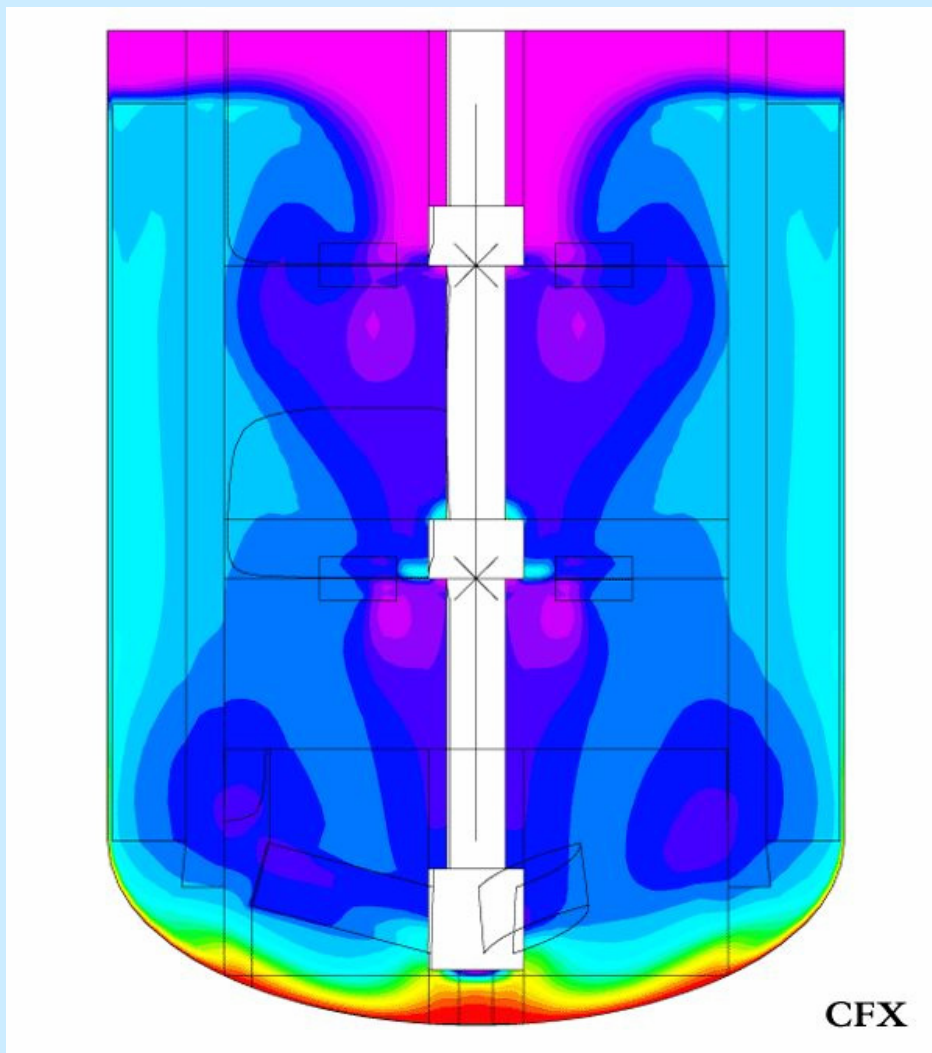




DINAMICA FLUIDELOR

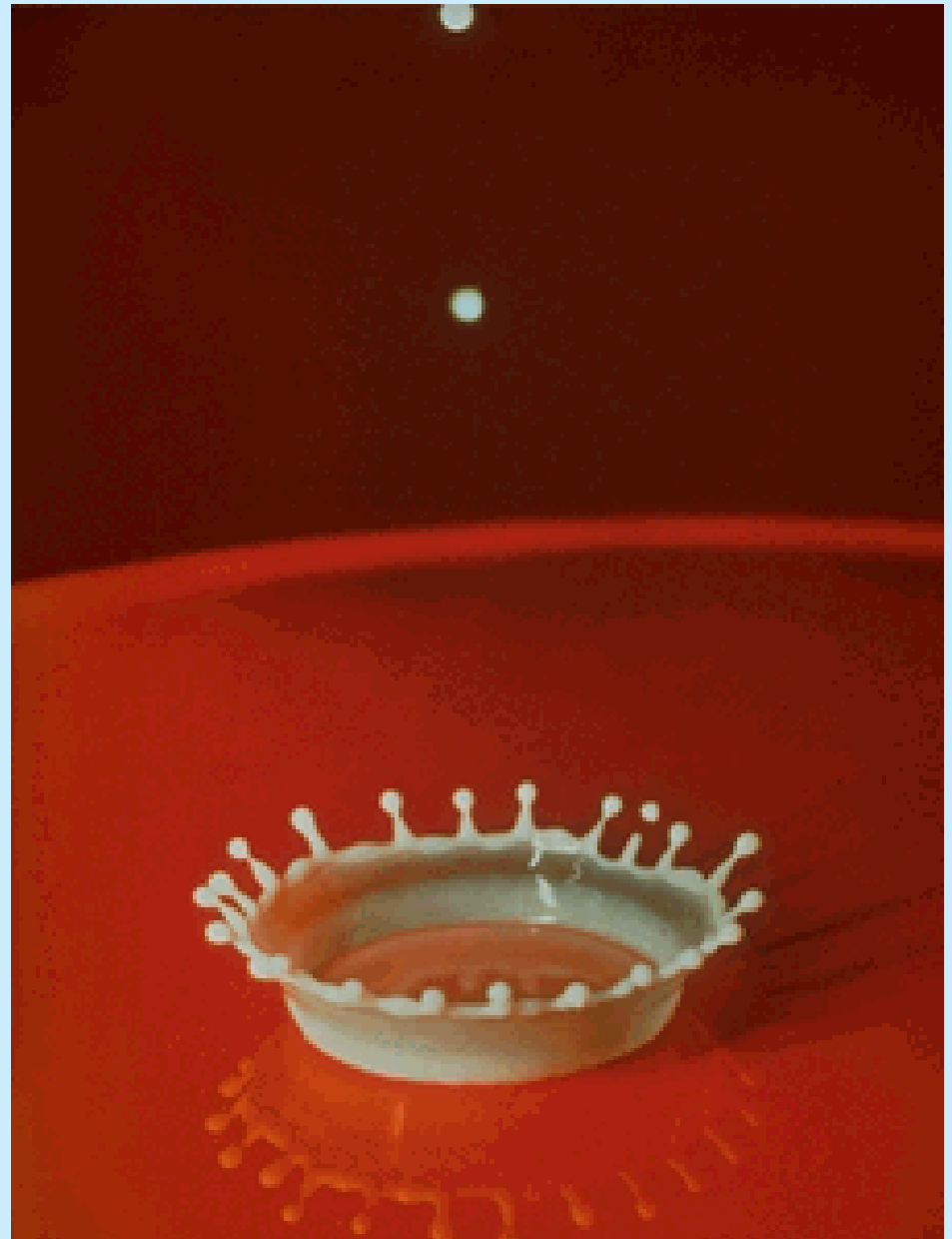
Introducere

- o Dinamica fluidelor studiază mișcarea fluidelor și interacțiunea acestora cu corpurile solide, ținând seama de forțele care determină starea de mișcare și de transformările energetice produse în timpul mișcării.



Introducere

- o La curgerea fluidelor reale, o parte din energia mecanică a fluidului este disipată ireversibil sub formă de energie termică, fenomen datorat viscozității fluidelor și interacțiunii fluidelor cu contururile solide.



Introducere

- o Pentru caracterizarea mișcării unui fluid este necesară cunoașterea:
 - distribuției vitezelor,
 - distribuției presiunii,
 - distribuției temperaturii în masa de fluid.
- o Acești parametri depind de o serie de factori ca:
 - forma și dimensiunile spațiului de curgere,
 - debitul fluidului,
 - câmpul de forțe care acționează asupra fluidului, etc.

Introducere

- o Datorită complexității fenomenului și a numărului mare de parametri care îl influențează, **rezolvarea analitică** a problemelor de curgere este posibilă doar pentru cazuri simple sau simplificate.
- o În majoritatea cazurilor se apelează la îmbinarea metodelor teoretice cu determinările experimentale.

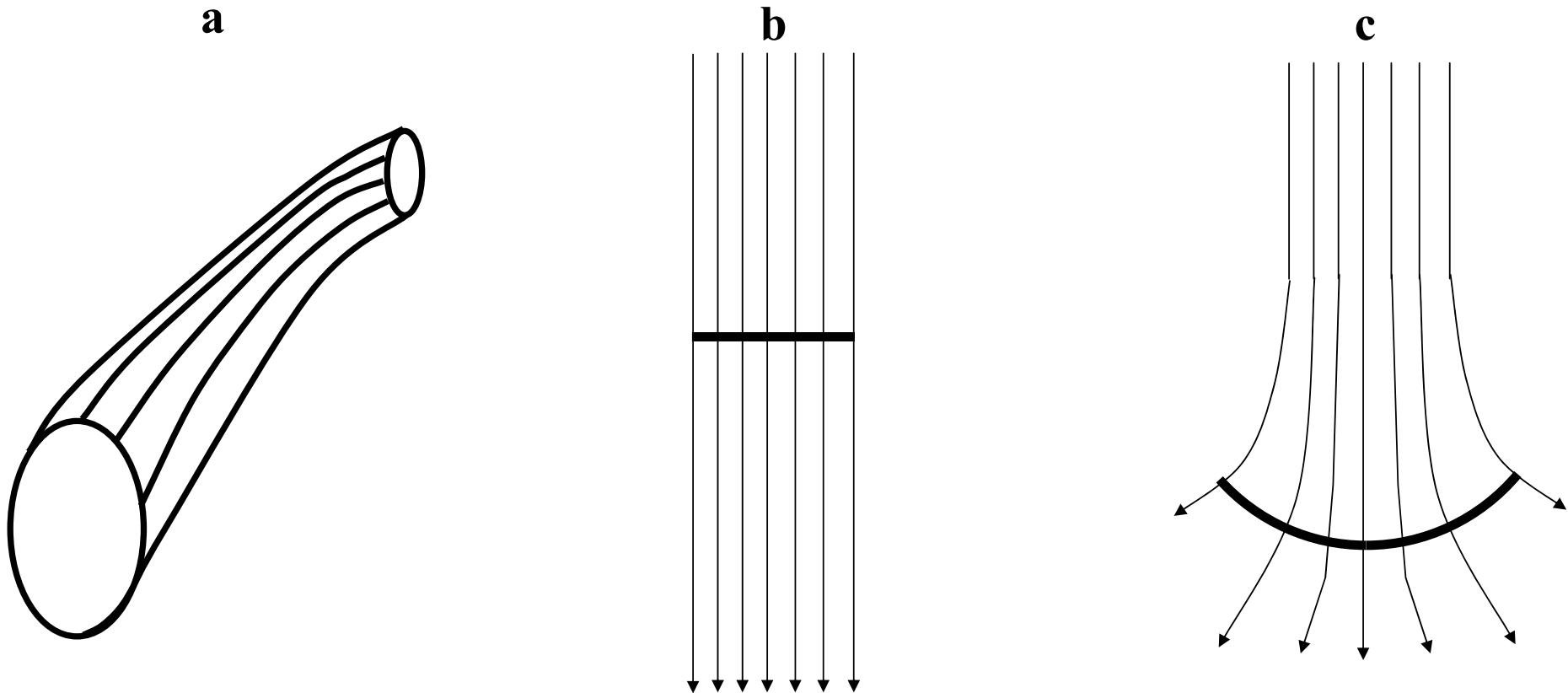
Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o **Câmpul** reprezintă distribuția valorilor unei mărimi în toate punctele sistemului considerat, în funcție de timp, sau la un moment dat.
- o **Traietoria** unei particule de fluid este curba formată de mulțimea punctelor prin care trece centrul de greutate al particulelor aflate în mișcare.
- o **Linia de curent** este o curbă imaginară într-un fluid a cărei tangentă în orice punct al ei coincide cu direcția vectorului viteză a particulelor lichide care se află pe această curbă la un moment t dat.
- o Totalitatea liniilor de curent la un moment t dat formează **spectrul hidrodinamic** al mișcării în acel moment.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Tubul de curent este suprafața formată de totalitatea liniilor de curent care se sprijină pe un contur închis care nu este o linie de curent. Forma tubului de curent variază în timp dacă mișcarea este nestaționară și rămâne nedeformată dacă mișcarea este staționară. Prin pereții tubului de curent nu se realizează transfer de masă, vitezele fiind tangente la pereții tubului.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor



a - tub de curent; b - secțiune plană de curgere; c - secțiune curbă de curgere

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Secțiunea unui tub de curent (secțiune vie, secțiune dreaptă, secțiune transversală) este suprafața limitată de tubul de curent, normală pe toate liniile de curent care o străbat (fig. a).
- o Secțiunea de curgere este **dreaptă** dacă liniile de curent sunt paralele între ele (fig. b), respectiv **curbă** dacă liniile de curent nu sunt paralele între ele (fig. c).
- o Un tub de curent a cărui secțiune este suficient de mică pentru a se admite pe ea o distribuție uniformă a vitezelor poartă denumirea de **tub elementar de curent**.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o **Viteza** unei particule de fluid este o mărime vectorială care reprezintă limita deplasării în timp a particulei pe direcția considerată:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t)$$

- o În mod analog se definesc și componentele v_y și v_z ale vitezei.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Variația în timp a vitezei unei particule de fluid este **acclerația** acesteia:

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$$

- o Se poate constata că accelerația fluidului este **derivata substanțială** a vitezei acestuia.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Cantitatea de fluid care trece în unitatea de timp printr-o secțiune de arie A poartă denumirea de **debit**.
- o Limita raportului între cantitatea de fluid (exprimată în unități masice, volumice, molare sau de greutate) care trece printr-o secțiune de curgere când Δt tinde spre zero poartă denumirea de **debit instantaneu (momentan)**:

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

$$m_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

$$m_v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

$$m_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt}$$

$$m_G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{dG}{dt}$$

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Dacă mișcarea este nestaționară debitul este variabil în timp.
- o În aceste condiții se definește debitul mediu ca fiind cantitatea de fluid ce trece printr-o secțiune într-un interval finit de timp, sau ca media debitelor instantanee:

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

$$\tilde{m}_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_V \rho dV = \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt$$

$$\tilde{m}_v = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_V dV = \int_A v_i dA = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} V(t) dt$$

$$\tilde{m}_N = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{M \Delta t} \int_V \rho dV = \frac{1}{M} \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{M \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt$$

$$\tilde{m}_G = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{1}{g \Delta t} \int_V \rho dV = \frac{1}{g} \int_A \rho v_i dA = \frac{1}{g \Delta t} \int_t^{t+\Delta t} m(t) dt$$

o unde v_i reprezintă viteza locală în diverse puncte ale secțiunii curenului

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Între diversele moduri de exprimare a debitului există echivalența:

$$m_m = \frac{1}{g} m_G = \rho \cdot m_V = M \cdot m_N$$

- o unde g este accelerația gravitațională, ρ este densitatea fluidului iar M este masa molară a fluidului.

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o **Viteza medie** este valoarea medie a vitezelor locale;
- o valoarea ei este dată de raportul între debitul volumic de fluid și aria secțiunii de curgere:

$$\tilde{v} = \frac{m_v}{A} = \frac{1}{A} \int_A v_i dA$$

Noțiuni și mărimi caracteristice mișcării fluidelor

- o Fluxul de fluid (denumit și: debit unitar, flux unitar, viteză medie masică, debit specific) este cantitatea de fluid, exprimată în kg, care trece prin unitatea de suprafață (m²) în unitatea de timp (s). Se obține raportând debitul masic de fluid la aria secțiunii de curgere:

$$m_m^* = \frac{m_m}{A} = \rho \frac{m_v}{A} = \rho \cdot \tilde{v} \quad [kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}]$$

Clasificarea mișcării fluidelor

- o Mișcarea unui fluid este definită dacă în fiecare punct din fluid definit de coordonatele x, y, z și în orice moment t se cunosc valorile vitezei, ale presiunii și ale densității.

Clasificarea mișcării fluidelor

- o După condițiile de variație în timp a parametrilor locali:
 - curgere **staționară**
 - curgere **nestaționară**
- o După condițiile de variație în spațiu a parametrilor locali:
 - curgere **unidimensională** (unidirecțională)
 - curgere **bidimensională** (plană sau axial-simetrică)
 - curgere **tridimensională** (spațială)

Clasificarea mișcării fluidelor

- o După condițiile de contact cu suprafețele solide care delimitează spațiul de curgere:
 - curgere sub presiune
 - curgere cu suprafață liberă
- o După natura câmpului vectorial al vitezelor:
 - curgere irotațională (potențială)
 - curgere rotațională
- o După mecanismul curgerii:
 - curgere laminară
 - curgere turbulentă.

Curgerea staționară

- o Presupune ca mărimile care descriu mișcarea fluidului (v , P , ρ) sunt invariante în timp (ca mărime și direcție):

$$P = P(x, y, z) ; \vec{v} = \vec{v}(x, y, z) ; \rho = \rho(x, y, z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

- o În cazul curgerii staționare:

- liniile de curent formează o familie de curbe fixe în spațiu și în timp (care coincid cu traiectoriile particulelor de fluid),
- tuburile de curent sunt fixe în spațiu,
- debitul masic este constant de-a lungul unui tub de curent.

