Lucrarea 8: Matrice şi determinanţi

Adunarea matricelor (se adună fiecare element din prima matrice cu corespondentul său din a doua matrice)
Înmulţirea unui număr cu o matrice (se înmulţeşte numărul cu fiecare element al matricei)
Înmulţirea matricelor (din prima matrice se alege pe rând linia iar din a doua pe rând coloana)
Exemplu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4+2\cdot 3 & 3\cdot 6+2\cdot 0 \\ 1\cdot 4+5\cdot 3 & 1\cdot 6+5\cdot 0 \end{pmatrix}$$

Adunarea matricelor este:
Asociativă: $(A+B)+C = A+(B+C)$
Comutativă: $A+B = B+A$
Matricea nulă O_n este element neutru la adunare: $A+O_n = O_n + A = A$

Înmulţirea matricelor este:
Asociativă: $(AB)C = A(BC)$
Matricea unitate I_n este element neutru la înmulţire: $A\cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Înmulţirea matricelor nu este comutativă
Obs: $A^k \cdot A = A\cdot A^k$, de aceea pentru calculul matricei A^n putem calcula fie $A^{n-1}\cdot A$ fie $A\cdot A^{n-1}$

Transpusa matricei A, notată ${}^tA$ sau A^t se obţine din matricea A schimbând rolul liniilor cu al coloanelor.
Urma matricei A , notată $Tr(A)$este suma elementelor situate pe diagonala principală a matricei A

Def. Spunem că matricea **A este inversabilă** dacă există matricea B astfel încât $AB = BA = I_n$
Notaţie: A^{-1} inversa matricei A

Pro. Matricea $A\in M_n(C)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det(A)\neq 0$

Algoritmul pentru calculul A^{-1}, pentru $A\in M_n(R)$, presupune calculul a n^2 minori de ordinul $n-1$, formarea matricei adjuncte A^* şi apoi $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*$

Pro. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Pro. (Cayley-Hamilton)
Matricea $X \in M_2(C)$ verifică relaţia $X^2 - Tr(X)\cdot X + \det(X)\cdot I_2 = O_2$

Rangul matricei $A\in M_{m,n}(R)$ este numărul *r* cu proprietăţile:
1) există un minor nenul de ordinul *r* al lui A
2) toţi minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli (dacă există)

Determinanţi de ordinul 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanţi de ordinul 3
Regula triunghiului:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

Regula lui Sarrus.

Pentru **calculul determinanţilor de ordin mai mare sau egal cu patru** se dezvoltă determinantul după o linie sau o coloană (se alege acea linie sau coloană ce are mai multe valori nule)

Pro. Valoarea unui determinant nu se modifică dacă la elementele unei linii (coloane) se adună elementele altei linii (coloane) înmulţite cu acelaşi număr

Proprietate. Exemplu:

$$\begin{vmatrix} a & d+e & j \\ b & f+g & k \\ c & h+i & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & j \\ b & f & k \\ c & h & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e & j \\ b & g & k \\ c & i & l \end{vmatrix}$$

1) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,

$C(A)=\{X=M_2(R) \mid XA=AX\}$

a) arătaţi că $B\in C(A)$

b) arătaţi că dacă $X\in C(A)$ atunci există $x,y\in R$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$

c) rezolvaţi ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

a) $B\in C(A)\Leftrightarrow AB=BA$

adevărat pentru că $AB=BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

b) fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. $XA=\begin{pmatrix}2a+3b & 2b\\ 2c+3d & 2d\end{pmatrix}$,

$AX=\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}$ $\begin{cases}2a+3b=2a\\ 2b=2b\\ 2c+3d=3a+2c\\ 2d=3b+2c\end{cases}$

Obţinem $b=0,\ a=d$, deci există $x=a$, $y=c$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Deoarece $X\cdot X^2=X^2\cdot X$, înlocuind pe X^2 cu $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$şi efectuând calculele obţinem

$b=0,\ a=d$, deci X este de forma $\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$

Găsim $X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

2) Fie $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ -2 & -4\end{pmatrix}$,

$M=\{X(a) \mid X(a)=I_2+aA, a\in R\}$

a) calculaţi A^2-3A

b) arătaţi că $X(a)X(b)=X(a+b), \forall a,b\in R$

c) calculaţi $X(1)X(2)\ldots X(2010)$

a) $A^2-3A=O_2-3A=\begin{pmatrix}-12 & -24\\ 6 & 12\end{pmatrix}$

b) $X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=$
$I_2^2+bI_2A+aAI_2+abA^2=$
$I_2+bA+aA+O_2=I_2+(a+b)A=X(a+b)$

c) folosind rezultatul de la b) membrul stâng devine $X(1+2+\ldots+2010)$, adică
$X\left(\dfrac{2010\cdot 2011}{2}\right)$

