curent în diferite puncte ale schemei.

Întrucât în acest studiu interesează deformarea curentului de rețea, tensiunile rămânând sinusoidale (rețeaua putând fi considerată de putere infinită), pentru fiecare simulare se memorează valorile curentului de rețea într-un fișier de date de tip \*.mat (blocul notat cu *IrY0y.mat* în schema din fig. L17.7.

Schema de simulare se poate modifica ușor, de la o simulare la alta. Astfel, se pot fi modifica:

- conexiunile transformatorului de rețea,
- parametrii sarcinii, unghiul de comandă a redresorului,
- tipul semiconductoarelor redresorului (tiristoare, tranzistoare de putere sau diode), etc.

Se vor face simulări efectuând unele dintre aceste modificări și se va analiza curentul de rețea cu ajutorul interfeței grafice.

### 2.3. CONȚINUTUL REFERATULUI

Referatul va conține:

- listarea programelor Matlab realizate pentru generarea de semnale nesinusoidale și pentru analiza armonică;
- rezultatele analizei armonice (amplitudinile și fazele armonicilor, valorile coeficientului THD) ale semnalelor analizate;
- concluziile privind conținutul de armonici și efectul energetic deformant al semnalelor analizate;
- concluziile privind precizia și utilitatea practică programelor de analiză armonică utilizate și propuneri de îmbunătățiri a acestora.

## STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU AL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

### 1. CONSIDERAȚII TEORETICE

#### 1.1. Generalități

Spre deosebire de regimul permanent în care curenții și tensiunile sunt constante (cazul circuitelor de curent continuu), sau sunt variabile în timp cu amplitudini constante (cazul circuitelor de curent alternativ), regimul tranzitoriu este un regim nestaționar, corespunzător trecerii circuitelor de la un regim permanent la alt regim permanent. Durata regimului tranzitoriu este teoretic infinită; practic însă această durată se apreciază de ordinul sutimilor, zecimilor și unităților de secundă și, foarte rar, de ordinul minutelor.

Regimurile tranzitorii pot fi întâlnite la închiderea sau deschiderea unor întrerupătoare care alimentează circuitul considerat sau în cazul în care parametrii circuitului (R, L, M, C) variază brusc datorită unor condiții speciale de lucru sau unor avarii (scurtcircuite, întreruperi).

Circuitele liniare și invariabile în timp (cu parametri constanți) sunt descrise de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. După cum se știe, soluția generală a unor astfel de ecuații se poate scrie sub forma unei sume de două soluții și anume

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t), \quad (\text{L18.1})$$

în care:

- $y_l(t)$  este soluția generală a ecuației diferențiale date obținute prin anularea termenului liber al acesteia (soluția ecuației omogene) și se numește *soluție de regim liber sau componentă liberă*.
- $y_f(t)$  este o soluție particulară a ecuației diferențiale a circuitului – numită *soluție de regim forțat sau componentă forțată*.

În teoria circuitelor electrice se folosesc noțiunile de *componentă tranzitorie și componentă permanentă*.

În mod obișnuit prin *componentă permanentă*  $y_p$  se înțelege expresia soluției generale  $y(t)$  pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Folosirea acestor denumiri este potrivită dacă semnalul excitație (tensiune sau curent) acționează un timp relativ îndelungat față de intervalul de timp cât există și componenta liberă. În aceste condiții, componenta liberă e potrivit să se numească *componenta tranzitorie*  $y_{tr}$  deoarece e vorba de o componentă de scurtă durată, respectiv trecătoare. În regim tranzitoriu sunt prezente ambele componente, deci semnalul răspuns va fi de forma:

$$y(t) = y_{tr}(t) + y_p(t) \quad (\text{L18.2})$$

După un interval de timp după care componenta tranzitorie  $y_{tr}(t)$  poate fi neglijată (se consideră practic nulă), rămâne numai componenta permanentă  $y(t) = y_p(t)$ ; regimul se numește *regim permanent*.

Studiul circuitelor electrice liniare în regim tranzitoriu constă în determinarea tensiunilor și curenților tranzitorii din circuit, fie prin metoda rezolvării directe a ecuațiilor integro-diferențiale care caracterizează circuitul, fie prin metode operaționale, mult mai eficiente, care folosesc transformările Laplace și Fourier.

În această lucrare se propune studiul regimului tranzitoriu la conectarea circuitului RLC serie la o sursă de tensiune constantă.

## 1.2. Regimul tranzitoriu la conectarea circuitului RLC serie la o sursă de tensiune constantă

Se analizează regimul tranzitoriu la conectarea circuitului liniar serie cu rezistor ideal, bobină ideală și condensator ideal la o sursă de tensiune constantă  $E$  (fig. L18.1).