Curgerea nestaționară

- o Este caracterizată prin variația în timp a mărimilor care descriu mișcarea fluidului:

$$P = P(x, y, z, t) ;$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) ;$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Curgerea unidimensională

- o Se dezvoltă de-a lungul unei singure direcții (Ox, de ex.). Viteza mișcării este descrisă de o singură variabilă spațială:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} \ ; \ v_y = 0 \ ; \ v_z = 0$$

- o iar accelerația mișcării are o singură componentă, a_x :

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x \ ; \ a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} v_x$$

curgerea nestaționară

curgerea staționară

Curgerea bidimensională

- o Se dezvoltă într-un plan.
- o Curgerea axial-simetrică (în pompe, conducte, reactoare tubulare) fiind identică în plane care trec printr-o axă de simetrie, se reduce la o curgere bidimensională. Dacă planul de curgere este planul xOy , viteza de curgere este:

$$\vec{V} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} ; \quad v_z = 0$$

Curgerea bidimensională

- o Accelerația are două componente nenule ($a_z = 0$), care pentru regim nestaționar au expresia:

$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y$$

Curgerea tridimensională

- o Se dezvoltă în spațiu.
- o În acest caz sunt valabile ecuațiile generale ale vitezei:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t)$$

- o Sunt valabile ecuațiile generale ale accelerației:

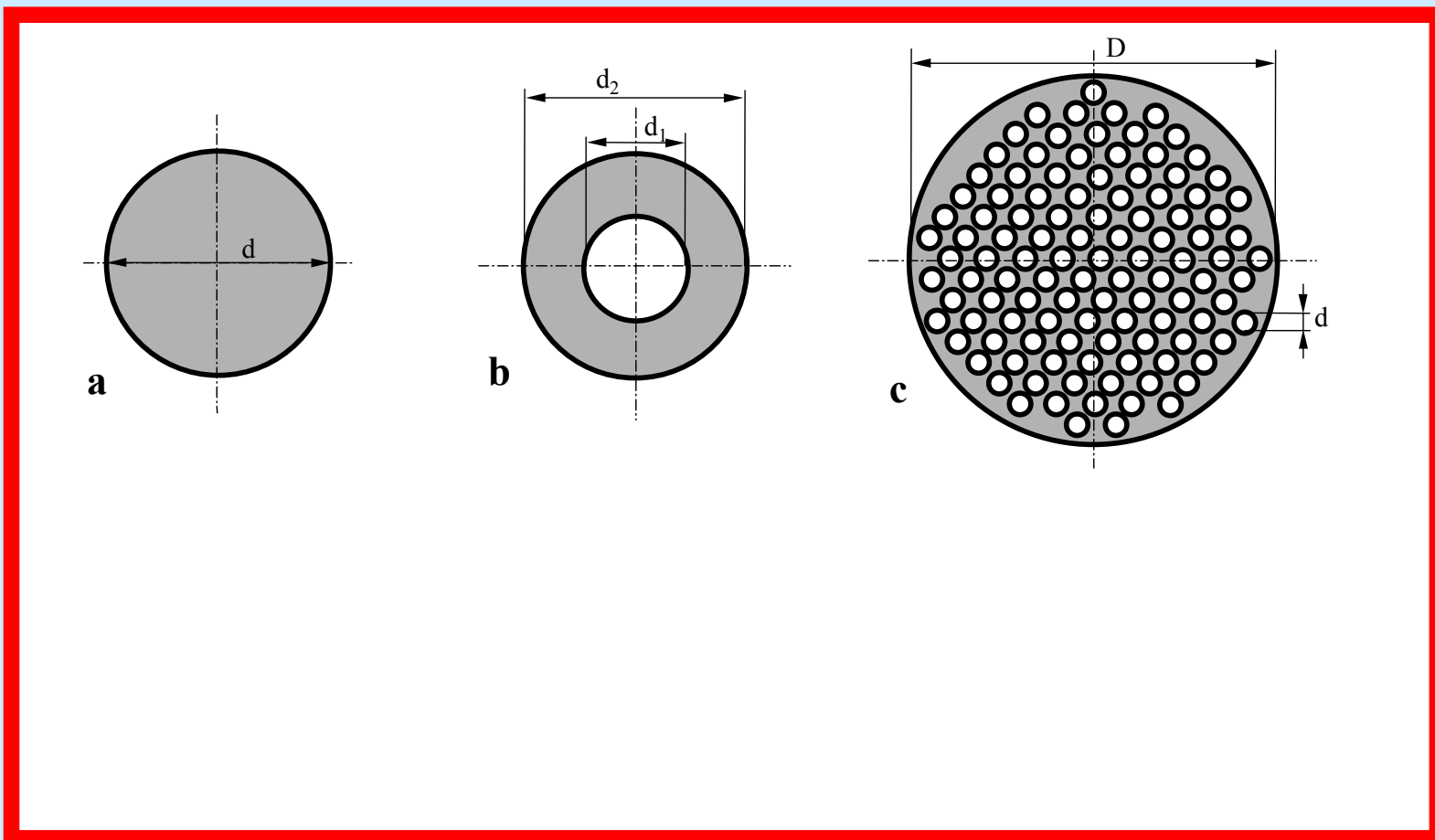
$$a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z$$

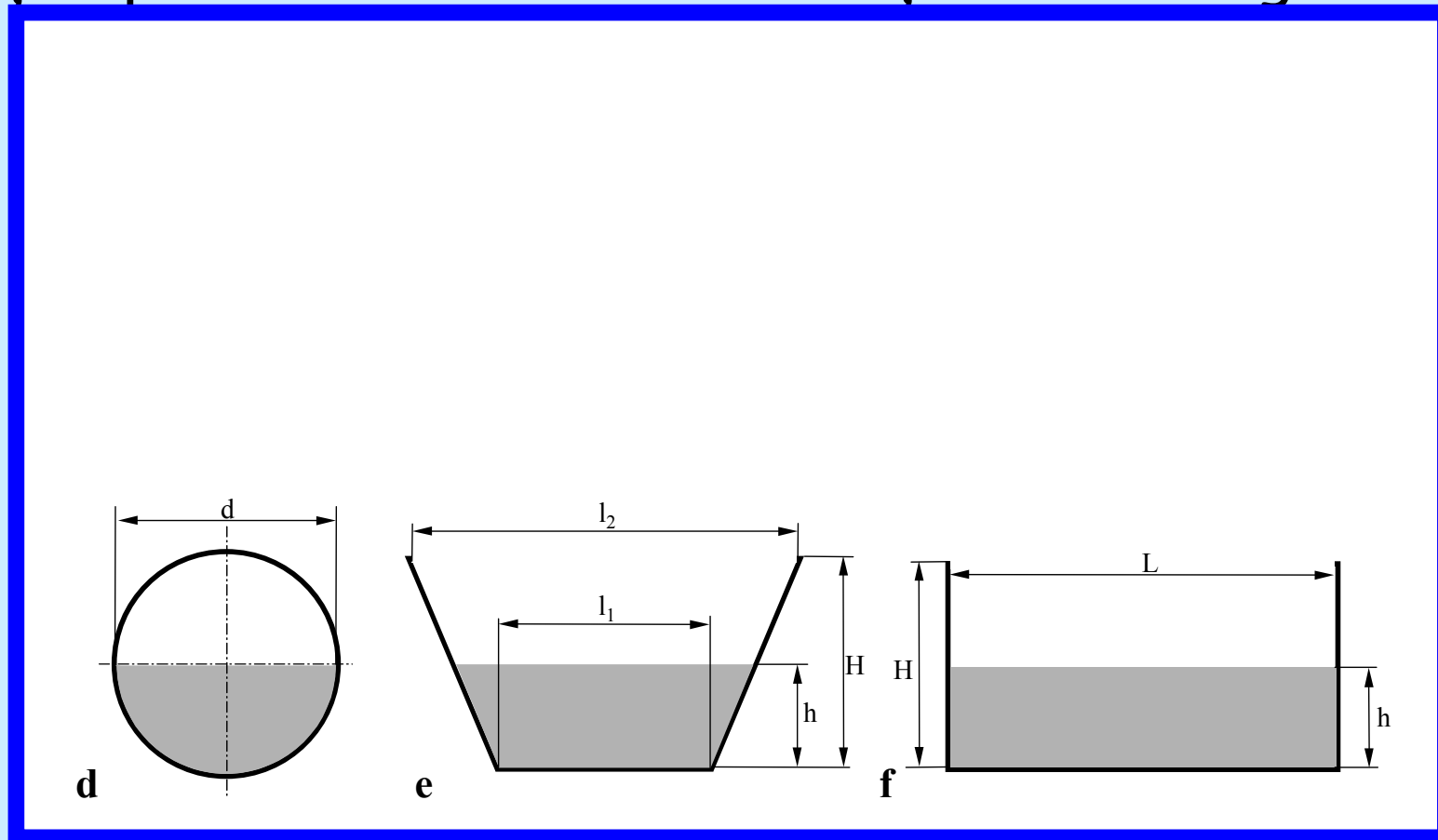
Curgerea sub presiune

- o Fluidul umple întreg spațiul disponibil mișcării, udând întreg perimetrul secțiunii de curgere: (fig. a, b, c). Gazele fiind fluide expandabile, curg întotdeauna sub presiune.



Curgerea cu suprafață liberă

- o Dacă lichidul umple numai parțial spațiul disponibil curgerii, formând o suprafață liberă în contact cu atmosfera sau cu un alt gaz, avem de a face cu o **curgere cu suprafață liberă** (fig. d, e, f). Lichidul udă doar parțial perimetrul interior al secțiunii de curgere.



Diametrul echivalent

- o Partea perimetrului secțiunii de curgere aflată în contact cu un contur rigid poartă denumirea de perimetru udat (P_u). Raportul dintre aria secțiunii de curgere și perimetrul udat poartă denumirea de rază hidraulică:

$$r_h = \frac{A}{P_u}$$

Diametrul echivalent

- o În cazul curgerii prin secțiuni cu altă formă decât circulară, se definește un diametru echivalent al secțiunii de curgere, (d_{ech});

$$d_{ech} = 4r_h = \frac{4A}{P_u}$$

- o Această noțiune este frecvent întâlnită în dimensionarea echipamentelor bazate (și) pe transferul de impuls.

Diametrul echivalent al unor secțiuni de curgere

	Secțiunea				
	circulară plină	semicirculară	inelară	trapezoidală ($H = 2h$; $l_1 = 2l_2$)	dreptunghiulară
A	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^2}{8}$	$\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)$	$\frac{3(l_1 \cdot H)}{8}$	$L \cdot h$
P_{ud}	πd	$\frac{\pi d}{2}$	$\pi(d_2 + d_1)$	$l_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + l_1^2}$	$L + 2h$
r_h	$\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{d_2 - d_1}{4}$	$\frac{3l_1 \cdot H}{8\left(l_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + l_1^2}\right)}$	$\frac{L \cdot h}{L + 2h}$
d_{ech}	d	d	$d_2 - d_1$	$\frac{3l_1 \cdot H}{2\left(l_1 + \frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + l_1^2}\right)}$	$4 \cdot \frac{L \cdot h}{L + 2h}$

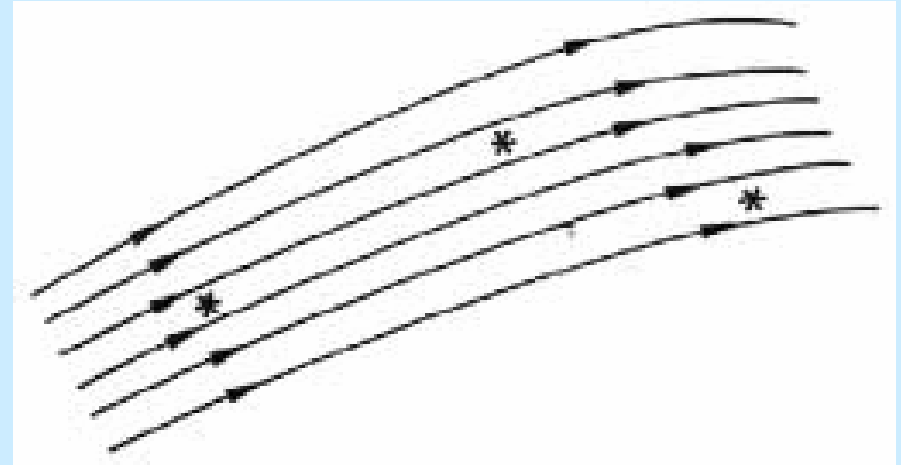
Curgerea irotațională

- o numită și **curgere potențială**, este caracterizată de faptul că toate componentele vitezei unghiulare de rotație ω sunt nule:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

- o iar gradientii de viteză perpendiculari pe direcția de curgere sunt simetrici:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

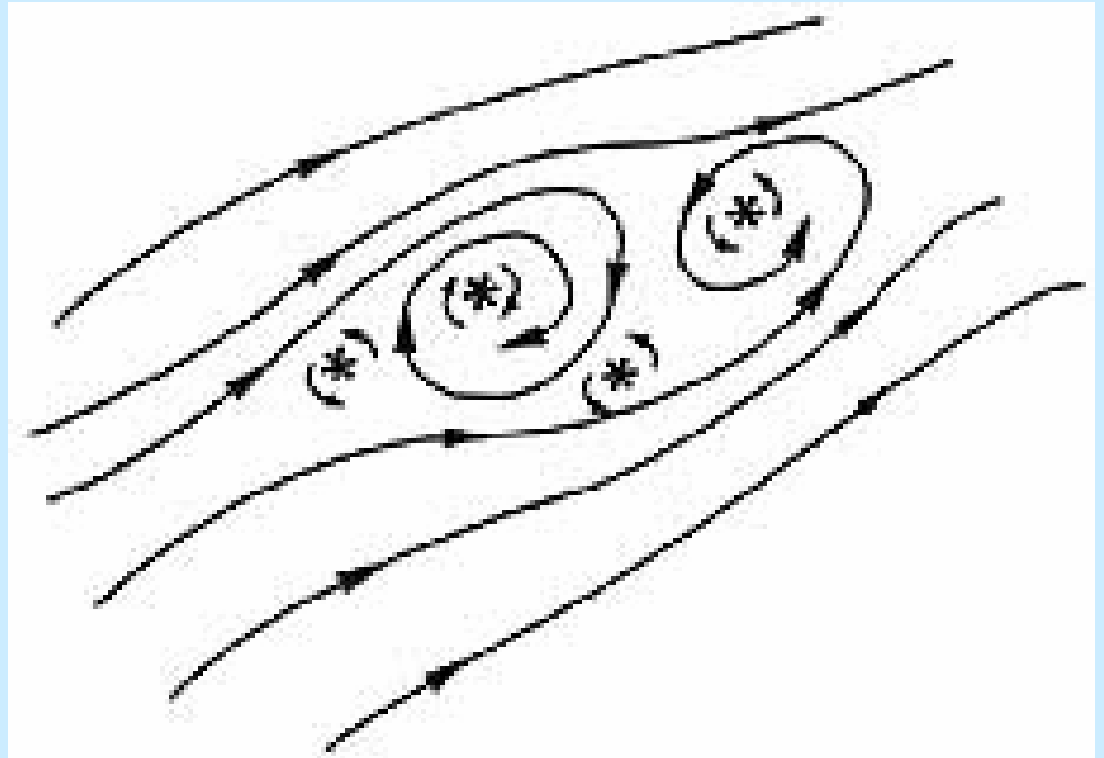


Curgerea rotațională

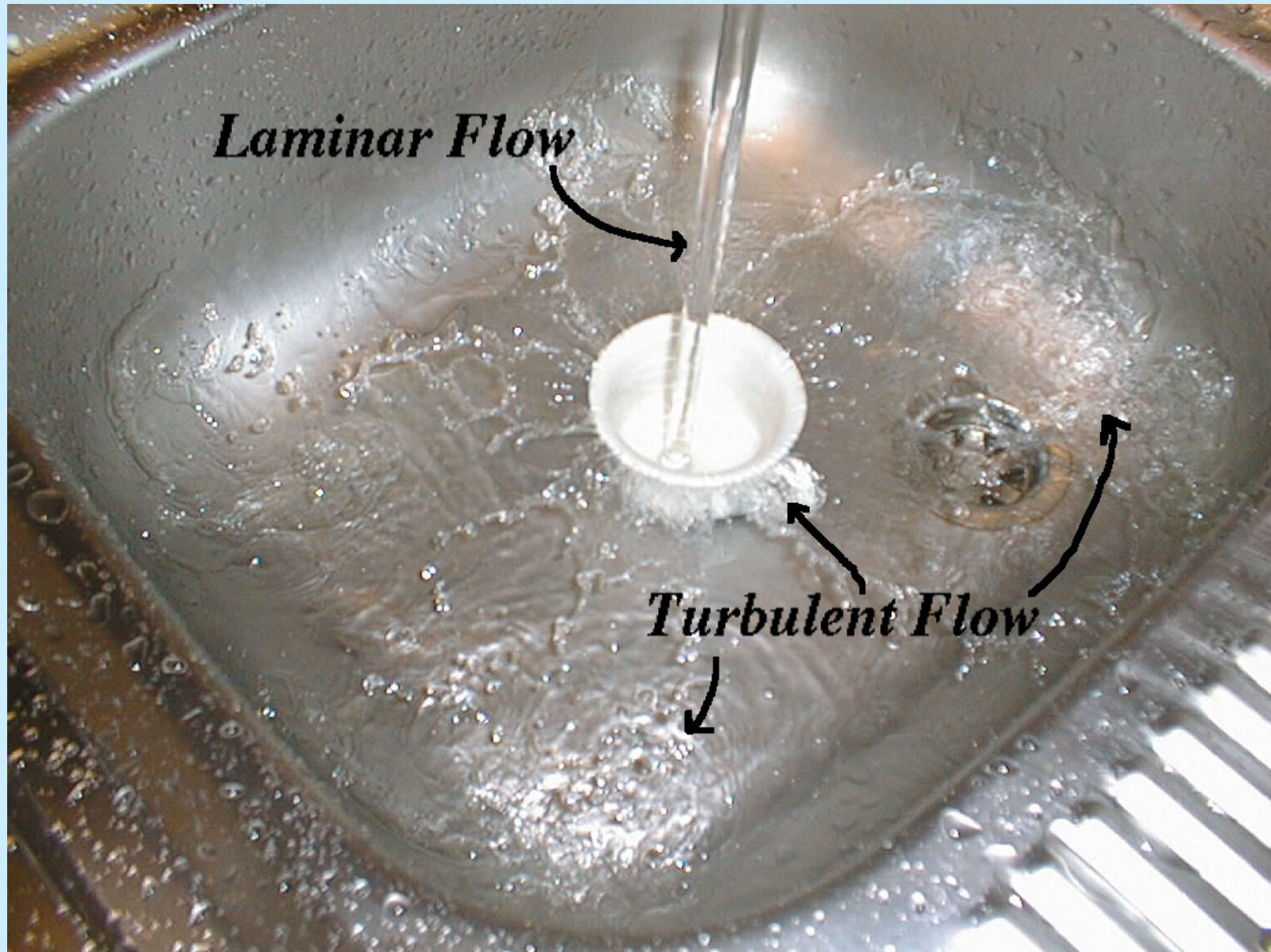
- o În cazul curgerii rotaționale, componentele vitezei unghiulare de rotație ω sunt nenule: $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z \neq 0$

- o Se pot defini în aceste condiții linii de curent turbionare, care îndeplinesc condiția:

$$\frac{\partial x}{\omega_x} = \frac{\partial y}{\omega_y} = \frac{\partial z}{\omega_z}$$



Curgere laminară - Curgere turbulentă



Curgerea laminară

- o Se caracterizează din punct de vedere macroscopic printr-o **structură ordonată**: straturile adiacente de fluid se deplasează paralel, fără amestecare macroscopică între ele.
- o Particulele de fluid își păstrează **individualitatea**, traiectoriile lor fiind curbe continue de formă regulată.
- o **Transportul impulsului** în masa de fluid are loc prin **mecanism molecular**, ca rezultat al mișcării individuale - ciocniri și interferențe - a purtătorilor de impuls de tip molecular: ioni, atomi, molecule.

Curgerea laminară

- o Transportul are loc atunci când între straturile învecinate de fluid există **diferențe în concentrația impulsului** (straturile au viteze diferite);
- o Direcția globală a transportului este în sensul micșorării forței motoare - diferența de impuls.
- o **Tensiunile tangențiale** care apar la orice element de suprafață care separă două straturi de fluid în mișcare laminară sunt determinate exclusiv de **viscozitatea** fluidului.

Curgerea turbulentă

- o Se caracterizează macroscopic printr-o **structură dezordonată**: straturile și particulele de fluid se deplasează pe **traietorii neregulate**, cu viteze diferite ca sens și mărime, ceea ce determină o amestecare intensă în masa fluidului.
- o **Transportul impulsului** în masa fluidului în mișcare are loc atât prin mecanism molecular, cât mai ales prin **mechanism turbulent (convectiv)** ca rezultat al mișcării purtătorilor de impuls de tip turbulent: macroparticule de fluid, agregate polimoleculare, a căror viață și mărime depinde de energia fluidului și de geometria sistemului.





