Capitolul 1
INTRODUCERE

Pentru noțiunile din acest paragraf am consultat Behzad, Chartrand, Foster, Croitoru, Olaru, Tomescu. Alte completări bibliografice sunt precizate în momentul utilizării.

1.1. Definiția unui graf

Un *graf* este o pereche G = (V,E), unde V este o mulțime finită nevidă, iar E este o mulțime de submulțimi cu două elemente distincte ale lui V. V se numeşte *mulțimea vârfurilor* şi numărul său de elemente, |V| este *ordinul grafului* G. E este *mulțimea muchiilor* grafului G şi |E| este *dimensiunea grafului* G. Când facem referire la mulțimea de vârfuri şi muchii ale grafului G folosim V(G) şi E(G), respectiv.

Un *digraf* (*graf orientat*) este o pereche $D = (V(D), A(D))$ unde $V(D)$ este o mulțime finită nevidă (mulțimea vârfurilor digrafului D), iar $A(D) \subseteq V(D) \times V(D)$ este mulțimea arcelor digrafului D.

Dacă e = {x,y} este o muchie a grafului G, vom nota, pe scurt, {x,y} = xy (yx) şi vom spune că: muchia e este *incidentă* cu vârfurile x şi y; vârfurile x şi y sunt *adiacente* în G; vârfurile x şi y sunt *vecine* în G; vârfurile x şi y sunt *extremitățile* muchiei e.

Dacă $v \in V(G)$, atunci mulțimea

$$N_G(v) = \{w \mid w \in V(G) - \{v\}, vw \in E(G)\},$$

se numeşte *vecinătatea* vârfului v în G.

$$\overline{N_G}(v) = \{w \mid w \in V(G) - \{v\}, vw \notin E(G)\}$$

se numeşte *mulțimea nevecinilor* vârfului v în G.

Dacă $A, B \subseteq V(G)$, $A \cap B = \emptyset$ atunci :

- A ~ B (A este total adiacent cu B) dacă şi numai dacă:
$$\forall a \in A, \forall b \in B : ab \in E(G);$$
- A $\not\sim$ B (A este total neadiacent cu B) dacă şi numai dacă:
$$\forall a \in A, \forall b \in B : ab \notin E(G);$$
- A $\sim^p$ B (A este parțial adiacent cu B) dacă şi numai dacă:
$$\exists a \in A, \exists b \in B : ab \in E(G);$$

a ~ B (vârful a este B – universal, adică a vede toate vârfurile din B) dacă şi numai dacă $\{a\} \sim B$.

a $\not\sim$ B (vârful a este B – nul) dacă şi numai dacă $\{a\} \not\sim B$.

Dacă $S \subseteq V(G)$ atunci:

S este mulțime *stabilă* (sau *independentă*) a lui G dacă şi numai dacă

$$\forall x, y \in V(G), x \neq y : xy \notin E(G).$$

O stabilă S este maximală dacă nici o stabilă a lui G nu conține propriu S;

$$S(G) = \{S \mid S \text{ este stabilă maximală în } G\} ;$$

$\alpha(G) = \max\{S \mid S \in S(G)\}$ este *numărul de stabilitate* a lui G.

$S_\alpha(G) = \{S \mid S \in S(G), |S| = \alpha(G)\}$;

S este o mulțime α - *stabilă* dacă şi numai dacă $S \in S_\alpha(G)$.

Complementarul, $\overline{G}$, al unui graf G este graful a cărui mulțime de vârfuri este V(G), iar două vârfuri sunt adiacente în $\overline{G}$ dacă şi numai dacă ele nu sunt adiacente în G.

Dacă $Q \subseteq V(G)$ atunci:

Q este *clică* (său *mulțime completă*) a lui G dacă şi numai dacă Q este mulțime stabilă în $\overline{G}$; o clică Q este maximală dacă nici o clică a lui G nu conține propriu Q;

C(G) = {Q | Q este *clică maximală* în G}; ,

$\omega(G) = \max\{|Q| \mid Q \in C(G)\}$ este *numărul clică* a lui G;

$C_\omega(G) = \{Q \mid Q \in C(G)$ şi $|Q| = \omega(G)\}$; Q este o ω - *clică* dacă şi numai dacă $Q \in C_\omega(G)$.

Dacă $p \in \mathbf{N}^*$, se numeşte *p – colorare* a vârfurilor lui G o aplicație

$$c : V(G) \to \{1, ..., p\}$$

cu proprietatea că $c^{-1}(i)$ este o mulțime stabilă în G.

$\chi(G)$ este numărul cromatic a lui G, adică cel mai mic număr de culori necesare pentru a colora vârfurile de felul că două vârfuri adiacente distincte nu pot fi de aceeaşi culoare.

$\theta(G) = \chi(\overline{G})$ este *numărul de acoperire cu clici* a lui G.

Două grafuri, G = (V(G),E(G)) şi H = (V(H),E(H)) se numesc *izomorfe*, şi notăm aceasta prin $G \approx H$ (sau $G \cong H$) dacă există o bijecție

$$\varphi : V(G) \to V(H)$$

cu proprietatea că aplicația

$$\psi : E(G) \to E(H),$$

definită pentru orice $uv \in E(G)$ prin

$$\psi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$$

este o bijecție.

1. 2. Grade

Gradul unui vârf *v* dintr-un graf G este numărul de muchii ale lui G incidente cu v, care se notează cu $d_G(v)$. Un vârf de grad zero se numeşte *izolat*. Un vârf de grad unu se numeşte *pendant* .