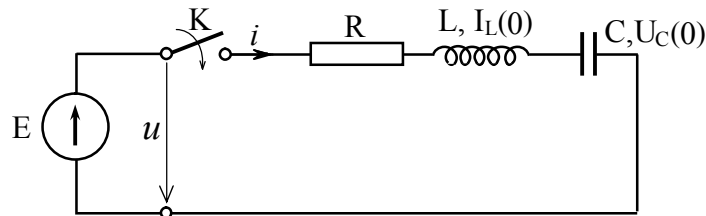


Fig. L18.1.

Presupunând condensatorul neîncărcat la momentul inițial  $t = 0$  și ținând seama de prezența inductivității, condițiile inițiale sunt:

$$i(0) = 0; \quad U_C(0) = 0 \quad (\text{L18.3})$$

Interesează în mod deosebit expresia curentului din circuit  $i(t)$  și tensiunea la bornele condensatorului  $u_C(0)$ .

Considerând curentul și ținând seama de faptul ca tensiunea aplicată este constantă și de conectarea în serie a condensatorului, rezultă că pentru  $t \rightarrow \infty$  se obține  $i(t) = 0$  și deci, în acest caz, componenta permanentă a curentului este nulă,  $i = i_l = i_r$ .

Ecuția diferențială a circuitului se scrie:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = E. \quad (\text{L18.4})$$

Derivând această ecuație în raport cu timpul, rezultă:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad \text{respectiv,} \quad R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Ecuția se pune de obicei sub forma:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (\text{L18.5})$$

în care,

- $\alpha = \frac{R}{2L}$  – constanta de atenuare (amortizarea circuitului RLC serie);
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – pulsația de rezonanță sau pulsația proprie a circuitului RLC serie.

Rădăcinile polinomului caracteristic  $p(x) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2$  se numesc *pulsații naturale sau frecvențe ciclice naturale* ale circuitului:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta \quad (\text{L18.6})$$

în care s-a notat cu  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ , mărime numită *pseudopulsația circuitului*.

În funcție de valorile lui  $\alpha$  și  $\omega_0$  se disting patru regimuri de variație în timp ale curentului după cum urmează.

❶ **Regimul aperiodic** are loc când

$$\alpha > \omega_0, \beta^2 > 0 \text{ sau } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{L18.7})$$

Frecvențele ciclice naturale  $\lambda_1, \lambda_2$  sunt reale și negative. Soluția ecuației (L18.5) este de forma:

$$i(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0. \quad (\text{L18.8})$$

Constantele  $K_1$  și  $K_2$  se determină din condițiile inițiale (L18.3). Astfel, din

$$i(0) = 0 \Rightarrow K_1 + K_2 = 0, \quad K_1 = -K_2 = K \quad (\text{L18.9})$$

Din ecuația circuitului (L18.4), înlocuind pentru  $t = 0, i(0) = 0$ , se obține:

$$L \left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = E \quad (\text{L18.10})$$

Efectuând calculul, rezultă:

$$\frac{di}{dt} = \lambda_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 K_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = K(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{E}{L} \Rightarrow K = \frac{E}{\beta L} \quad (\text{L18.11})$$

Înlocuind constantele  $K_1$  și  $K_2$  în (L18.8) se obține expresia analitică a curentului

$$i(t) = \frac{E}{2\beta L} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = \frac{E}{2\beta L} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (\text{L18.12})$$

respectiv,

$$i(t) = \frac{E}{\beta L} e^{-\alpha t} \text{sh}\beta t \quad (\text{L18.13})$$

Pentru  $t = 0, i(0) = 0$  și pentru  $t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$ . Curentul crește de la zero la  $t=0$  la o valoare maximă  $i_m$  la  $t=t_m$  și apoi, teoretic tinde la zero pentru  $t \rightarrow \infty$ , fără să-și schimbe semnul ca în figura. L18.2.

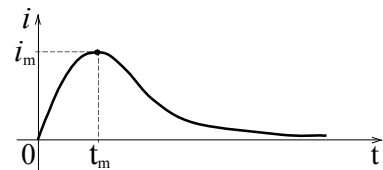


Fig. L18.2.