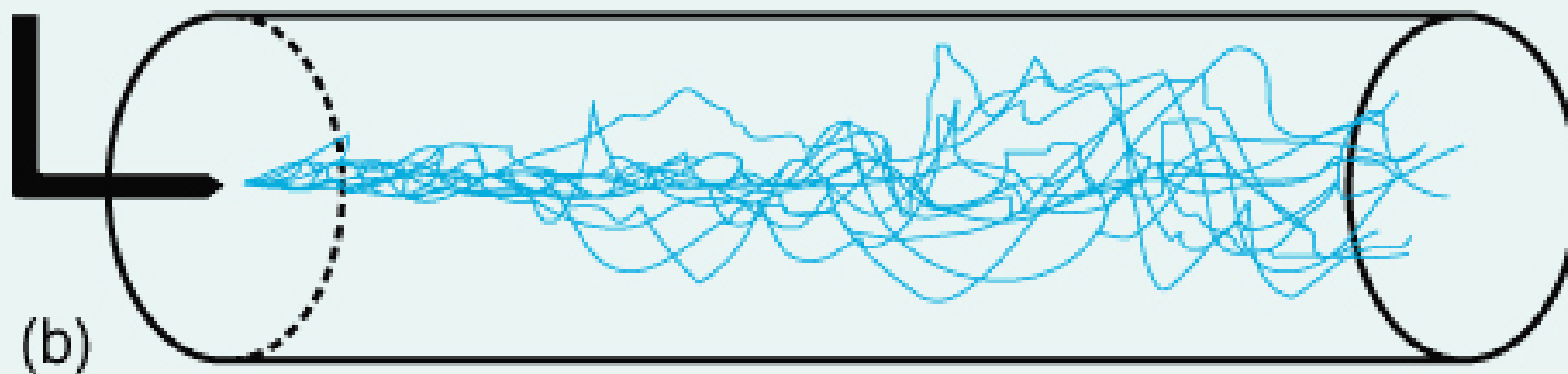
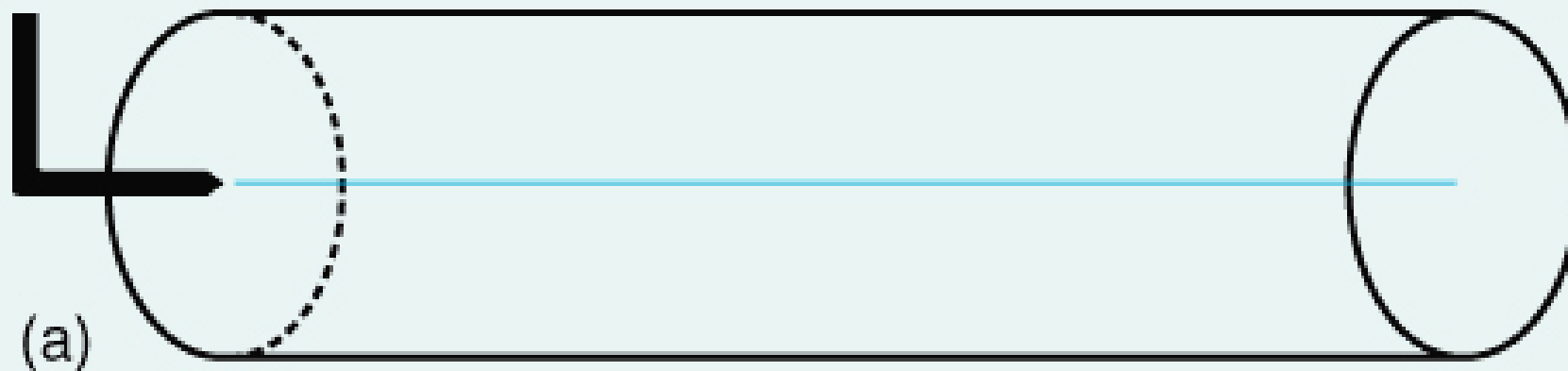


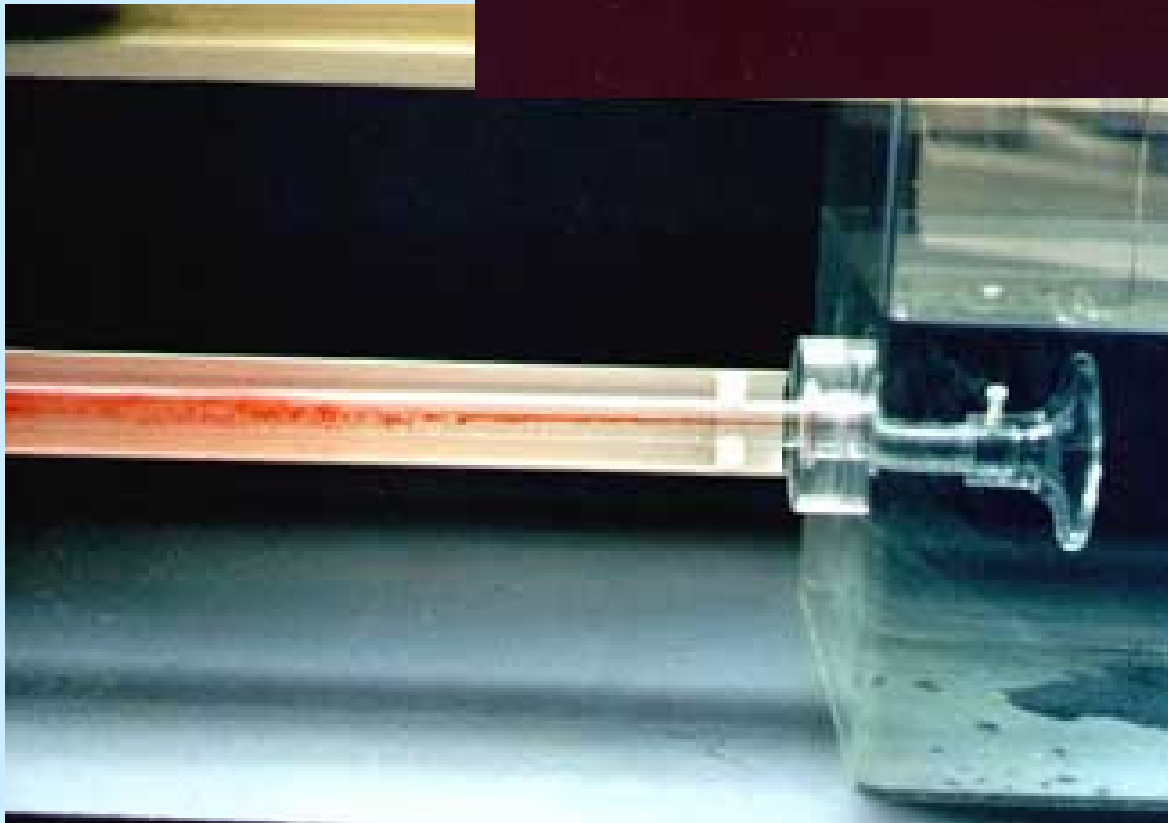
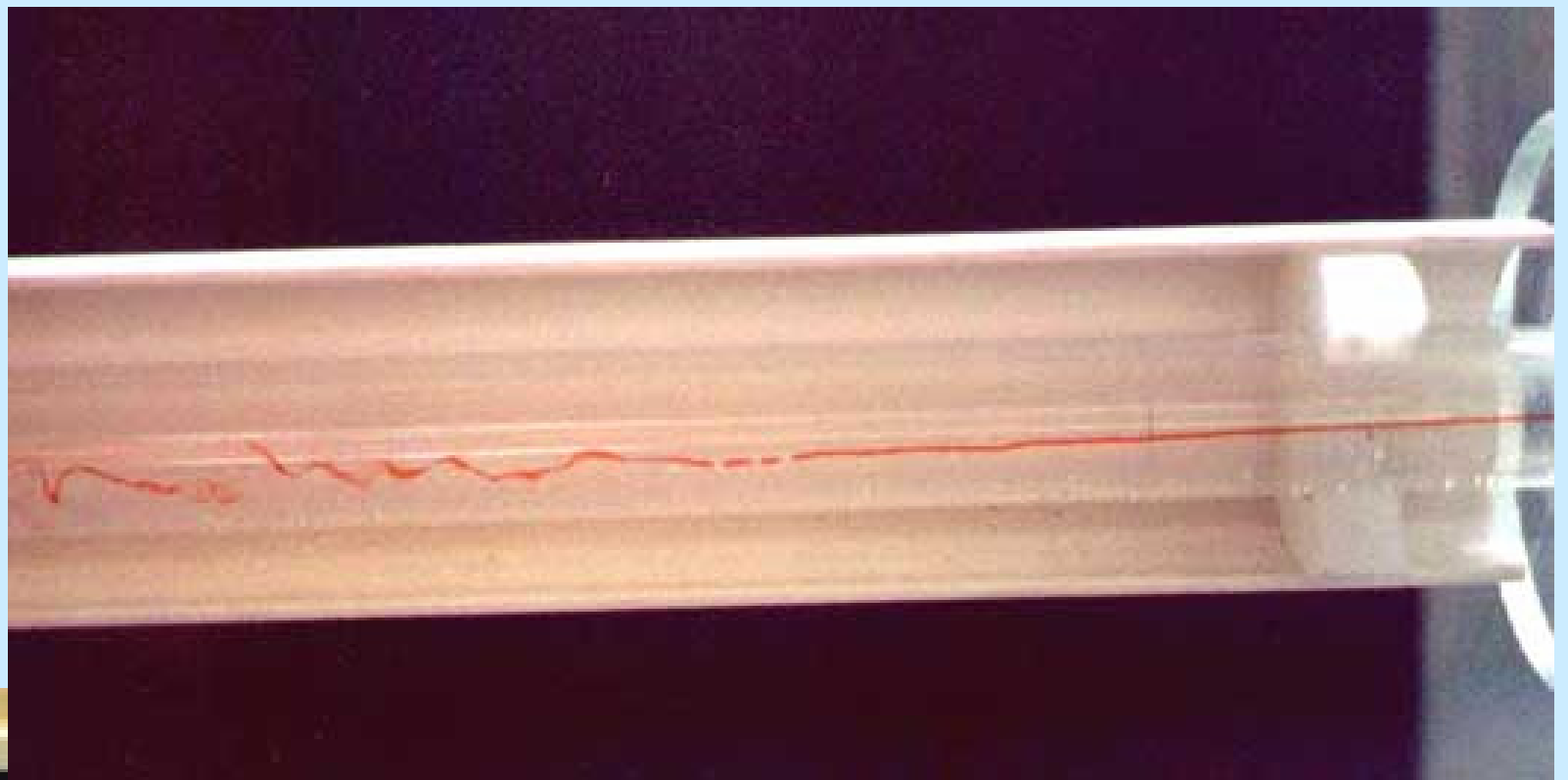


Curgerea laminară si turbulentă

- o Între mișcarea laminară și cea turbulentă, deosebirile esențiale se datorează dimensiunilor și structurii particulelor care participă la transferul impulsului.
- o Trecerea de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă se face gradat, existând o zonă a vitezelor fluidului în care mișcarea este tranzitorie.

Curgere laminară - Curgere turbulentă





Curgerea laminară si turbulentă

- o Cantitativ, caracterul laminar sau turbulent al curgerii este determinat de valoarea **criteriului Reynolds**.
- o La curgerea prin **conducte** și **canale**, curgerea se menține laminară pentru valori ale criteriului Re mai mici decât Re_{cr} :

$$Re_{cr} = \frac{\rho \cdot v \cdot d_{ech}}{\mu} = 2300$$

Curgerea laminară si turbulentă

- o Pentru valori Re cuprinse între 2300 și 10000, curgerea decurge în regim tranzitoriu (intermediar);
- o La valori $Re > 10^4$ curgerea este turbulentă.
- o În regim intermediar, curgerea poate rămâne laminară în absența unor promotori de turbulență (trepidații, vibrații exterioare, rugozitatea pereților interiori ai conductei).
- o În anumite condiții, regimul laminar se poate menține și la $Re = 4 \times 10^4$

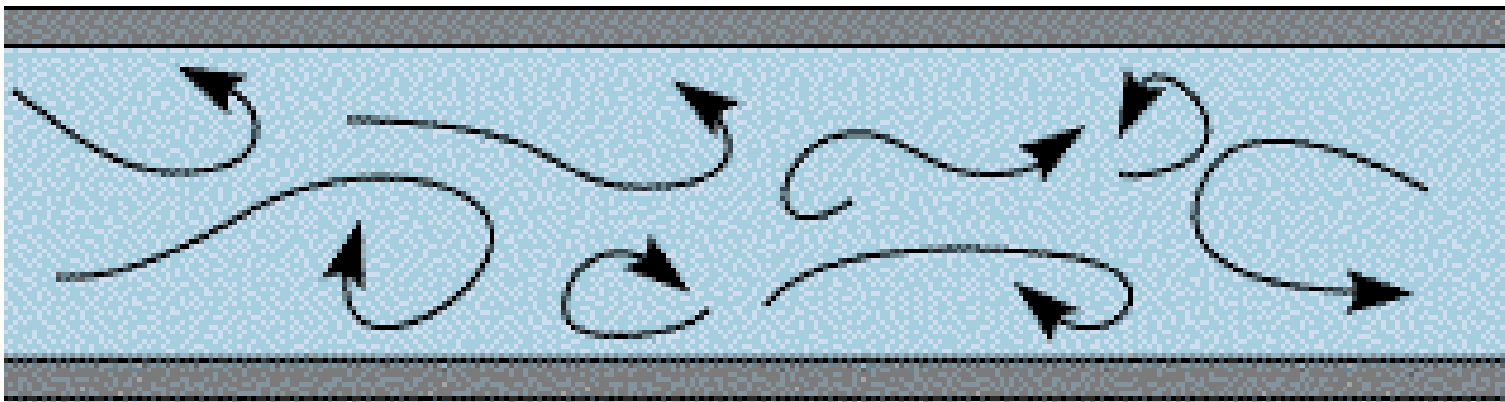
Curgerea laminară si turbulentă

- o Viteza maximă (critică) până la care curgerea unui fluid rămâne laminară:

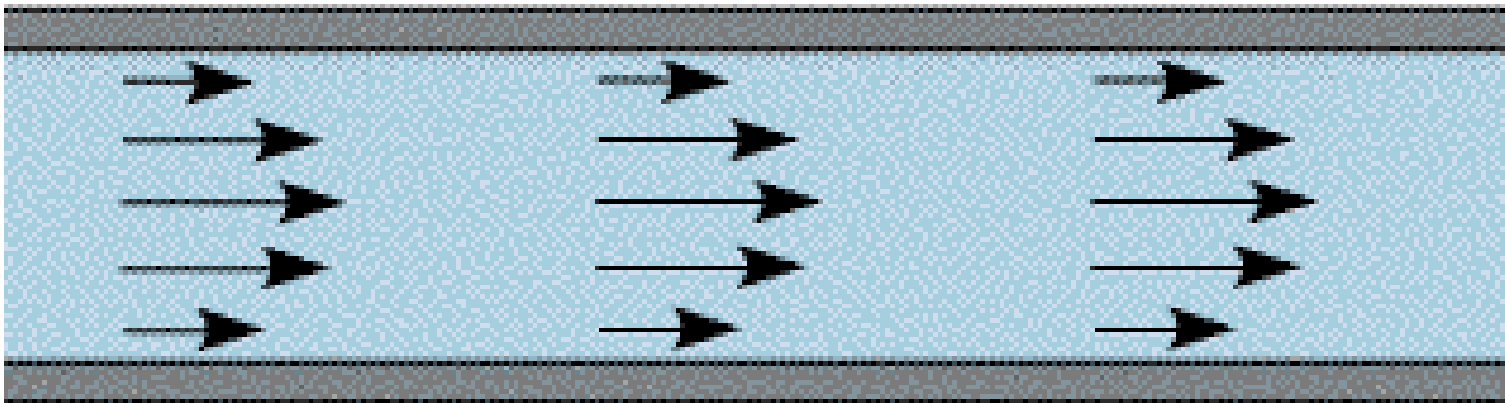
$$v_{cr} = 2300 \frac{\mu}{\rho \cdot d_{ech}}$$