3) Fie $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

a) calculaţi rangul matricei A

b) arătaţi că $\det(A^t\cdot A)=0$

c) determinaţi o matrice nenulă $B\in M_{3,2}(Q)$ astfel încât $AB=O_2$

a) $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$

b) $A^t\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 8 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A^t\cdot A)=0$

c) Pentru simplificarea calculelor încercăm $B=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 0\\ z & 0\end{pmatrix}$. Obţinem $\begin{cases}-x+2y+2z=0\\ 2x+2y-z=0\end{cases}$ cu mai multe soluţii, printre care $(2,-1,2)$

4) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $f:M_2(R)\to M_2(R)$, $f(X)=AX$

a) arătaţi că $f(A)=I_2$

b) arătaţi că $f(X+f(X))=X+f(X)$, $\forall X\in M_2(R)$

c) arătaţi că funcţia *f* este bijectivă

a) $f(A)=A\cdot A=I_2$

b) $f(X+f(X))=A(X+AX)=AX+A^2X=$
$AX+X=X+AX=X+f(X)$

c) $f(X)=f(Y)\Rightarrow AX=AY\Rightarrow$
$A^2X=A^2Y\Rightarrow X=Y\Rightarrow f$ injectivă
$\forall Y,\exists X=AY$ astfel încât
$f(X)=A(AY)=Y\Rightarrow f$ surjectivă

Problema rezolvata 1:

Scrieți programul C/C++ care construiește în memorie o matrice pătratica cu **n** linii și **n** coloane formata numai din valori **1** si **2** astfel încât elementele de pe diagonala secundară și cea principală să fie egale cu **1** , elementele situate între diagonalele matricei , în partea superioară și inferioară a acesteia, să fie egale cu **1** , iar restul elementelor din matrice să fie egale cu **2** . Valoare lui **n** (număr natural , **2<n<23**) se citește de la tastatură , iar matricea se va afișa pe ecran , cate o linie a matricei pe cate o linie a ecranului , cu spatii intre elementele fiecărei linii (ca in exemplu).

```
1 1 1 1 1
2 1 1 1 2
2 2 1 2 2
2 1 1 1 2
1 1 1 1 1
```

Rezolvare. Secvența pseudocod următoare reprezintă o soluție posibila pentru construirea matricei:

```
pentru i=1 , n executa
daca i<n+1-i atunci x ← i ; y ←n+1-i
  altfel y ← i ; x ← n+1-i
sfarsit_daca
pentru j=1 , n executa
  daca x<=j and j<=y atunci a(ij) ← 1
       altfel a(ij)← 2
  sfarsit_daca
sfarsit_pentru
sfarsit_pentru
```

Problema rezolvata 2:

Scrieți un program C++ care construiește in memorie o matrice pătratica **n×n** formata numai din valori 0, 1, 2 astfel încât elementele de pe diagonala secundara si cea principala sa fie egale cu 0, elementele situate intre diagonalele matricei, in partea superioara si inferioara a acesteia, sa fie egale cu 1, iar restul elementelor din matrice sa fie egale cu 2.

pentru n=5 se va afisa:

```
0 1 1 1 0
2 0 1 0 2
2 2 0 2 0
2 0 1 0 2
0 1 1 1 0
```

Rezolvare:

```
pentru i=1,n executa
    daca i<n+1-i atunci x <-n+1-i
                  altfle y<-i; x<-n+1-i
  sfarsit _daca
  pentru j=1,n executa
      daca j=x or j=y atunci a(ij)<-0
         altfel
             daca x<j and j<y atunci a(ij)<-1
                 altfel a(ij)<-2
       sfarsit _daca
sfarsit_daca
sfarsit_pentru
sfarsit_pentru
```

Problema rezolvata 3:

Scrieți programul C++ care construiește in memorie o matrice pătratica cu **n** linii si **n** coloane formata numai din valori **1** si **2** astfel încât elementele de pe diagonala secundara si cea principala sa fie egale cu 1, iar restul elementelor din matrice sa fie egale cu 2.

Pentru n=5 se va afisa:

```
1 2 2 2 1
2 1 2 1 2
2 2 1 2 2
2 1 2 1 2
1 2 2 2 1
```

Rezolvare:

```
      for(i=1;i<=n;i++)
            for(j-1;j<=n;j++)
                  if(i==j || i+j=n+1)
                        a[i][j]=1;
                  else a[i][j]=2;
```

Problema rezolvata 4:

Se citește o matrice pătratica. Sa se afişeze elementele de pe diagonala secundara, elementele de pe diagonala principala, elementele de sub/desupra diagonalei secundare/principala.

```
#include<iostream.h>
#include<stdio.h>

void main()
{
int i,j,n,a[20][20];
cin>>n;
for(i=0;i<n;i++)
for(j=0;j<n;j++)
cin>>a[i][j];
cout<<"diagonala principala"<<endl;
for(i=0;i<n;i++)
cout<<a[i][i]<<" ";

cout<<endl<<"diagonala secundara"<<endl;
for(i=0;i<n;i++)
cout<<a[i][n-1-i]<<" ";

cout<<endl<<"elementele de deasupra diagonalei principale"<<endl;
for(i=0;i<=n-2;i++)
for(j=i+1;j<=n-1;j++)
cout<<a[i][j]<<" ";

cout<<endl<<"elementele de sub diagonala principala"<<endl;
for(i=1;i<=n-1;i++)
for(j=0;j<=i-1;j++)
cout<<a[i][j]<<" ";

cout<<endl<<"elementele de deasupra diagonalei secundare"<<endl;
for(i=0;i<=n-2;i++)
for(j=0;j<=n-i-2;j++)
cout<<a[i][j]<<" ";

cout<<endl<<"elementele de sub diagonala secundara"<<endl;
for(i=1;i<=n-1;i++)
for(j=n-i;j<=n-1;j++)
cout<<a[i][j]<<" ";
}
```

Problema rezolvata 5:

Se citeste n. Sa se afiseze urmatoarele forme. In exemplu n=4:

1)

```
1 2 3 4
1 2 3
1 2
1
```

```
#include<iostream.h>
void main()
{
int i,j,n;
cout<<"n=";cin>>n;
for(i=1;i<=n;i++)
{
for(j=1;j<=n-i+1;j++)
cout<<j<<" ";
cout<<endl;
}
}
```

2)

```
1 1 1 1
2 2 2
3 3
4
```

```
#include<iostream.h>
void main()
{
int i,j,n;
cout<<"n=";cin>>n;
for(i=1;i<=n;i++)
{
for(j=1;j<=n-i+1;j++)
cout<<i<<" ";
cout<<endl;
}
}
```

3)

```
4 4 4 4
3 3 3
2 2
1
```

4)

```
4 3 2 1
4 3 2
4 3
4
```

```
#include<iostream.h>
void main()
{
int i,j,n;
cout<<"n=";cin>>n;
for(i=1;i<=n;i++)
{
for(j=1;j<=n-i+1;j++)
cout<<n-j+1<<" ";
cout<<endl;
}
}
```

Probleme propuse:

1. Se considera o matrice A[n][m] cu elemente numere întregi. Sa se determine linia (liniile) din matrice care conține cele mai multe elemente nenule*.*

2. Se da o matrice cu m lini * n coloane. Sa se memoreze intr-un vector b sumele elementelor de pe fiecare lini a matricii (b[i] va reprezenta suma elementelor de pe linia i in matrice)*,*

3. Se da o matrice cu m lini * n coloane, ale carei elemente sunt cifre de 0 si 1. Sa se afiseze indicii liniei (liniilor) pe care se afla cele mai multe valori de 1.

4. Scrieți un program care construiește in memorie un tablou t cu n linii si n coloane, cu elemente numere intregi, astfel incat pe diagonala principala sa existe numai elemente egale cu 1, elementele de pe cele doua semidiagonale paralele cu diagonala principala

si alaturate diagonalei principale sa fie tot egale cu 2, elementele de pe urmatoarele doua semidiagonale sa fie egale cu 3 etc. Valoarea lui n se citeste de la tastatura.

5. Sa se scrie un program care calculeaza produsul a doua matrici bidimensionale A si B.
6. Sa se scrie un program care calculează transpusa unei matrici An*m.
7. Să se scrie următoarele funcții de prelucrare a matricelor: citire de la tastatura sau din fișier, afișare pe ecran, adunarea a doua matrice, înmulțirea cu un scalar, înmulțirea a două matrice, inversa matricei, transpusa matricei, suma elementelor de pe linii, suma elementelor de pe coloane. Funcțiile vor fi salvate într-o bibliotecă și apoi apelate în programul principal. În programul principal, se va crea un meniu, cu ajutorul căruia să putem alege una din funcțiile enumerate mai sus.

```
Alege o opţiune:
1 – introdu o matrice
2 – afişează o matrice
3 – adună două matrice
ş.a.m.d.
```

8. Să se scrie un program care preia o matrice A[n][m] și apoi ordonează crescător / descrescător elementele matricei.
9. Să se scrie un program care încarcă elementele matricei A[n][m] într-un vector V[n×m].
10. Se da o matrice cu m lini * n coloane, ale carei elemente sunt cifre de 0 si 1. Sa se afiseze indicii liniei (liniilor) pe care se afla cele mai multe valori de 1.
11. Fiind data o matrice a cu m linii si n coloane cu elemente numere intregi,determinati numarul elementelor pozitive,numarul elementelor negative si numarul elementelor nule din matrice
12. Fiind data o matrice a cu m linii si n coloane cu elemente numere intregi,determinati media aritmetica a elementelor matricii.