Timpul  $t_m$  se determină din condiția  $\left( \frac{di}{dt} \right)_{t=t_m} = 0$ ,

respectiv, utilizând rel. (L18.12),

$$\frac{E}{2\beta L} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t_m} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t_m}) = 0, \text{ rezultă: } t_m = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad (\text{L18.14})$$

iar valoarea maximă a curentului este

$$i_m = \frac{E}{2\beta L} (e^{\lambda_1 t_m} - e^{\lambda_2 t_m}) = \frac{E}{2\beta L} e^{\lambda_2 t_m} (e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_m} - 1) = \frac{E}{2\beta L} e^{\lambda_2 t_m} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) = \frac{E}{(\alpha - \beta)L} e^{\lambda_1 t_m} \quad (\text{L18.15})$$

Tensiunea la bornele condensatorului se calculează astfel:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{E}{2\beta LC} \int_0^t (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) dt = \frac{E}{2\beta LC} \left[ \frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - 1) \right] =$$

$$= \frac{E}{2\beta LC} \left( \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right) + E \quad (\text{L18.16})$$

în care:  $u_{C_{tr}} = \frac{E}{2\beta LC} \left( \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right)$ ;  $U_{C_p} = E$ .

Tensiunea pe condensator  $u_C$  și componentele sale liberă sau tranzitorie  $u_{C_{tr}}$  și permanentă  $U_{C_p}$  s-au trasat în figura L18.3, ținând cont de următoarele:

$$u_C(0) = 0, \quad u_{C_{tr}}|_{t=0} = \frac{E}{2\beta LC} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} = -E, \quad u_C|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow E;$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\beta; \quad \lambda_1 \lambda_2 = \omega_0^2 = 1/LC.$$

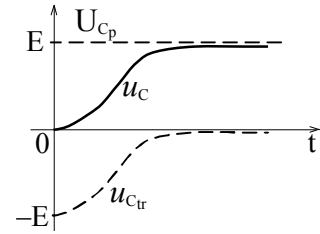


Fig. L18.3.

❷ **Regimul aperiodic critic** are loc când este satisfăcută condiția

$$\alpha = \omega_0, \quad \beta = 0 \quad \text{sau} \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{L18.17})$$

Frecvențele ciclice naturale sunt egale și negative:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ .

Curentul, soluția ecuației (L18.43), este de forma:

$$i(t) = K_1 e^{-\alpha t} + K_2 t e^{-\alpha t} \quad (\text{L18.18})$$

Din condiția inițială  $i(0) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$  și deci  $i(t) = K t e^{-\alpha t}$ . Prima derivată în raport cu timpul a curentului la  $t = 0$  este  $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = K$ , iar din ec. (L18.43) avem:

$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}$ . Așadar  $K = E/L$  și expresia curentului pentru regimul aperiodic critic este:

$$i(t) = \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \quad (\text{L18.19})$$

Pentru  $t \rightarrow \infty$ , aplicând regula lui l'Hôpital, rezultă  $i \rightarrow 0$ . Curentul are și în acest caz o variație aperiodică, dar mai rapidă, regimul numindu-se *aperiodic critic* deoarece este la limita dintre regimul aperiodic și regimul oscilatoriu.

Valoarea rezistenței  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  se numește *rezistență critică*.

Tensiunea la bornele condensatorului se determină după cum urmează:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_C(0) = \frac{E}{LC} \int_0^t t e^{-\alpha t} dt = \frac{E}{LC} \left( -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-\alpha t} dt \right) =$$

$$= \frac{E}{LC} \left[ -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) \right] = [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}] \cdot E$$

S-a utilizat metoda de integrare prin părți și s-a ținut cont că  $\alpha^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . Sub forma

$$u_C = u_{C_{tr}} + u_{C_p} = -(1 + \alpha t) e^{-\alpha t} E + E, \quad (\text{L18.20})$$

sunt evidente componentele tranzitorie și permanentă ale tensiunii pe condensator.

Variațiile în timp ale curentului și tensiunii condensatorului sunt asemănătoare cu cele de la cazul ❶ cu observația că în regimul aperiodic critic acestea sunt cele mai rapide (regimul tranzitoriu are durata minimă).



❸ **Regimul oscilatoriu amortizat** are loc când este satisfăcută condiția

$$\alpha < \omega_0, \beta^2 < 0 \text{ sau } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \quad (\text{L18.21})$$

Frecvențele ciclice naturale sunt complexe:

$$\lambda_1 = -\alpha + j\omega_d, \lambda_2 = -\alpha - j\omega_d \quad (\text{L18.22})$$

în care s-a notat cu

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} > 0 \quad (\text{L18.23})$$

pulsatia sau frecvența ciclică proprie a circuitului.

Expresia curentului din cazul ❸, rel. (L18.46), în acest caz devine:

$$i(t) = \frac{E}{j\omega_d L} e^{-\alpha t} \text{sh}j\omega_d t = \frac{E}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{L18.24})$$

Intensitatea curentului are o variație oscilatorie amortizată ca în figura L18.4,a).