Curgerea laminară si turbulentă

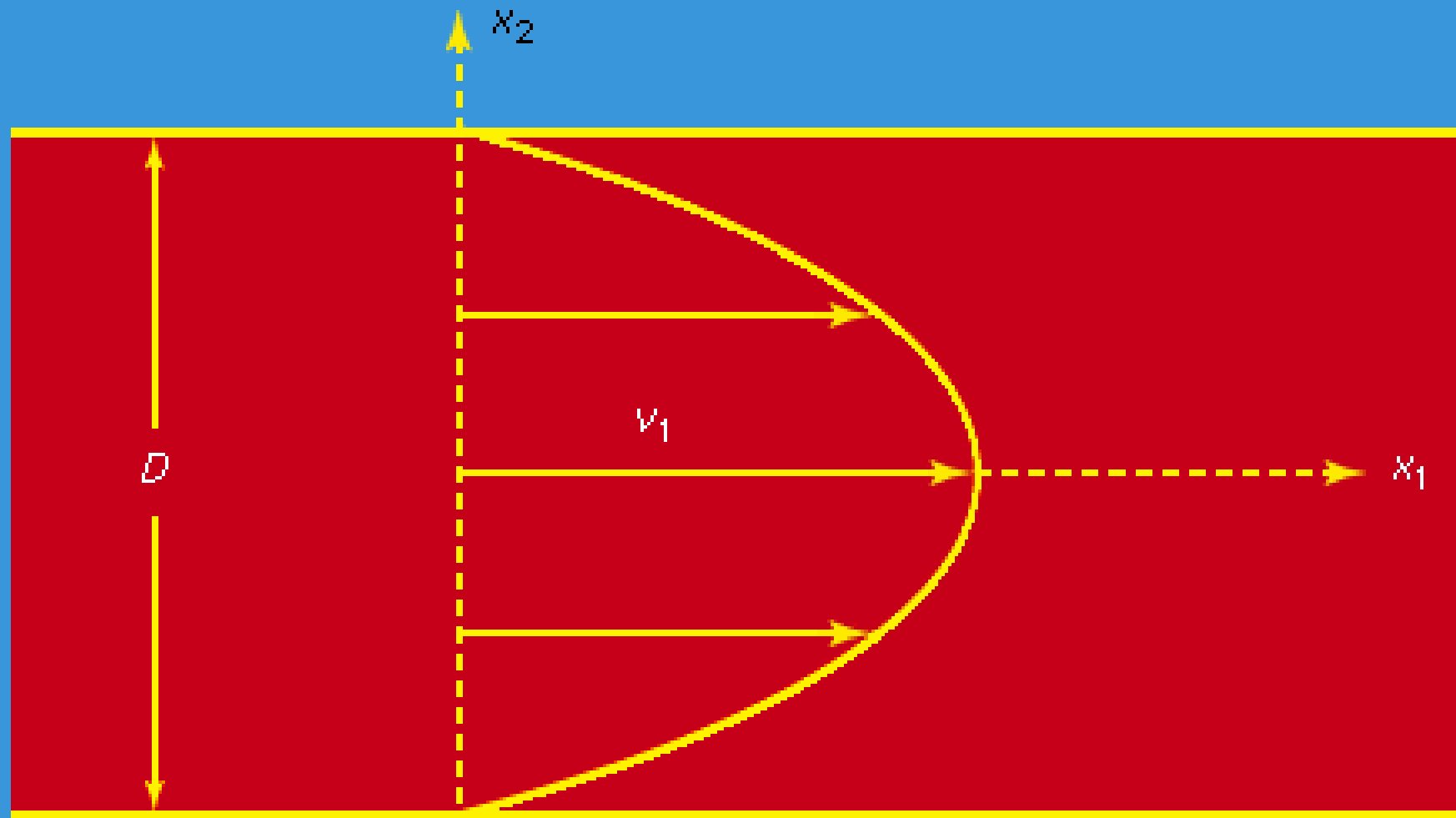
Turbulent



Laminar



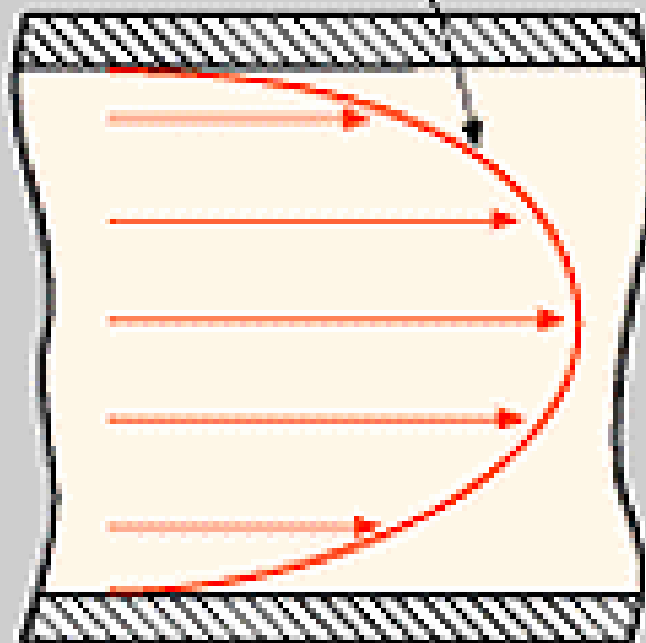
Profilul vitezelor in curgerea laminara



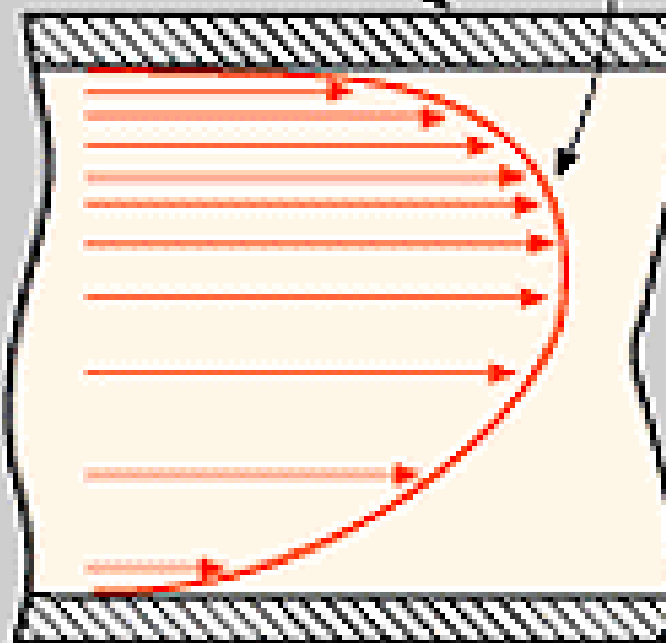
STREAMLINE

PARABOLA

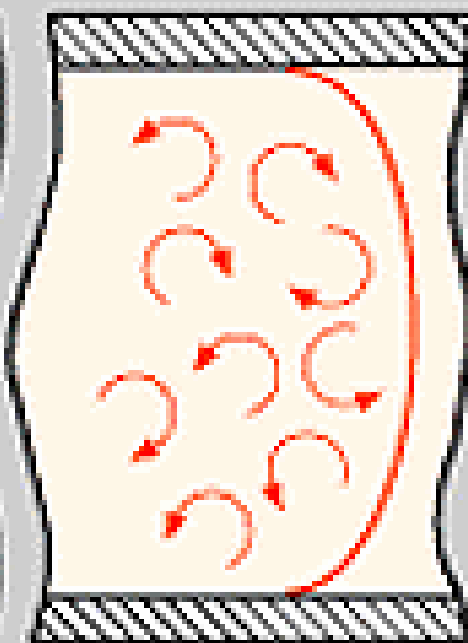
PIPEWALL



LAMINAR FLOW
UNIFORM
(AXISYMMETRIC)



LAMINAR FLOW
NON-UNIFORM
(ASYMMETRIC)



TURBULENT
FLOW

Stratul limită

- o În majoritatea cazurilor fluidele curg în prezența unor contururi solide staționare:
 - pereții rezervoarelor și conductelor,
 - suprafețele unor corpuri imersate, etc.
- o Ca urmare, viteza stratului de fluid aflat în contact cu conturul solid va fi egală cu viteza acestuia, respectiv va fi **nulă** pentru contururile solide staționare.
- o Prezența contururilor solide conduce la apariția unor **gradienti** ai vitezei fluidului normal pe suprafața acestora.

Stratul limită

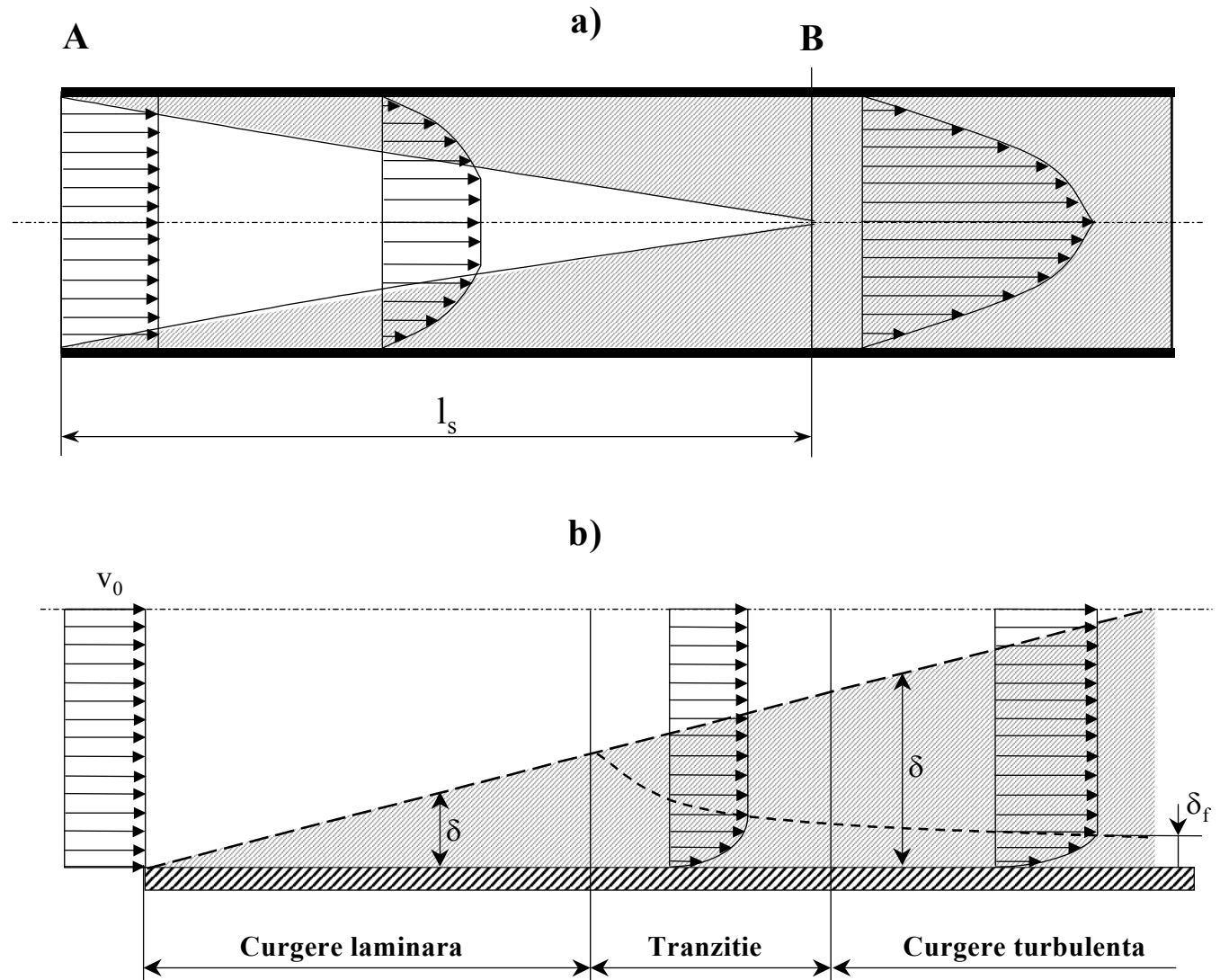
- o În curgerea fluidelor reale, gradientii de viteză generează apariția unor tensiuni tangențiale a căror valoare este direct proporțională cu mărimea gradientului de viteză, în conformitate cu legea de frecare a lui Newton.
- o Deoarece tensiunile tangențiale se exercită în sens opus direcției de curgere a fluidului, ele acționează ca forțe de frecare care se opun inegalității vitezelor în diverse puncte ale masei de fluid, reprezentând rezistențe la curgerea (înaintarea) fluidului.

Stratul limită

- o Regiunea din fluid în care viteza acestuia se modifică datorită interacțiunii cu contururile solide poartă denumirea de **strat limită**, noțiune introdusă de către Prandtl.
- o Această regiune se întinde de la suprafața conturului solid până la punctul din fluid în care gradientul de viteză (după normala mișcării) devine nul.
- o Întrucât modificarea semnificativă a vitezei se face preponderent în vecinătatea pereților solizi, convențional se definește grosimea stratului limită (δ), măsurată pe distanță normală la perete, ca fiind zona în care viteza fluidului este mai mică decât 99% din valoarea vitezei libere, v_0 .

Stratul limită

a - curgere laminară;
b - curgere turbulentă



Stratul limită

- o Deoarece stratul limită constituie acea porțiune a fluidului în care are loc cea mai importantă modificare a vitezelor în lungul secțiunii de curgere, rezultă că aici este practic localizat efectul de frânare al pereților:
- o În stratul limită este disipată energia mecanică a fluidului, ca urmare a rezistenței la înaintare pe care acesta o întâmpină.
- o Formarea stratului limită este importantă nu numai pentru curgerea fluidelor ci și în transferul de căldură și de masă.

Stratul limită

- o Curgerea fluidului în stratul limită poate fi laminară sau turbulentă.
- o Distanța pe care se formează stratul limită și se stabilizează curgerea poartă denumirea de **lungime de stabilizare**, l_s , mărime care poate fi calculată, pentru curgerea în regim laminar, cu ajutorul relației:

$$l_s = 0,0575 \cdot D \cdot Re$$

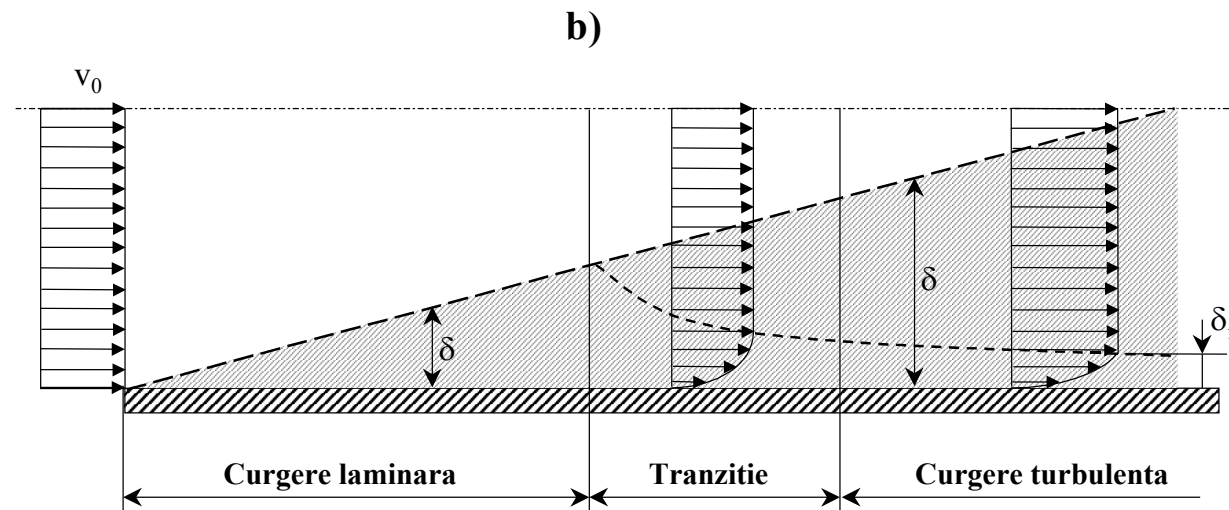
- o Valoarea l_s este mult influențată de condițiile de intrare ale fluidului în conductă.

Stratul limită

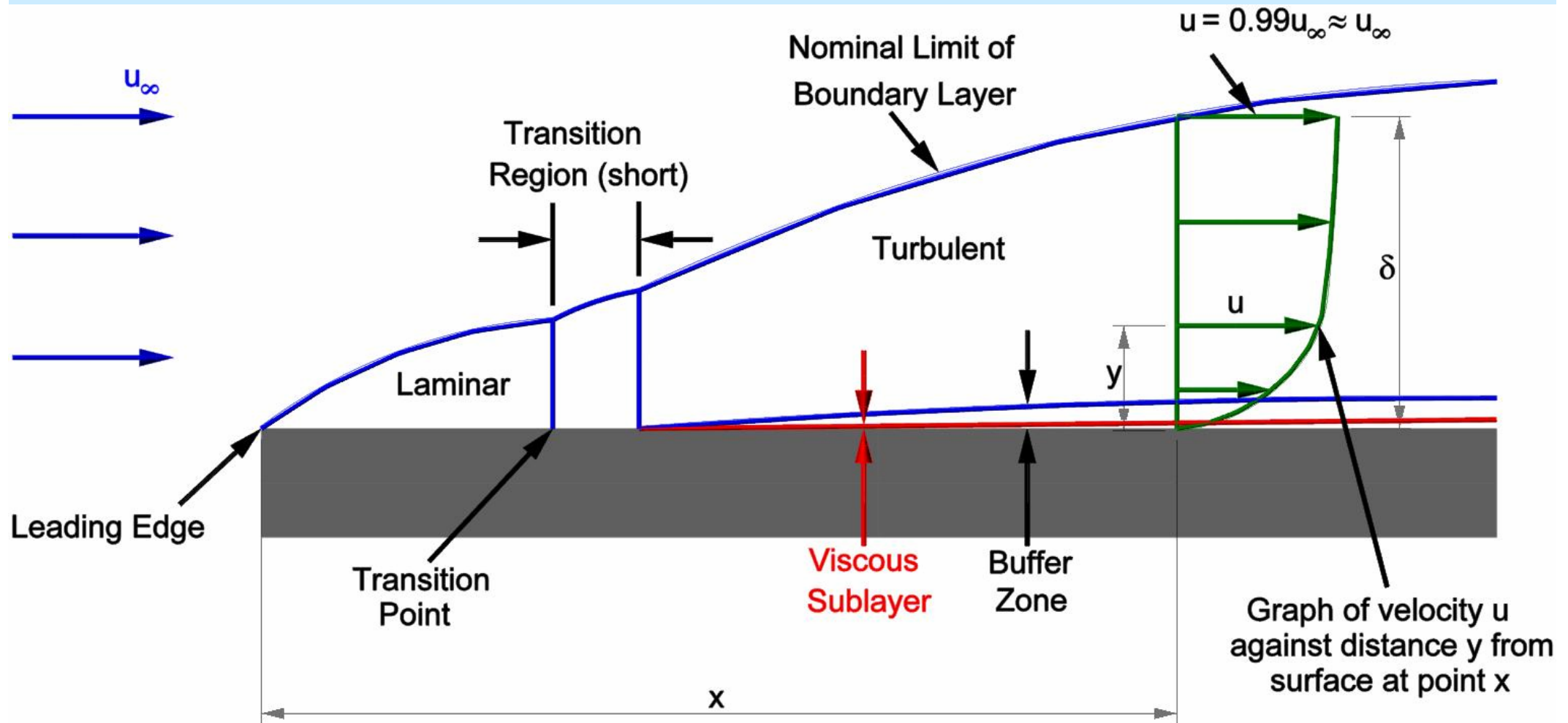
- o Noțiunile de film laminar și strat limită nu trebuie confundate:
- o Filmul laminar se referă doar la acea parte din stratul limită, imediat adiacentă conturului solid, care rămâne în curgere laminară,
- o Stratul limită include întreaga zonă în care există o variație a vitezei într-un plan normal pe conturul solid.

Stratul limită

- o Curgerea turbulentă nu se extinde până la perete întrucât viteza fluidului în acea zonă este insuficientă pentru promovarea turbulenței. Din acest motiv, curgerea turbulentă este întotdeauna însoțită și de curgere laminară.



Stratul limită

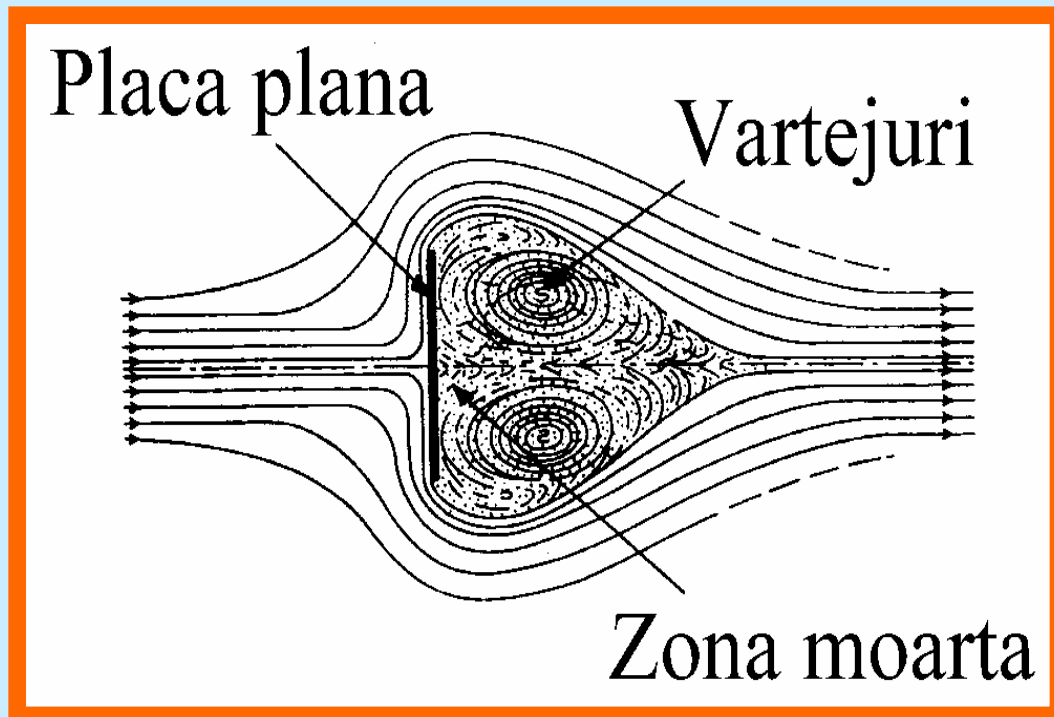


Stratul limită

- o Dacă fluidul în curgere întâlnește obstacol solid (un cilindru, o sferă, o placă plasată sub un anumit unghi față de direcția de mișcare a fluidului, etc.), stratul limită format pe suprafața corpului suferă fenomenul de **desprindere** în zona în care fluidul este încetinit.
- o Desprinderea stratului limită va conduce la apariția unei zone de turbulență în spatele obstacolului, turbulență care determină pierderi suplimentare de energie, în afara celor determinate de frecarea de suprafață.

Stratul limită

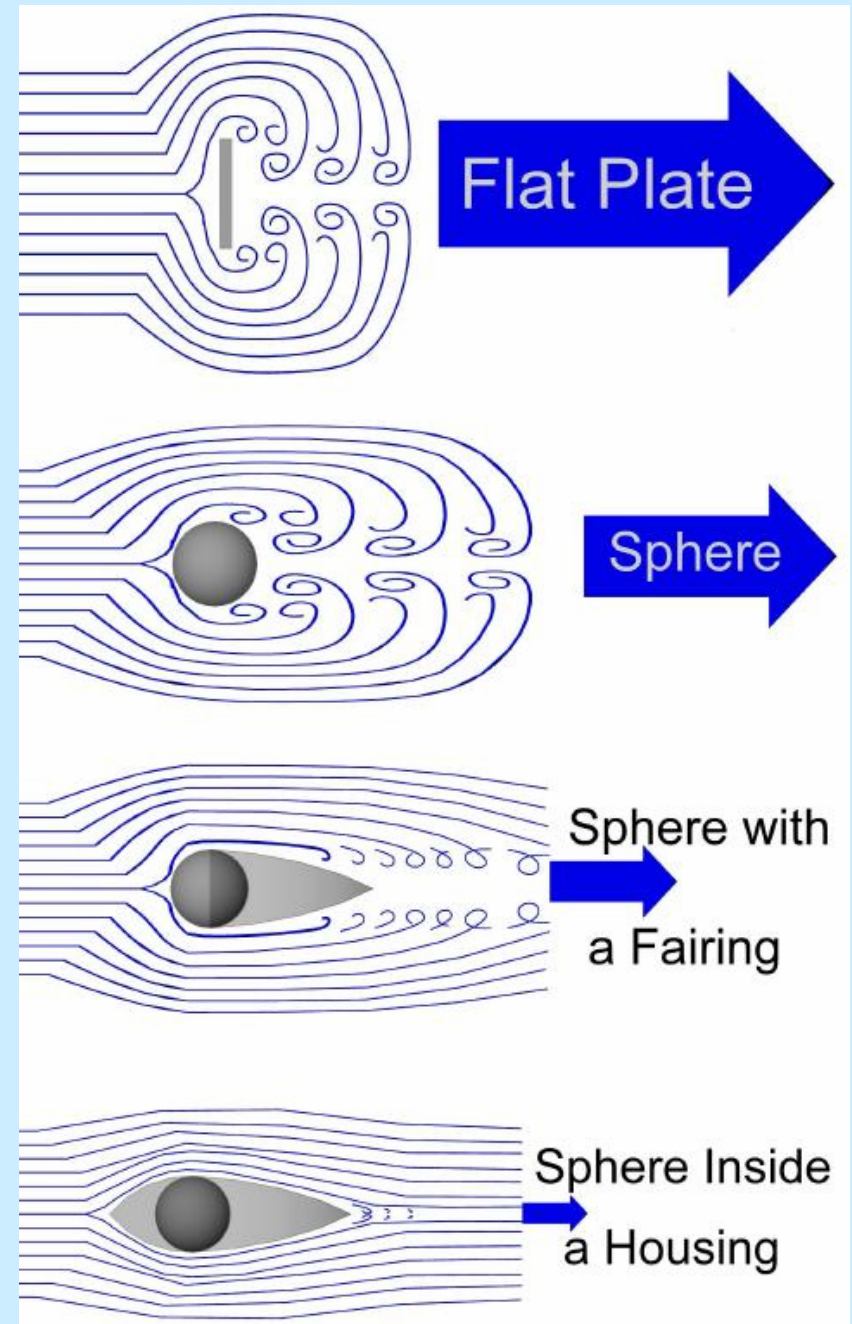
- o Posibilitatea desprinderii stratului limită există întotdeauna când presiunea curenului exterior stratului limită crește în direcția mișcării, deci ori de câte ori viteza fluidului se schimbă brusc (ca mărime sau ca direcție).



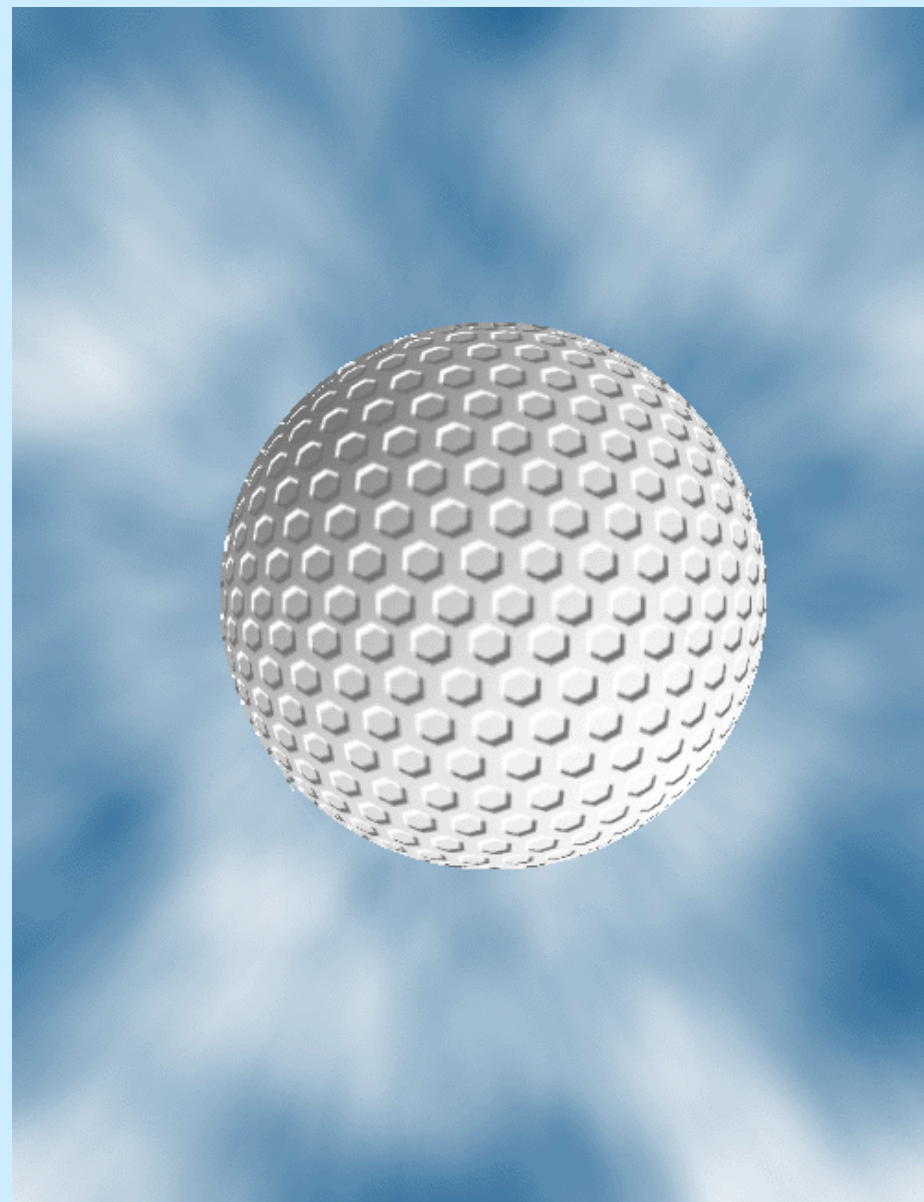
Cu cât creșterea de presiune este mai mare, cu atât posibilitatea de desprindere a stratului limită este mai mare.

Stratul limită

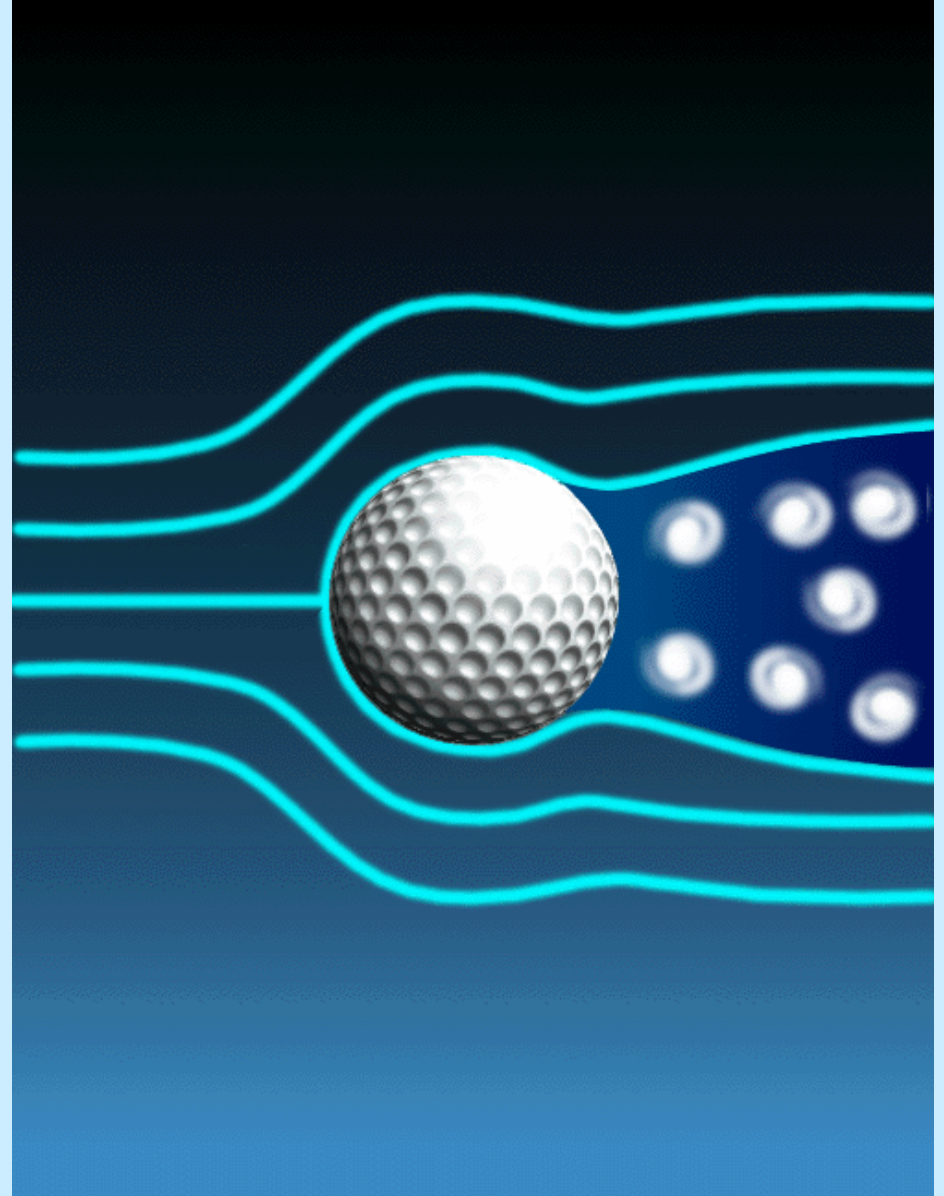
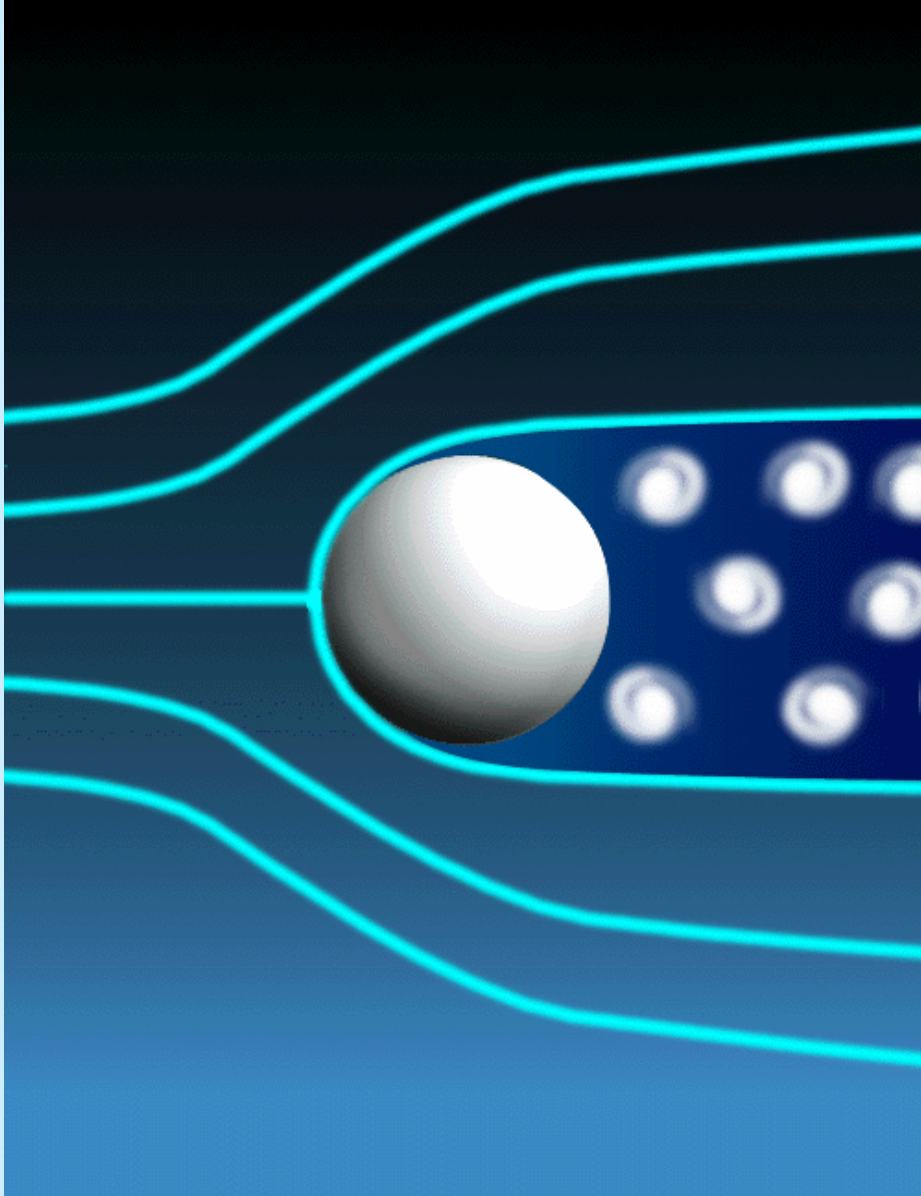
- o Desprinderea stratului limită va conduce la apariția unei zone de turbulență în spatele obstacolului, turbulență care determină pierderi suplimentare de energie, în afara celor determinate de frecarea de suprafață.



Desprinderea stratului limita



Desprinderea stratului limita



Ecuatii de conservare în curgerea fluidelor

- o Expresiile matematice care descriu cantitativ mișcarea fluidelor au la bază trei dintre legile fizice fundamentale, care se aplică (excepție făcând fenomenele nucleare) oricărei mișcări, independent de natura fluidului considerat:

Legea	Ecuatia de conservare
Legea conservării masei	Ecuatia de continuitate
Legea mișcării (Legea a II-a a lui Newton)	Ecuatia de echilibru dinamic (Ecuatia Navier – Stokes)
Legea conservării și transformării energiei (Principiul I al termodinamicii)	Ecuatia bilanțului de energie (Ecuatia Bernoulli)

Ecuatii de conservare în curgerea fluidelor

- o Ecuatiile curgerii fluidelor se obțin întocmind bilanțurile globale sau diferențiale de masă, forțe și energii pentru sistemul considerat.
- o Aceste ecuații corelează mărimile fizice care determină un proces dat.
- o Variabilele independente ale acestor ecuații sunt coordonatele spațiale (x, y, z) și temporale (t), iar variabilele dependente sunt viteza (v), temperatura (T), presiunea (P) și proprietățile fluidului.

Ecuatiile de conservare a masei

o Legea conservării masei:

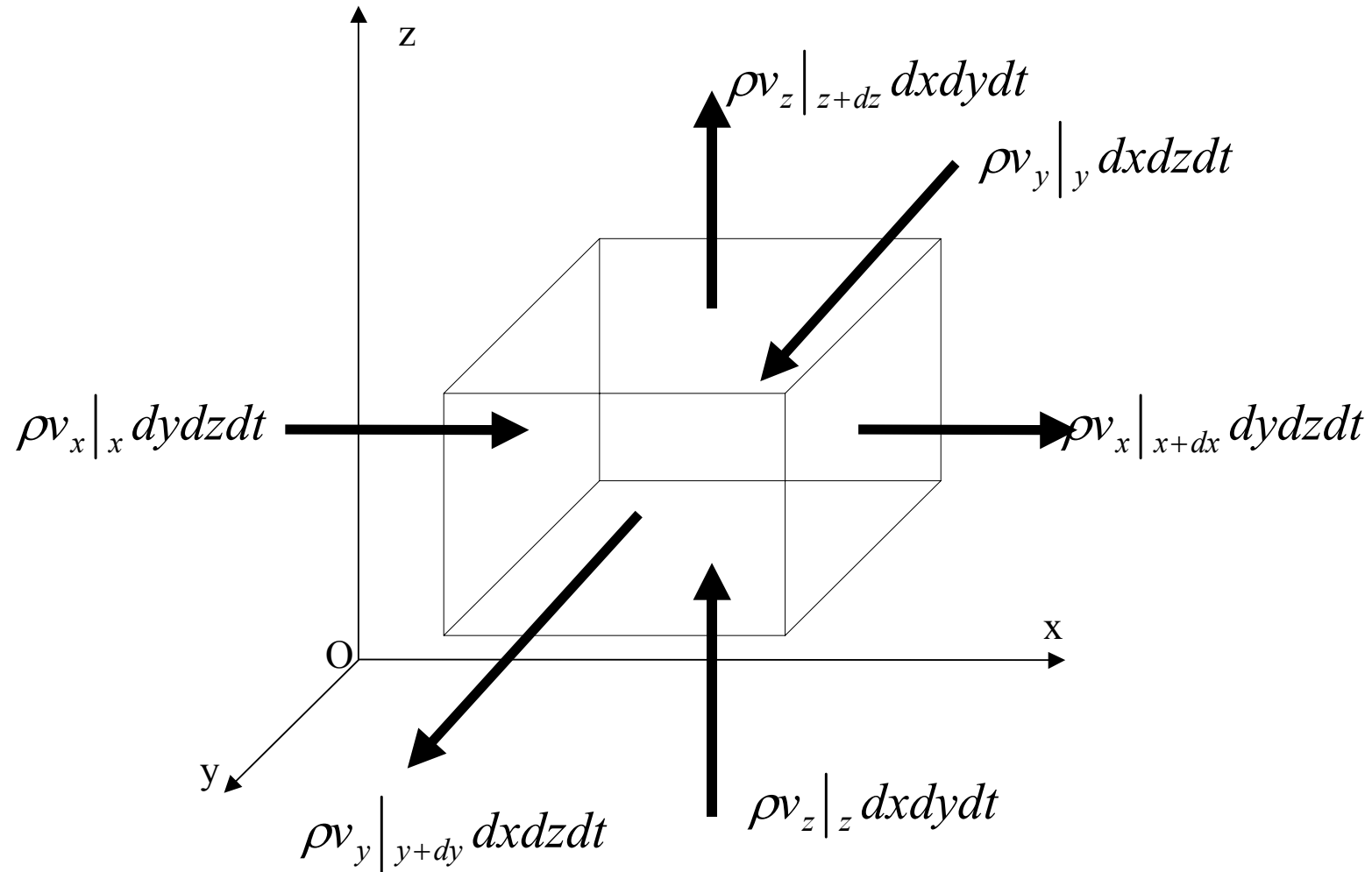
masa totală a tuturor substanțelor care iau parte într-un proces rămâne constantă

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{acumulata} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{intrata} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Masa} \\ \text{iesita} \end{array} \right\}$$

Ecuatiile de conservare a masei

- o Se consideră un fluid compresibil, omogen, monocomponent aflat în curgere izotermă, nestaționară, din care se izolează un volum elementar paralelipipedic dV cu laturile dx , dy , dz .
- o Bilanțul se întocmește pentru un interval de timp dt .