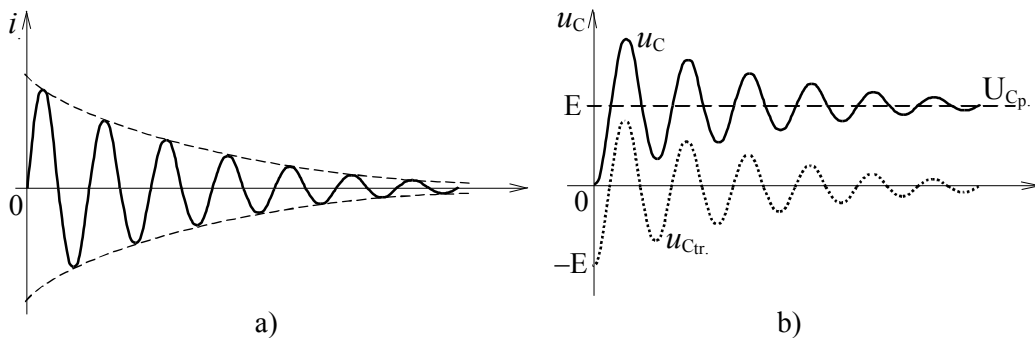


Fig. L18.4.

Tensiunea la bornele condensatorului se determină astfel:

$$u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_C(0) = \frac{E}{\omega_d LC} \int_0^t e^{-\alpha t} \sin \omega_d t dt = \underbrace{-\frac{E}{\omega_d} e^{-\alpha t} (\alpha \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t)}_{u_{Ctr}} + \frac{E}{U_{Cp}} \quad (\text{L18.25})$$

(S-a folosit integrala:  $\int e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$ ). Dacă se fac înlocuirile:

$$\text{tg} \theta = \frac{\omega_d}{\alpha}, \text{ respectiv } \sin \theta = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \cos \theta = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad (\text{L18.26})$$

se obține:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) e^{-\alpha t} \right] = E \left[ 1 - \frac{\cos \theta \sin \omega_d t + \sin \theta \cos \omega_d t}{\sin \theta} e^{-\alpha t} \right] = \\ &= E \left[ 1 - \frac{1}{\omega_d \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta) \right] \quad (\text{L18.27}) \end{aligned}$$

Formele de undă ale tensiunii  $u_c$  pe condensator și a componentelor sale,  $U_{Cp} = E$  și  $u_{Ctr} = -\frac{E}{\omega_d \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta)$  sunt prezentate în fig. L18.4,b). Pentru  $t = 0$ , rezultă

$\sin(\omega_d t + \theta) = \sin \theta = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \omega_d \sqrt{LC}$  și  $u_{Ctr}(0) = 0, u_C(0) = 0$ . De asemenea, pentru  $t \rightarrow \infty$ ,

se obține  $u_C = E$ . Din figura L18.4,b) se mai observă că, în regim tranzitoriu, la bornele condensatorului apare o supratensiune ( $u_C > E$ ).

④ **Regimul oscilant.** În cazul particular (idealizat) în care se consideră  $R \approx 0$ , avem:  $\alpha = \frac{R}{2L} \approx 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_d = \omega_0$  și  $\lambda_1 = j\omega_0$ ,  $\lambda_2 = -j\omega_0$ . Expresiile curentului și tensiunii pe condensator rezultă prin particularizarea relațiilor (L18.24) și respectiv (L18.27) pentru condițiile acestui regim:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t = \frac{E}{\sqrt{L/C}} \sin \omega_0 t \quad (\text{L18.66})$$

$$u_C(t) = (1 - \cos \omega_0 t) \cdot E$$

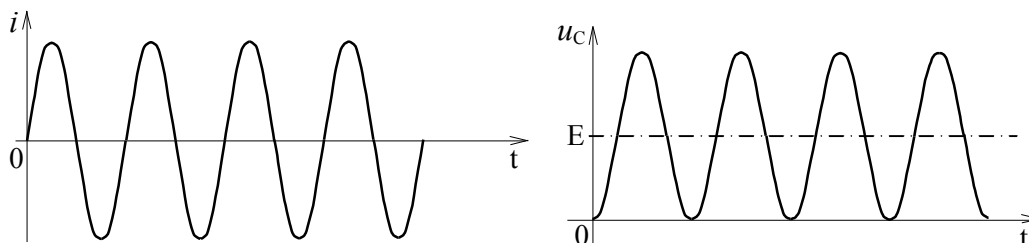


Fig. L18.5.