Ecuatiile de conservare a masei



Ecuatiile de conservare a masei

- o Considerând curgerea fluidului pe o direcție oarecare, pe direcția x intră în elementul de volum dV în intervalul de timp dt cantitatea de substanță:

$$\rho v_x|_x \cdot dydzdt = \rho v_x dydzdt$$

și iese cantitatea de substanță:

$$\rho v_x|_{x+dx} \cdot dydzdt = \rho v_x dydzdt + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dydzdt$$

Ecuatiile de conservare a masei

- o Expresii similare pot fi scrise și pentru direcțiile y și z :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v_y|_y \cdot dx dz dt = \rho v_y dx dz dt \\ \rho v_y|_{y+dy} \cdot dx dz dt = \rho v_x dx dz dt + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy dx dz dt \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v_z|_z \cdot dx dy dt = \rho v_z dx dy dt \\ \rho v_z|_{z+dz} \cdot dx dy dt = \rho v_z dx dy dt + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dz dx dy dt \end{array} \right.$$

Ecuatiile de conservare a masei

- o Acumularea de substanță pe direcția x are expresia:

$$[\text{acumulare}]_x = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt$$

- o Acumularea totală în elementul de volum se poate scrie:

$$[\text{acumulare}]_{dV} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Ecuatiile de conservare a masei

o Expresia acumulării totale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydzdt = - \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dxdydzdt$$

o Împărțind ambii membri prin dV și reordonând termenii se obține ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Ecuatiile de conservare a masei

o Ecuația

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

reprezintă expresia matematică a legii conservării masei și exprimă faptul că "masa unui sistem nu se schimbă din cauza mișcării".

Ecuatiile de conservare a masei

o Forme particulare:

- Curgerea este unidirecțională ($v_y = v_z = 0$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$$

- Regimul de curgere este staționar (derivatele în raport cu timpul sunt nule):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Ecuatiile de conservare a masei

o Forme particulare:

- Fluid incompresibil ($\rho = \text{ct.}$ și $D\rho/dt = 0$):

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{echivalent cu } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- Fluidul este incompresibil și curgerea este unidirecțională:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ecuatiile de conservare a masei

- o Toate aceste ecuații se referă la fluide aflate în curgere laminară, când vectorul viteză din orice punct al domeniului considerat nu variază ca direcție.
- o Tratarea curgerii turbulente necesită introducerea mărimilor medii temporale și a celor fluctuante. Astfel, vectorul v_j (unde j poate fi x , y sau z) se înlocuiește cu:

$$\mathbf{v}_j = \tilde{\mathbf{v}}_j + \mathbf{v}_j'$$

$\tilde{\mathbf{v}}_j$ mărimea medie temporală a componentei j a vitezei

$\mathbf{v}_j'$ valoarea fluctuației componentei j a vitezei

Ecuatiile de conservare a masei

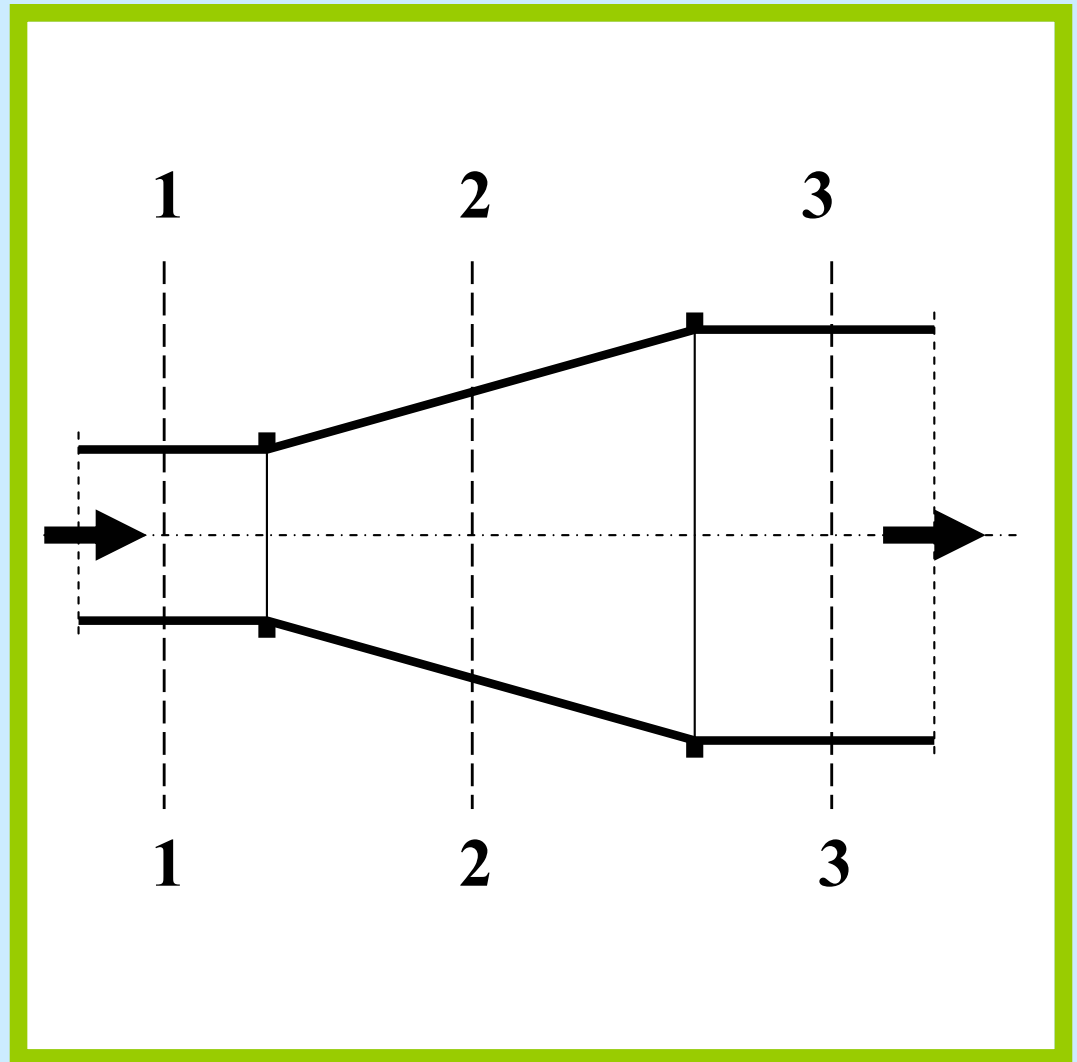
o Cu aceste modificări, ecuația continuitatii capătă forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{v}_x + v_x') + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v}_y + v_y') + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{v}_z + v_z') = \nabla \tilde{v} = 0$$

Ecuatia debitului

- o La curgerea în regim staționar a unui fluid printr-o conductă de secțiune variabilă, acumularea este nulă și debitul masic de fluid este constant:

$$m_1 = m_2 = m_3$$



Ecuatia debitului

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_3 v_3 A_3$$

o Dacă fluidul este incompresibil:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$$

o Ecuația anterioară se poate reduce la:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 = \text{const.}$$

o Produsul $\rho v A$ are dimensiunile kg.s^{-1} , fiind deci un debit masic.

Ecuatia debitului

- o Ținând cont de relația existentă între debitul masic și debitul volumic, ecuația debitului se poate pune sub forma:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3 = m_v = \text{const.}$$

- o **ecuația debitului**, este relația de legătură între viteza unui fluid (**v**), debitul său volumic (**m_v**) și aria secțiunii de curgere (**A**).

Ecuatia debitului

- o Dacă secțiunea de curgere este circulară și curgerea este sub presiune, ecuația permite calculul diametrului secțiunii de curgere:

$$d = \sqrt{\frac{4m_v}{\pi \cdot v}}$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Forțele de inerție ale unui element de fluid în mișcare trebuie să fie egale cu suma forțelor externe care acționează asupra elementului respectiv (legea a II-a a dinamicii - Newton)

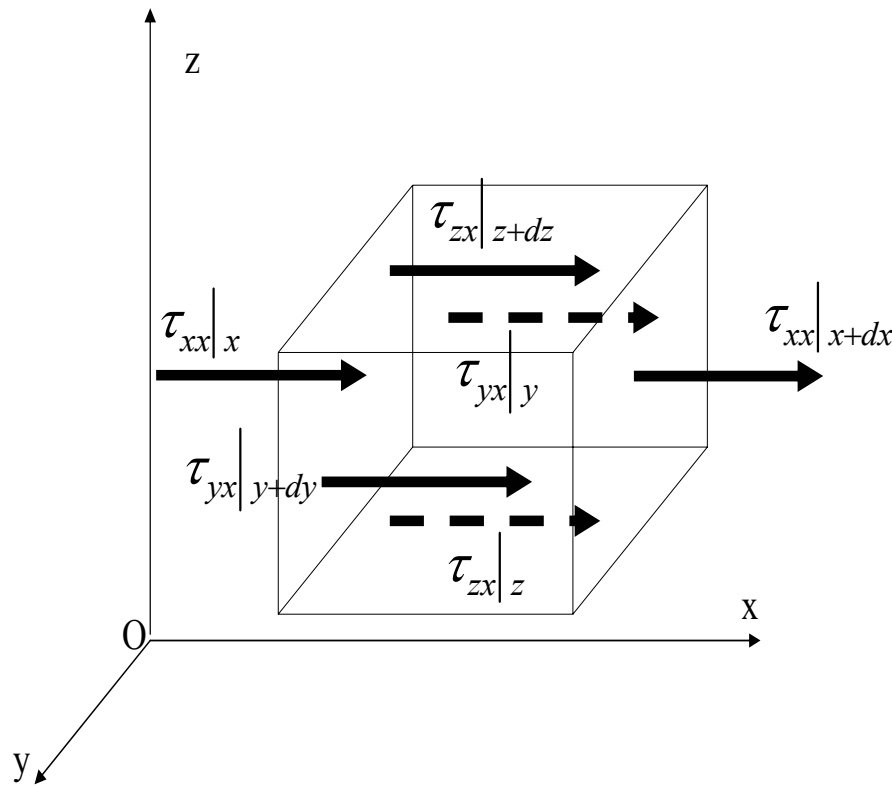
$$F_i = m \cdot a = \frac{d(mv)}{dt} = \sum F_e$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o **mv** reprezintă **impulsul** (cantitatea de mișcare) elementului de fluid considerat, iar derivata sa în raport cu timpul are dimensiunile unei forțe.
- o ecuația de bilanț a impulsului în regim nestaționar se poate scrie sub forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{acumulare} \\ \text{a impulsului} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{intrare a} \\ \text{impulsului} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Viteza de} \\ \text{iesire a} \\ \text{impulsului} \end{array} \right\} + \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Forte externe ce} \\ \text{actioneaza asupra} \\ \text{elementului de} \\ \text{volum de fluid} \end{array} \right\}$$

Ecuatiile de conservare a impulsului



Se consideră
un volum elementar
de fluid:

$$dV = dx dy dz$$

izolat din masa unui
fluid aflat în curgere
izotermă,
nestaționară, după o
direcție arbitrară de
curgere.

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Transportul impulsului are loc:
 - prin **mecanism molecular**, ca rezultat al forțelor de frecare ce apar între straturi adiacente de fluid ce curg cu viteze diferite;
 - prin **mecanism convectiv**, prin deplasarea masei de fluid sub acțiunea unui gradient de presiune.

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Viteza de acumulare a impulsului, după direcția x , în volumul considerat, este dată de produsul dintre variația concentrației impulsului în timp și volum:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} \cdot dx dy dz$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Componenta impulsului pe direcția x , care intră/iese în/din elementul de volum **prin mecanism convectiv** este dată de produsul dintre concentrația impulsului pe unitatea de volum și debitul volumic:

$$\text{pe fata } x : \rho v_x \cdot v_x \Big|_x dydz$$

$$\rho v_x \cdot v_x \Big|_{x+dx} dydz$$

$$\text{pe fata } y : \rho v_x \cdot v_y \Big|_y dx dz$$

$$\rho v_x \cdot v_y \Big|_{y+dy} dx dz$$

$$\text{pe fata } z : \rho v_x \cdot v_z \Big|_z dx dy$$

$$\rho v_x \cdot v_z \Big|_{z+dz} dx dy$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Viteza cu care componenta x a impulsului intră/iese **prin mecanism molecular** în/din elementul de volum este dată de produsul dintre tensiunea tangențială și suprafața prin care are loc transferul:

$$\text{pe fata } x : \tau_{xx} \Big|_x dydz$$

$$\tau_{xx} \Big|_{x+dx} dydz$$

$$\text{pe fata } y : \tau_{yx} \Big|_y dxdz$$

$$\tau_{yx} \Big|_{y+dy} dxdz$$

$$\text{pe fata } z : \tau_{zx} \Big|_z dxdy$$

$$\tau_{zx} \Big|_{z+dz} dxdy$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Asupra elementului de volum dV mai acționează pe direcția x :
 - forța de presiune
 - forța gravitațională

$$(P|_x - P|_{x+dx})dydz + \rho g_x dx dy dz$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Efectuand inlocuirile în ecuația de bilanț a impulsului, după trecere la limită, împărțire prin dV și reordonarea termenilor rezultă:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} = - \left[\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \right] +$$
$$+ \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

o Similar, pentru direcțiile y și z se poate scrie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial z} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \\ \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z} \right] + \\ & + \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z\end{aligned}$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

o Vectorial, ecuațiile anterioare se pot scrie:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -(\nabla \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + (\nabla \boldsymbol{\tau}) - (\nabla P) + \rho \mathbf{g}$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Ecuatiile conservarii impulsului pot fi scrise și sub o altă formă.
- o Pentru direcția x , de exemplu, ecuația devine:

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] + \\ & + v_x \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = \\ & = \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Paranteza primului termen din membrul stâng conține derivata substanțială a vitezei Dv_x/dt :

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = \frac{Dv_x}{dt}$$

- o iar paranteza celui de-al doilea termen din membrul stâng este nulă, termenii săi reprezentând ecuația continuității curgerii:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] = 0$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Ca urmare, ecuația transferului impulsului după direcția x , are în final forma:

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

- o În mod similar, ecuațiile transferului de impuls după direcțiile y și z au forma:

$$\rho \frac{Dv_y}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dv_z}{dt} = \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Scrise vectorial:
$$\rho \frac{Dv}{dt} = \nabla \tau - \nabla P + \rho g$$
- o Ecuatiile de conservare a impulsului deduse anterior sunt valabile pentru **orice fluid aflat în curgere**.
- o Pentru obținerea cazurilor particulare ale anumitor fluide, tensorul tensiunilor (τ_{ij}) trebuie explicitat din ecuația reologică corespunzătoare.

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Astfel, în cazul **fluidelor newtoniene**, tensorul tensiunilor se corelează cu viscozitatea dinamică a fluidului (μ) și cu gradientii de viteză astfel:

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) = 2\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]$$

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o După efectuarea calculelor și derivarea în condițiile curgerii izoterme ($\rho = \text{const.}$ și $\mu = \text{const.}$) se obțin **ecuațiile Navier - Stokes**:

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \mathbf{v}) + \nabla^2 v_x \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv_y}{dt} = \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \mathbf{v}) + \nabla^2 v_y \right] - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dv_z}{dt} = \mu \left[\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \mathbf{v}) + \nabla^2 v_z \right] - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o Ecuatiile **Navier - Stokes** împreună cu **ecuațiile de continuitate**, reprezintă rezolvarea teoretică a curgerii fluidelor newtoniene.
- o Integrarea acestor ecuații, pentru a determina valorile variabilelor v_x , v_y , v_z , P , în funcție de **timp**, pentru punctele unui curent de fluid, nu se poate realiza decât pentru cazuri simple sau simplificate.

Ecuatiile de conservare a impulsului

- o În cazul fluidelor ideale, pentru care viscozitatea este nulă, ecuațiile Navier - Stokes iau forma binecunoscută a **ecuațiilor Euler**:

$$\rho \frac{Dv_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dv_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

- o Aceste ecuații sunt valabile doar în cazurile în care efectele viscozității asupra curgerii sunt neesențiale.

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Exprimă matematic **legea conservării energiei**
- o Cu ajutorul lor se pot obține:
 - **distribuția temperaturilor** la curgerea neizotermă a fluidelor;
 - relațiile de calcul pentru determinarea "**pierderilor de energie**" prin frecare la curgerea fluidelor prin conducte și utilaje.

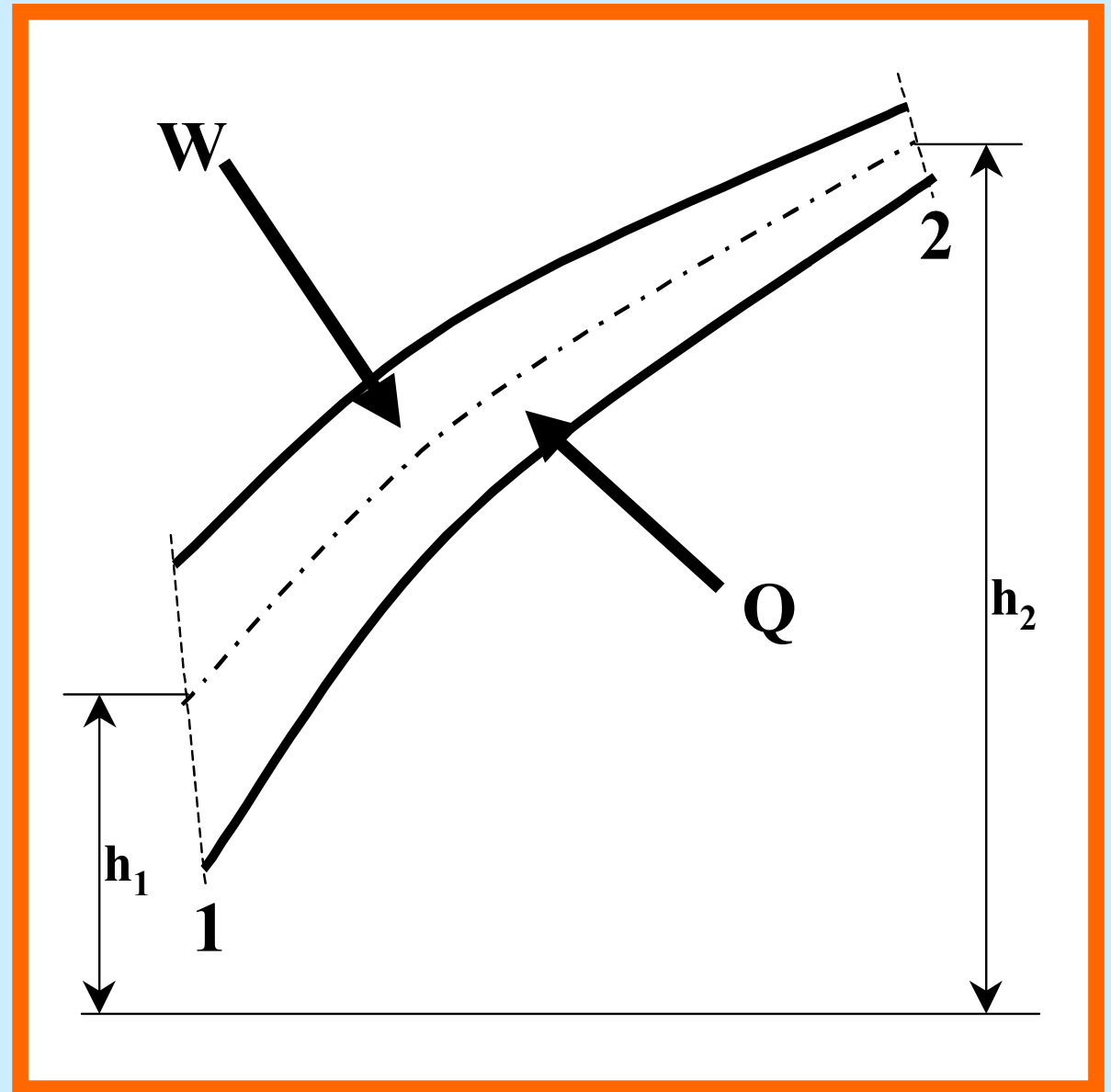
Ecuatiile de conservare a energiei

o La modul cel mai general, bilanțul de energie are forma:

$$\sum \left[\begin{array}{c} \text{Energii} \\ \text{acumulate} \end{array} \right] = \sum \left\{ \begin{array}{c} \text{Energii} \\ \text{intrate} \end{array} \right\} - \sum \left\{ \begin{array}{c} \text{Energii} \\ \text{iesite} \end{array} \right\}$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Se consideră un tub de curent de secțiune variabilă, delimitat de secțiunile de curgere (1) și (2). În acest tub de curent, schimbul de energie cu exteriorul constă din introducerea de energie mecanică (W) și de căldură (Q) în sistem.



Ecuatiile de conservare a energiei

- o Pe lângă aceste forme de energie, în sistem mai intervin:
 - energia potențială (gh);
 - energia cinetică ($v^2/2$);
 - energia internă (u);
 - Lucrul mecanic extern (Pv_s).
- o Toate aceste energii sunt raportate la unitatea masică de fluid.

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Pe baza ecuației generale de bilant energetic, acumularea de energie în sistem se poate scrie:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (u_1 - u_2) + (P_1 v_{s1} - P_2 v_{s2}) + W + Q$$

- o Aceasta ecuație se mai poate scrie și înlocuind energia internă cu entalpia (H) prin intermediul relației: $H = u + P v_s$:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (H_1 - H_2) + W + Q$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Variația energiei interne ($u_1 - u_2$) se datorează pe de o parte energiei calorice Q introduse din exterior și pe de altă parte energiei F rezultate din frecări:
 - frecarea internă între straturile de fluid cu viteze diferite,
 - frecarea externă a fluidului cu pereții.
- o În aceste condiții se poate scrie:

$$u_1 - u_2 = -(\Delta u)_1^2 = -\left(Q + F - \int_1^2 P dv_s \right)$$

Ecuatiile de conservare a energiei

sau:

$$P_1 v_{s1} - P_2 v_{s2} = -[\Delta(Pv_s)]_1^2 = -\left(\int_1^2 P dv_s - \int_1^2 v_s dP\right)$$

o Înlocuind substituțiile anterioare în ecuatia bilantului energetic, aceasta devine în final:

$$\frac{dE}{dt} = g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \int_1^2 v_s dP - F + W$$

cunoscută și ca **ecuația Bernoulli**.

Ecuatiile de conservare a energiei

o Pentru regim staționar, **ecuația Bernoulli** capătă forma:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \int_1^2 v_s dP - F + W = 0$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Dacă regimul de curgere este staționar ($dE/dt = 0$), curgerea este izotermă ($T = \text{const.}$) și fluidul este incompresibil ($v_{s1} = v_{s2}$), atunci:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + v_s(P_1 - P_2) - F + W = 0$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Înlocuind volumul specific al fluidului funcție de densitatea acestuia: $v_s = 1/\rho$, ecuația devine:

$$g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \frac{P_1 - P_2}{\rho} - F + W = 0 \quad [\text{J/kg}]$$

$$\rho g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + (P_1 - P_2) - F^* + W^* = 0 \quad [\text{J/m}^3 = \text{N/m}^2]$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- W energia necesară pentru transportul unității de **masă** de fluid din secțiunea 1 în secțiunea 2;
 - W^* energia necesară pentru transportul unității de **volum** de fluid din secțiunea 1 în secțiunea 2;
 - F energia de frecare raportată la unitatea de **masă** de fluid;
 - F^* energia de frecare raportată la unitatea de **volum** de fluid;
- o între W , W^* și F , F^* există corelațiile:

$$W^* = W\rho \quad \text{și} \quad F^* = F\rho$$

Ecuatiile de conservare a energiei

Dacă regimul de curgere este staționar ($dE/dt = 0$), curgerea este izotermă ($T = \text{const.}$), fluidul este incompresibil ($v_{s1} = v_{s2}$), ideal (frecare nulă) și nu schimbă energie cu mediul exterior ($W = 0$, $Q = 0$), atunci:

$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{P_1}{\rho} = gh_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{P_2}{\rho} = \text{const.}$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Împărțind ecuația anterioară prin **g**, ecuația Bernoulli devine:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} = H_T = \text{const.} (*)$$

- o în care H_T reprezintă energia specifică a fluidului, denumită și **sarcină hidrodinamică** exprimată în metri coloană de fluid.

Ecuatiile de conservare a energiei

o Această ecuație se mai poate scrie:

$$H_g + H_d + H_p = H_T$$

unde sarcina hidrodinamică (înălțimea totală de ridicare a fluidului) este alcătuită din:

- înălțimea geometrică (H_g),
- înălțimea dinamică (H_d),
- înălțimea statică sau piezometrică (H_p).

Ecuatiile de conservare a energiei

o Înmulțind cu ρg în ecuația (*) se obține:

$$\rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2 = P_T = \text{const.}$$

din care se poate explicita **căderea totală de presiune din sistem**, ΔP_T , ca o sumă între:

- căderea de presiune geometrică (ΔP_g),
- căderea de presiune dinamică (ΔP_d),
- căderea de presiune statică (piezometrică) (ΔP_{st}):

Ecuatiile de conservare a energiei

$$\begin{aligned}\Delta P_T &= \Delta P_g + \Delta P_d + \Delta P_{st} = \\ &= \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) + (P_1 - P_2)\end{aligned}$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Dacă un fluid ideal se află în curgere izotermă, în regim staționar, fără schimb de energie cu mediul exterior, iar conducta este amplasată orizontal ($h_1 = h_2$), ecuația Bernoulli devine:

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{\rho} = 0$$

Ecuatiile de conservare a energiei

- o Pentru un fluid real aflat în curgere izotermă, în regim staționar, prin conducte orizontale, de secțiune constantă ($v_1 = v_2$), ecuația Bernoulli se scrie:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} - F = 0 \text{ echivalent cu : } \frac{\Delta P}{\rho} = F \text{ sau : } \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{F}{g} = f$$

- o unde f are dimensiunile unei lungimi și poartă denumirea de **factor de frecare**.

Frecarea și căderea de presiune

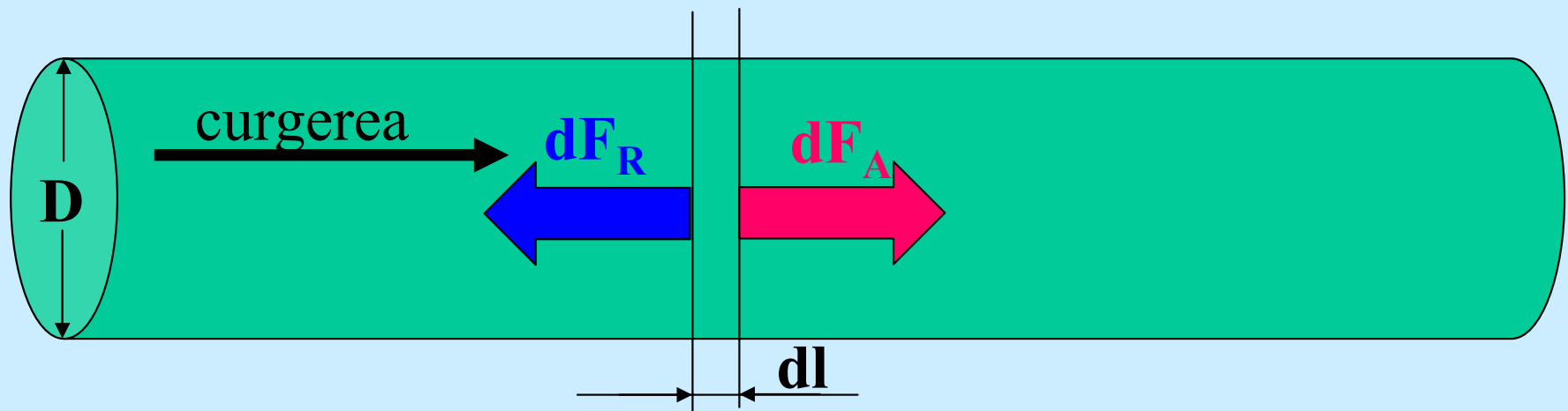
- o La curgerea fluidelor reale în contact cu suprafețe solide:
 - prin conducte,
 - prin aparate,
 - peste straturi granulare,
 - peste fascicule de țevi
- o parte din energia mecanică a fluidului este disipată ireversibil sub formă de energie termică pentru învingerea **rezistențelor la curgere** pe care acesta le întâmpină în sistem.

Frecarea și căderea de presiune

- o Forțele care se opun curgerii sunt forțe de frecare.
- o Frecarea generată în straturi limită adiacente frontierelor solide: **frecare de suprafață (R_s)**,
- o Frecarea generată de desprinderea stratului limită: **frecare de formă (R_f)**.
- o **Rezistența totală la curgere (R_T)** este dată de ambele tipuri de frecări, ponderea fiecăreia dintre ele fiind dictată de caracteristicile sistemului și de regimul de curgere.
- o În multe cazuri, pierderea de energie suferită de fluidul în curgere este exprimată în termeni de presiuni, de unde și denumirea de **"pierdere (cădere) de presiune"**.

Frecarea și căderea de presiune

- o Considerând o porțiune de conductă circulară dreaptă de lungime infinitezimală dl și diametru D , prin care curge un fluid incompresibil, asupra acestuia se exercită două forțe:
 - o forță de acțiune dF_A
 - o forță de rezistență dF_R



Frecarea și căderea de presiune

- o Forța de acțiune dF_A dirijată în sensul curgerii și rezultată din diferența de presiune dP la capetele conductei:

$$dF_A = AdP = \frac{\pi D^2}{4} dP$$

Frecarea și căderea de presiune

- o Forța de rezistență dF_R dirijată în sens contrar curgerii, rezultată din frecarea fluidului cu peretele; notând cu τ valoarea tensiunii tangențiale în dreptul peretelui conductei, forța de rezistență pe lungimea dl va fi:

$$dF_R = \pi D \tau dl$$

Frecarea și căderea de presiune

- o În curgere staționară, cele două forțe sunt egale și se poate scrie:

$$\frac{\pi D^2}{4} dP = \pi D \tau dl$$

- o de unde rezultă valoarea căderii de presiune:

$$dP = 4 \frac{\tau}{D} dl$$

Frecarea și căderea de presiune

- o Introducând factorul adimensional λ , denumit **coeficient de frecare**, ecuația anterioară devine:

$$dP = \frac{\lambda}{D} \frac{v^2}{2} \rho dl \quad \text{cu:} \quad \lambda = \frac{8\tau}{\rho v^2}$$

Frecarea și căderea de presiune

- o Integrând cu condițiile la limită:

$$l = 0; \quad P = P_1$$

$$l = l; \quad P = P_2$$

- o se obține ecuația lui Fanning (ecuația Darcy-Weissbach), care exprimă căderea de presiune datorată frecării în conducte circulare drepte:

$$P_1 - P_2 = \Delta P = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho \quad [\text{N/m}^2]$$

Frecarea și căderea de presiune

- o Energia specifică de frecare (energia de frecare raportată la unitatea de masă a fluidului) se deduce din ecuația Bernoulli scrisă în forma simplificată:

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} - F = 0 \text{ echivalent cu: } \frac{\Delta P}{\rho} = F \text{ sau: } \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{F}{g} = f$$

- o rezultând:

$$F = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \quad \text{sau:} \quad f = \frac{F}{g} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}]$$

- o în care f reprezintă așa-numita "pierdere de sarcină", respectiv diferența dintre sarcinile dinamice în două secțiuni ale unui tub de curent.

Frecarea și căderea de presiune

- o Căderea de presiune a unui fluid în curgere are două componente:
 - o componentă pentru curgerea uniformă a curentului de fluid - **căderea de presiune liniară**;
 - o componentă pentru zonele în care curgerea fluidului este neuniformă (din cauza modificării vitezei sale ca mărime sau ca direcție) - **căderea de presiune locală**.

Frecarea și căderea de presiune

- o Căderea totală de presiune datorată frecării va fi dată de suma celor două căderi de presiune:

$$\Delta P_f = \Delta P_{lin} + \Delta P_{rl}$$

Frecarea și căderea de presiune

- o Căderile de presiune locale apar în cazul existenței pe traseul de curgere a fluidului a unor **rezistențe hidraulice locale**: curbe, coturi, ramificații, reducții, ventile, diafragme, etc.
- o Căderea de presiune prin rezistențe hidraulice locale se exprimă prin relații de forma:

$$\Delta P_{rl} = \zeta \frac{v^2}{2} \rho \text{ [N/m}^2\text{]} \text{ sau: } h_{rl} = \zeta \frac{v^2}{2g} \text{ [m]}$$

- o ζ reprezintă coeficientul adimensional al căderii locale de presiune, fiind specific **tipului de rezistență hidraulică locală** și depinzând de **regimul de curgere**.

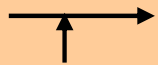
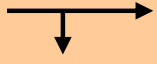
Frecarea și căderea de presiune

- o O metodă mai puțin exactă de estimare a căderilor de presiune locale constă în înlocuirea rezistențelor hidraulice locale cu o lungime echivalentă, l_e , de conductă dreaptă, care ar produce aceeași cădere de presiune ca și rezistența hidraulică locală considerată.
- o Această lungime echivalentă se exprimă funcție de diametrul interior (D) al conductei drepte:

$$l_e = D \sum n$$

- o n depinde de tipul rezistenței hidraulice locale considerate.

Lungimea echivalentă a unor rezistențe hidraulice locale

Rezistența	n
Cot de 45°	15
Cot de 90° ($9,5 < d < 63,5$ mm)	30
Cot de 90° ($76 < d < 152$ mm)	40
Cot de 90° ($178 < d < 254$ mm)	50
Unghi de 90°	60
Intrare în teu colector 	60
Iesire din teu distribuator 	90
Cruce	50
Ventil	60 - 300
Robinet	10 - 15
Vană (complet deschisă)	7
Contoare rotative	200 - 300

Frecarea și căderea de presiune

- o Căderea totală de presiune la curgerea unui fluid printr-o conductă va fi dată de:

$$\Delta P_f = \left(\sum \lambda \frac{l}{D} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2} \rho \quad [N/m^2]$$

$$h_f = \left(\sum \lambda \frac{l}{D} + \sum \zeta \right) \frac{v^2}{2g} \quad [m]$$

- o Coeficienții adimensionali λ și ζ pot fi determinați analitic (în unele situații) sau prin corelații empirice.

Frecarea și căderea de presiune

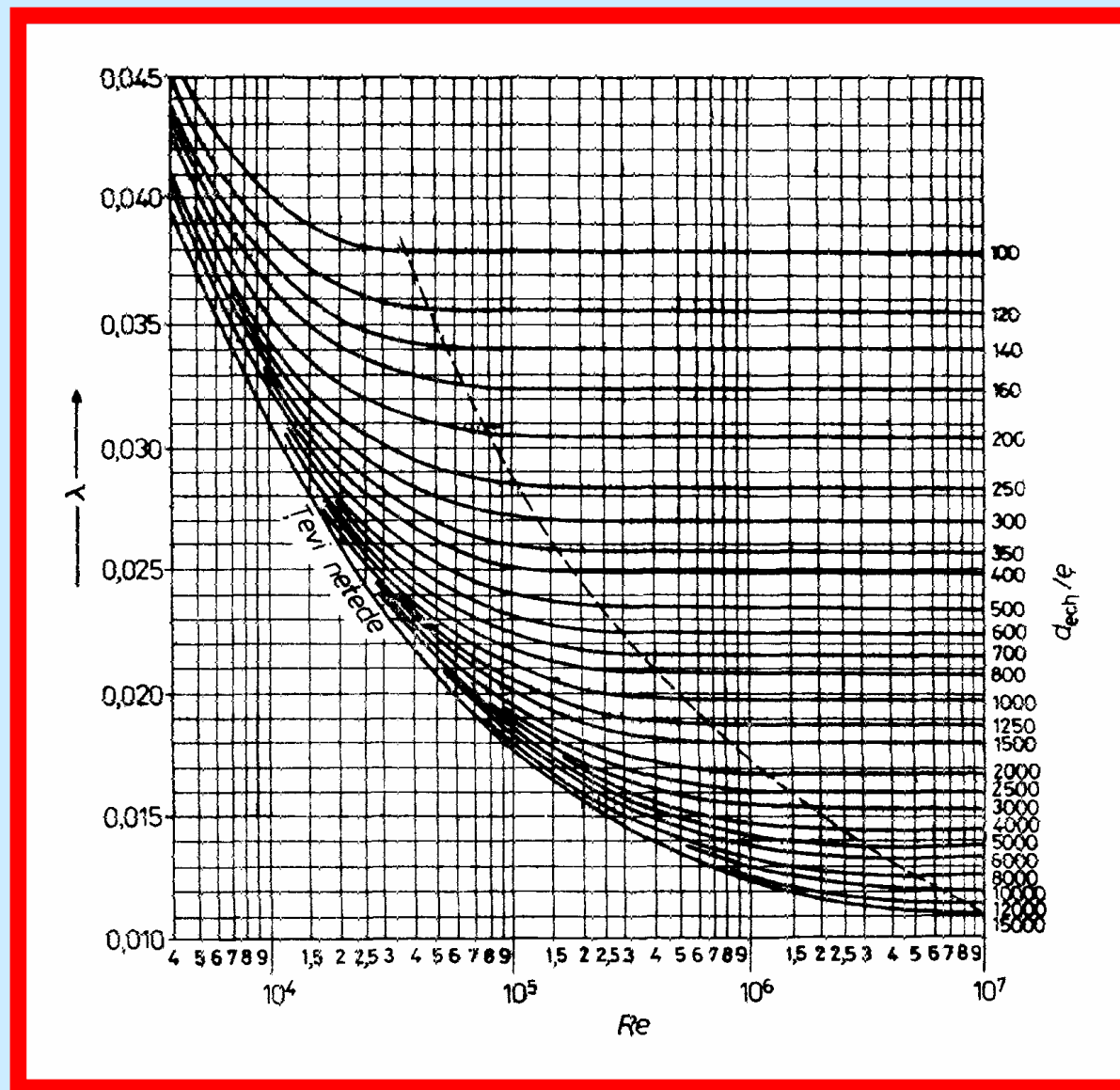
- o Coeficientul căderii de presiune prin frecare (λ) se poate calcula din relația lui Fanning pusă sub forma criterială (la o rugozitate dată a conductei):

$$Eu = C Re^m \Gamma$$

$$Eu = \frac{\Delta P_f}{\rho v^2}; \quad Re = \frac{\rho v D}{\mu}; \quad \Gamma = \frac{l}{D}$$

- o Pentru conductele cu secțiune necirculară, D se înlocuiește cu d_{ech} .