Se obține în acest caz regimul oscilatoriu neamortizat, curentul în circuit și tensiunea pe condensator având variații sinusoidale neamortizate, însă tensiunea în jurul valorii mijlocii egale tot cu E (fig. L18.5).

## 2. MODUL DE LUCRU

În laborator se va studia prin simulare pe calculator regimurile tranzitorii ale circuitelor liniare de ordinul I și II la conectarea la o sursă de alimentare de tensiune constantă. Se exemplifică aici simularea cu programul SpiceNet, versiunea ICAPS4 al firmei Intusoft. De exemplu, schemele de simulare pentru circuitele RL – serie, RC – serie și RLC – serie în regim tranzitoriu la conectarea la o sursă de alimentare de tensiune continuă (DC) este prezentată în figura L18.6, a), b) și respectiv c).

Se realizează pe rând circuitele din figura L18.6 setând prin program parametrii elementelor de circuit. Pentru fiecare circuit se studiază prin simulare forma de variație în timp a curentului, a tensiunilor pe bobină și pe condensator, pentru diferite valori ale parametrilor R, L, C.

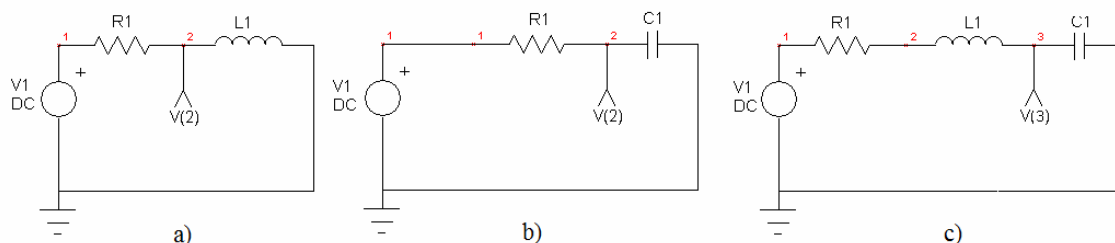


Fig. L18.6.

Pentru circuitul RLC – serie se vor modifica corespunzător acești parametri pentru a obține pe rând toate cele patru regimuri de funcționare.

Referatul va conține curbele obținute prin simulare, calculul constantelor de timp și de amortizare pentru valorile parametrilor setați prin simulare și concluziile care se desprind în urma fiecărui regim tranzitoriu simulat.

## *Bibliografie*

- [1]. Antoniu I. S. – *Bazele electrotehnicii*, vol. I, II. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
- [2]. Corduneanu A. – *Ecuatii diferențiale cu aplicații în electrotehnică*. Editura Facla, Timișoara, 1981.
- [3]. Mocanu C. I. – *Teoria câmpului electromagnetic*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [4]. Mocanu C. I. – *Teoria circuitelor electrice*. Editura Didactică și Pedagogică, Buc., 1979.
- [5]. Livinți P., Puiu-Berizintu M. – *Electrotehnică și mașini electrice*. Editura Tehnica Info-Chișinău, 2003.
- [6]. Livinți P., Puiu-Berizintu M. – *Electrotehnică și mașini electrice. Îndrumar de laborator*. Editura Alma Mater, Bacău, 2008.
- [7]. Potolea E. – *Calculul regimului permanent al sistemelor electrice*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.
- [8]. Preda M., Cristea P. – *Bazele electrotehnicii. Circuite electrice*. Vol. II. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [9]. Preda M., Cristea P., ș.a. – *Probleme de electrotehnică și mașini electrice*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [10]. Preda M., Cristea P., Spinei F. – *Bazele electrotehnicii. Probleme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [11]. Puiu-Berizintu M., Livinți P. – *Bazele electrotehnicii. Electromagnetismul*. Editura Tehnica Info - Chișinău, 2003.
- [12]. Puiu-Berizintu M. – *Bazele electrotehnicii. Circuite electrice liniare*. Editura Alma Mater, Bacău, 2010.
- [13]. Răduleț R. – *Bazele electrotehnicii. Probleme*. Vol. I, II. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [14]. Simion E., Maghiar T. – *Electrotehnică*. Editura Didactică și Pedagogică, Buc., 1981.
- [15]. Simonyi K. – *Electrotehnică teoretică*. Editura Tehnică (traducere din limba maghiară), București, 1974.
- [16]. Șora, C. – *Bazele electrotehnicii*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
- [17]. Timotin Al., Hortopan, V. ș.a. – *Lecții de bazele electrotehnicii*. Vol. I, II. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
- [18]. Tomescu A., Tomescu F.M.G. – *Bazele electrotehnicii. Circuite electrice*. Editura Matrix Rom, București, 2000.