Frecarea și căderea de presiune



Variația coeficientului de frecare λ în funcție de valoarea criteriului Re și de rugozitatea conductei, d_{ech}/e

Frecarea și căderea de presiune

Conducte	e , mm
Țevi din oțel trase și sudate, la coroziune neînsemnată	0,2
Țevi din oțel, vechi și ruginite	> 0,67
Țevi din oțel, impregnate cu ulei de in fierț	0,125
Țevi din fontă pentru apă, care au fost utilizate	1,4
Țevi tehnice netede din aluminiu	0,015 - 0,06
Țevi trase, curate, din alamă, Cu, Pb; țevi din sticlă	0,0015 - 0,01
Țevi din beton, suprafață bună, netezită prin frecare	0,3 - 0,8
Țevi din beton, suprafață grosieră cu asperități	3 - 9
Conducte pentru abur saturat	0,2
Conducte pentru abur, cu funcționare periodică	0,5
Conducte pentru aer comprimat de la compresoare	0,8
Conducte pentru condensat, cu funcționare periodică	1,0

Valori medii ale rugozității conductelor

Frecarea și căderea de presiune

- o În regim laminar λ nu depinde de rugozitatea conductei ci numai de criteriul Reynolds:

$$\lambda = \frac{\alpha}{Re}$$

- o în care valoarea α este funcție de secțiunea de curgere
- o Înlocuind ecuația anterioară scrisă pentru conducte circulare ($\alpha = 64$) în ecuația Fanning se obține ecuația Hagen - Poiseuille:

$$\Delta P = \frac{64\mu}{\rho v D} \frac{l}{D} \frac{v^2}{2} \rho = 32 \frac{\mu l v}{D^2}$$

Frecarea și căderea de presiune

- o ecuația Hagen - Poiseuille permite, de asemenea, și determinarea viscozității fluidelor în viscozimetrul cu tub capilar:

$$\mu = \frac{\Delta P D^2}{32 l v}$$

- o La proiectarea instalațiilor va trebui să se țină seama de fenomenul de îmbătrânire a conductelor.
- o Calculul căderilor de presiune se va efectua întotdeauna cu coeficienții pentru țevi vechi.

Frecarea și căderea de presiune

Forma secțiunii	d_{ech}	α
Cerc cu diametrul D	D	64
Pătrat cu latura a	a	57
Triunghi echilateral cu latura a	$0,58a$	53
Inel cu lățimea a	$2a$	96
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b \sim 0$	$2a$	96
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,1$	$1,81a$	85
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,25$	$1,60a$	73
Dreptunghi de laturi a, b : $a/b = 0,5$	$1,30a$	62
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,1$	$1,55a$	78
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,3$	$1,40a$	73
Elipsă de semiaxe a, b : $a/b = 0,5$	$1,30a$	68

Frecarea și căderea de presiune

Relația	Ecuatie de calcul	Domeniu de valabilitate
KOO	$\lambda = 0,0056 + 0,5 \operatorname{Re}^{-0,32}$	$3000 < \operatorname{Re} < 300000$
McADAMS	$\lambda = 0,184 \operatorname{Re}^{-0,2}$	$5000 < \operatorname{Re} < 200000$
BLASIUS	$\lambda = 0,3164 \operatorname{Re}^{-0,25}$	$3000 < \operatorname{Re} < 100000$
KARMAN, PRANDTL, NIKURADSE	$\lambda = 2 \left[\lg(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 \right]^{-2}$	$\operatorname{Re} > 3000$
NIKURADSE	$\lambda = 0,0032 + 0,221 \operatorname{Re}^{-0,237}$	
GENEREAUX	$\lambda = 0,16 \operatorname{Re}^{0,16}$	

Frecarea și căderea de presiune

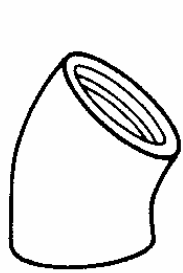
- o Coeficientul căderii de presiune prin rezistențe locale (ζ), în marea majoritate a cazurilor, nu poate fi calculat pe baze teoretice;
- o Se determină experimental, valorile sale fiind funcție de:
 - tipul rezistenței locale
 - dimensiunile geometrice ale acesteia.

Frecarea și căderea de presiune

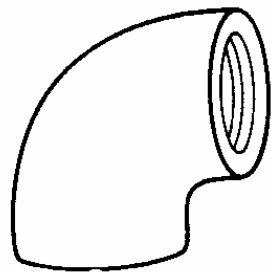
Rezistența locală	n	ζ
Cot la 45° (a)	15	0,3
Cot la 90° - rază standard (b)	30 - 40	0,6 - 0,8
Cot de colț la 90° (c)	60	1,2
Intrare în teu colector (d)	60	1,2
Ieșire din teu distribuitor (d)	90	1,8
Asamblări filetate (e)	neglijabil	neglijabil
Ventil normal (f) complet deschis	60 - 300	1,2 - 6,0
Vană (g) complet deschisă	7	0,15
Vană (g) $\frac{3}{4}$ deschisă	40	1
Vană (g) $\frac{1}{2}$ deschisă	200	4
Vană (g) $\frac{1}{4}$ deschisă	800	16

Valorile coeficientului ζ pentru diverse fittinguri și armături

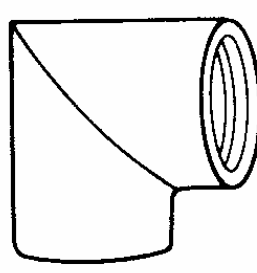
Frecarea și căderea de presiune



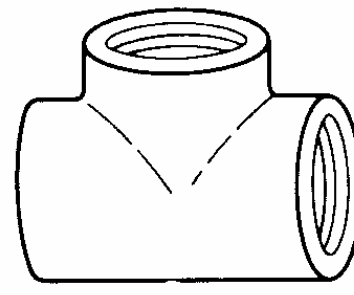
a



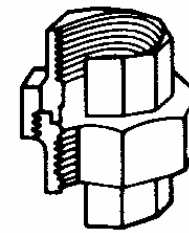
b



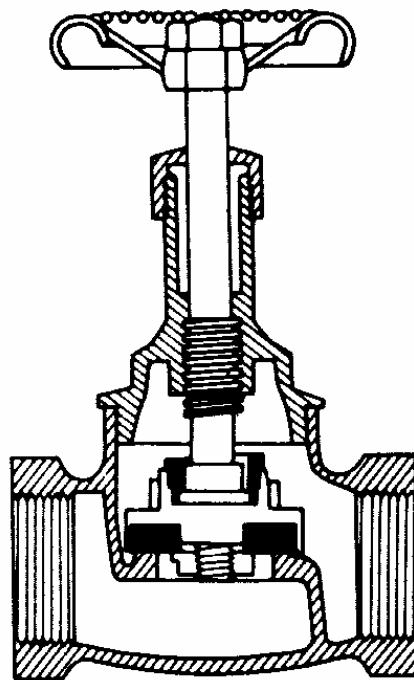
c



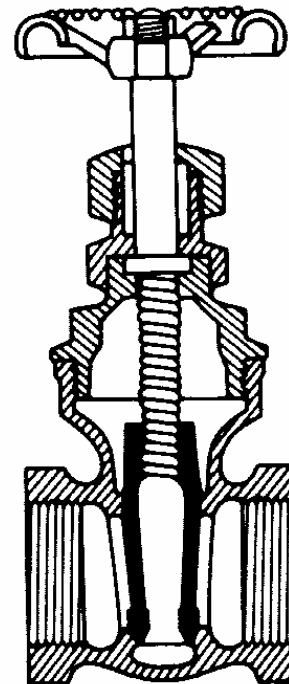
d



e



f



g



Frecarea și căderea de presiune

- o Pentru curbe, valoarea coeficientului ζ se poate calcula cu relația:

$$\zeta = \left[0,13 + 0,16 \left(\frac{D}{R} \right)^{3,5} \right] \frac{\varphi}{90}$$

- o în care D este diametrul conductei, R - raza de curbura, φ - unghiul (în grade sexagesimale) dintre tangentele în punctele de la extremitățile curbei.

Frecarea și căderea de presiune

- o Pentru lărgirea bruscă de secțiune, coeficientul ζ în regim turbulent se calculează cu relația:

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

- o în care A_1 reprezintă aria secțiunii înguste, iar A_2 - aria secțiunii lărgite.
- o Pentru îngustarea bruscă de secțiune, coeficientul ζ depinde atât de raportul ariilor celor două secțiuni (A_1/A_2), cât și de regimul de curgere.

Frecarea și căderea de presiune

Valoare Re	Raport A_1/A_2					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10	3,10
100	1,70	1,40	1,20	1,10	0,90	0,80
1000	2,00	1,60	1,30	1,05	0,90	0,60
3000	1,00	0,70	0,60	0,40	0,30	0,20
> 3500	0,81	0,64	0,50	0,36	0,25	0,16

Valorile coeficientului ζ pentru lărgire bruscă de secțiune

Frecarea și căderea de presiune

- o În cazul lărgirii continue de secțiune (în difuzoare), coeficientul ζ se calculează cu relațiile:

$$\zeta = 0,2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \quad \text{daca } \alpha < 8^\circ$$

$$\zeta = 3,5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \quad \text{daca } 7,5 < \alpha < 35^\circ$$

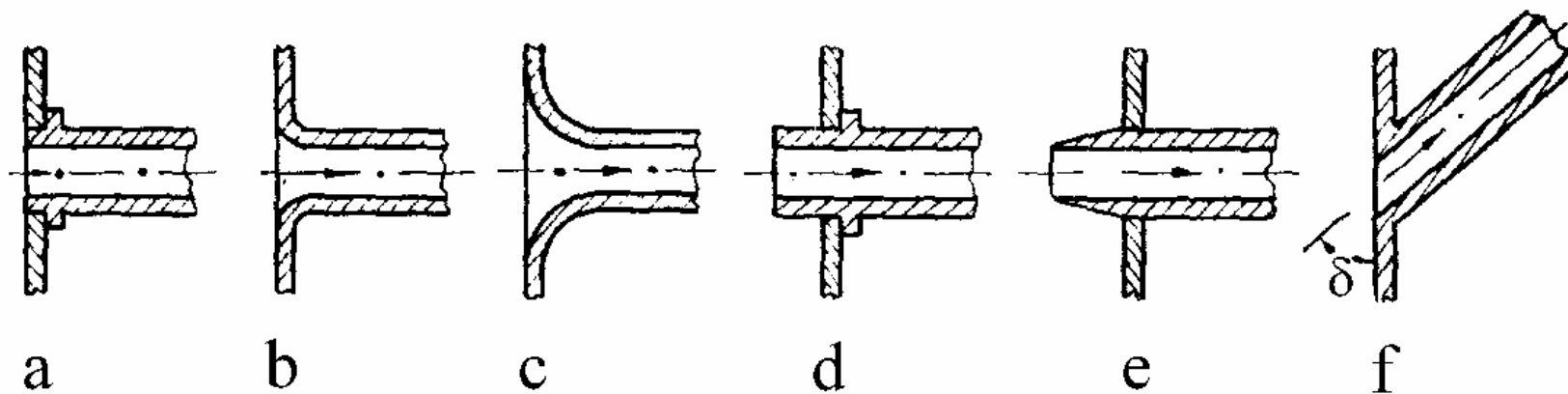
în care α reprezintă unghiul la vârf al conului difuzor.

Frecarea și căderea de presiune

- o Pentru ieșirea din țevi se consideră $\zeta = 1$, iar pentru intrarea în țevi (dintr-un recipient) valoarea ζ depinde de forma intrării în țeavă:

Fig.	a	b	c	d	e	f
ζ	0,5	0,25	0,06-0,005	0,56	3	$0,5 + 0,3\cos \delta + 0,2\cos^2 \delta$

Valorile coeficientului ζ pentru intrarea în țevi



Frecarea și căderea de presiune

- o În cazul trecerii fluidelor prin **diafragme** cu margini ascuțite amplasate în țevi drepte, valoarea coeficientului ζ este funcție de parametrul m definit de ecuația:

$$m = \left(\frac{d_{\text{orif}}}{D} \right)^2$$

- o în care d_{orif} este diametrul orificiului diafragmei [m], iar D este diametrul conductei [m].

Frecarea și căderea de presiune

- o Căderea de presiune prin diafragmă se calculează cu ecuația:

$$\Delta P = \zeta \frac{\rho \cdot v_{\dagger}^2}{2}$$

- o în care v^2 este viteza fluidului prin țeavă.
Ecuația este valabilă pentru valori ale raportului dintre grosimea diafragmei (δ) și diametrul orificiului diafragmei (d_{orif}) cuprinse între 0 și 0,015.

Frecarea și căderea de presiune

m	ζ	m	ζ	m	ζ	m	ζ
0,02	7000	0,14	117	0,26	26,8	0,60	2,00
0,04	1670	0,16	86,0	0,28	22,3	0,70	0,97
0,06	730	0,18	65,6	0,30	18,2	0,80	0,42
0,08	400	0,20	51,5	0,34	13,1	0,90	0,13
0,10	245	0,22	40,0	0,40	8,25		
0,12	165	0,24	32,0	0,50	4,00		

Valorile coeficientului ζ la curgerea prin diafragme

Frecarea și căderea de presiune

- o Pentru **fluidele nenewtoniene** există puține date referitoare la căderea de presiune prin rezistențe hidraulice locale.
- o Datele existente arată că în cazul îngustării (lărgirii) bruște a secțiunii de curgere, sau la intrarea în țevi, valorile căderii de presiune sunt de același ordin de mărime ca și în cazul fluidelor newtoniene.

Frecarea și căderea de presiune

- o Pentru **fluide pseudoplastice și dilatante**, coeficientul de frecare λ se poate determina cu relația *Metzner și Dodge*:

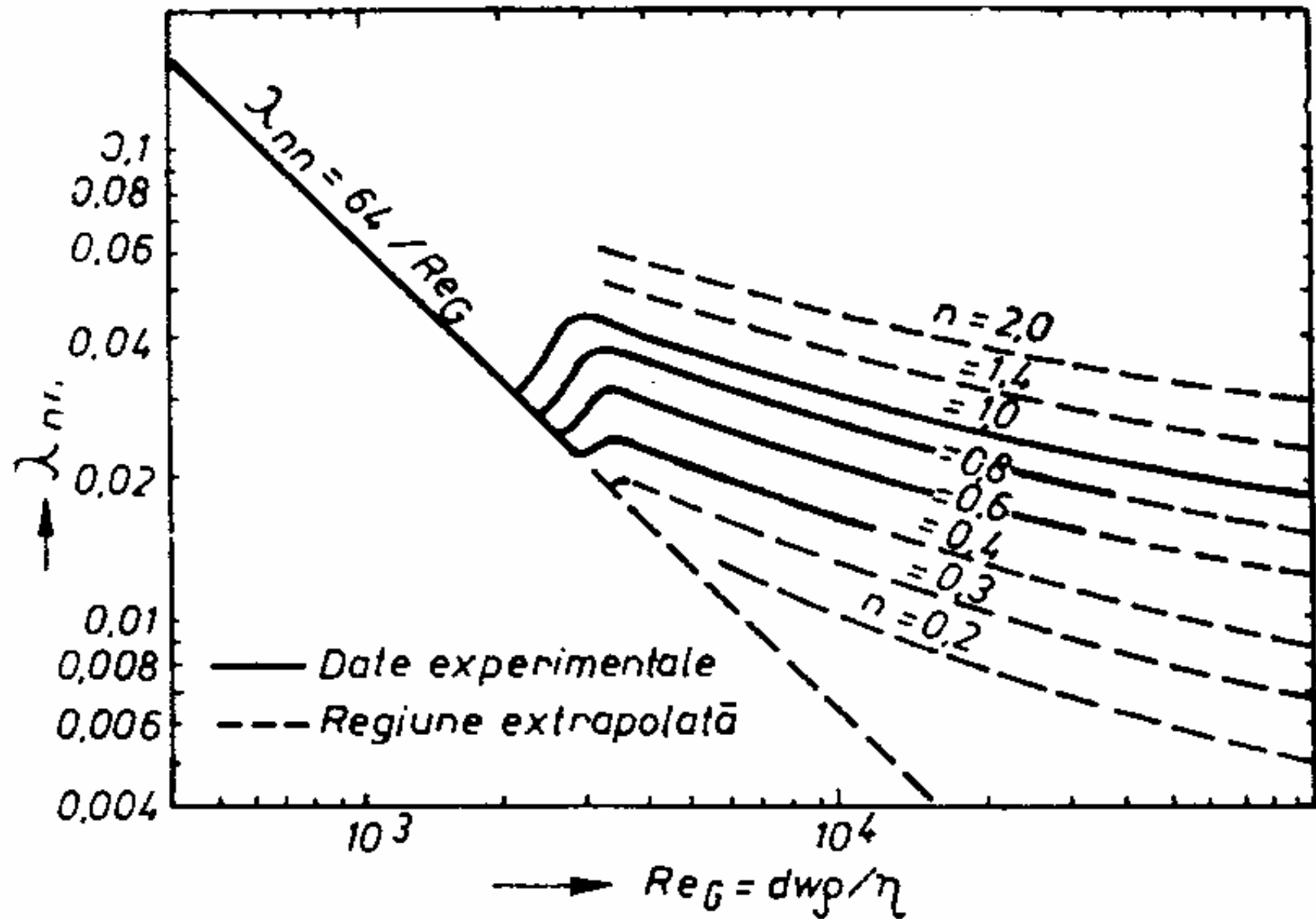
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{n^{3/4}} \cdot \lg[Re_G \cdot \lambda^{(1-n/2)}] - \frac{0,8}{n^{1,2}}$$

- o în care Re_G este numărul Reynolds generalizat (în care viscozitatea μ este înlocuită cu viscozitatea efectivă, μ_{ef} :

$$\mu_{ef} = \frac{\tau_p}{8v \cdot d}$$

- o τ_p reprezentând aici tensiunea tangențială la perete, iar n este exponentul reopantei din expresia tensiunii tangențiale.

Frecarea și căderea de presiune



Corelația Metzner și Dodge, extrapolată pentru $0,2 < n < 2,0$

Frecarea și căderea de presiune

- o Din diagramă rezultă că pentru același debit (aceeași valoare Re_G), λ va avea o valoare mai mică (deci și ΔP va fi mai mică) pentru un fluid pseudoplastice (care are $n < 1$) decât pentru un fluid newtonian (pentru care $n = 1$).
- o De aceea, se recomandă ca, în măsura posibilităților, să se adauge în fluidul newtonian cantități foarte mici de substanțe care să-i confere acestuia o comportare reologică de tip pseudoplastice.
- o În acest mod fie se micșorează energia necesară pompării, fie crește debitul de fluid transportat cu același consum energetic