1.3. Subgrafuri

Fie G un graf. Un graf H este un *subgraf* al lui G dacă V(H)$\subseteq$V(G) şi E(H)$\subseteq$E(G). Dacă A este o submulțime nevidă a lui V(G) atunci subgraful lui G *indus* de A este graful având mulțimea vârfurilor A, iar mulțimea muchiilor constă din acele muchii ale lui G incidente cu două elemente din A. Dacă A$\subseteq$V(G), v$\in$V, U$\subseteq$E(G),e$\in$E(G) atunci notăm: G_A sau G(A) sau $[A]_G$ sau [A] subgraful lui G indus de A; G – A = G(V(G) – A); G – v = G – {v} ; G – U = (V(G),E(G) – U); G – e = G – {e}.

1.4. Operații cu grafuri

Pe parcursul acestei cărți vom folosi unele operații cu grafuri, pe care le reamintim mai jos.

1) Dacă G_1 şi G_2 sunt două grafuri cu $V(G_1)\cap V(G_2) = \emptyset$ atunci *reuniunea disjunctă* a grafurilor G_1 şi G_2 înseamnă graful G = $G_1 \cup G_2$ cu V(G) = $V(G_1)\cup V(G_2)$ şi E(G) = $E(G_1)\cup E(G_2)$.

2) Se numeşte *graf adiacență* (X - adiacență) (Sabidussi, Olaru, Antohe) a unei familii de grafuri $(G_x)_{x\in V(X)}$, indexată de mulțimea de vârfuri a grafului X, graful notat $\bigcup_{x\in X}^{X} G_x$, unde:

$$V\left(\bigcup_{x\in X}^{X} G_x\right) = \bigcup_{x\in X} V(X)\times\{x\};$$

$$E\left(\bigcup_{x\in X}^{X} G_x\right) = \bigcup_{x\in V(X)} E(G_x)\cup$$

$$\cup\{[(a,x),(b,x')] \mid x \neq x', [x,x'] \in E(X), a \in V(G_x), b \in V(G_{x'})\}.$$

3) *Produsul lexicografic* (*compoziția*) (Harary) a două grafuri G_1 şi G_2 este graful notat G = $G_1[G_2]$, unde V(G) = $V(G_1)\times V(G_2)$ şi două vârfuri (u_1,u_2) şi (v_1,v_2) ale lui G sunt adiacente dacă şi numai dacă $u_1v_1 \in E(G_1)$ sau ($u_1 = v_1$ şi $u_2v_2 \in E(G_2)$).

4) Suma a două grafuri. Dacă luam X = K_2, K_2 - adiacența grafurilor oarecare G_1 şi G_2 se mai numeşte *suma celor două grafuri* şi se notează cu $G_1 + G_2$.

1.5. Clase de grafuri

Se numeşte *graf complet de ordin n*, graful notat, K_n, unde $|V(K_n)| = n$ şi $E(K_n) = P_2(V(K_n))$, iar $P_2(X)$ este *mulțimea părților cu două elemente* ale lui X.

Se numeşte *graf nul de ordin n*, graful $N_n = \overline{K_n}$.

Se numeşte *ciclu de lungime n* ($n \geq 3$) graful notat, C_n, unde $V(C_n) = \{1, 2, ..., n\}$ şi $E(C_n) = \{12, 23, ..., n-1n, n1\}$. Deoarece vârfurile sunt distincte, ciclul este elementar. Peste tot în carte vom folosi ciclu elementar. De asemenea îl vom numi şi circuit

Se numeşte *lanț de ordin n*, graful $P_n = C_n - e \, (e \in E(C_n))$. Îl vom numi şi drum. Dacă a = i, b = i + l, pentru orice i = l, ..., n – 1 şi e = ab atunci spunem că avem un a – b drum (sau ab – drum).

Un *circuit* (*drum*) al unui graf G este un subgraf indus al lui G care este el însuşi circuit (drum) în G. (Observăm că un circuit (drum) al unui graf nu are corzi. O coardă într-un circuit (drum) al unui graf este o muchie cu extremitățile vârfuri neconsecutive pe circuit (drum)).

Un *graf* G = (V,E) se numeşte *n – partit*, $n \geq 1$, dacă V se partiționează în n submulțimi $V_1, V_2, ..., V_n$ nevide astfel încât $[V_i]_G = (V_i, \emptyset)$, $\forall i = \overline{1, n}$ (adică, orice muchie din E este incidentă cu un vârf din V_i şi un vârf din V_j, unde $i \neq j$). Pentru n = 2, un astfel de graf se numeşte bipartit. Un graf n – partit G se numeşte n – partit complet dacă mulțimile partiției $V_1, V_2, ..., V_n$ au proprietatea că pentru orice u din V_i şi orice v din V_j, $i \neq j$, uv este muchie a lui G. Un graf bipartit complet cu mulțimile partiției V_1 şi V_2, unde $|V_1|$ = m şi $|V_2|$ = n este notat K(m,n) ($K_{m,n}$). Graful K(l,n) (sau $K_{1,n}$) se numeşte graf stea (star).

Un *graf* se numeşte *perfect* (Berge) dacă numărul cromatic şi numărul clică sunt egale pentru orice subgraf indus al său.

Un *graf* G este *minimal imperfect* dacă şi numai dacă G nu este perfect şi orice subgraf G – v (v din V(G)) este perfect.

O *muchie* e a lui G se numeşte α – *critică* (Olaru) dacă α(G – e) = α(G) + 1. Notăm mulțimea muchiilor α – critice ale lui G prin E^c şi numim $G^c = (V, E^c)$ *scheletul* α *– critic* a lui G. Dacă E^c = E, graful se numeşte α - *critic*.

Un *graf* G se numeşte $(\alpha, \omega)-$ *partiționabil* (a se vedea Golumbic, Olaru) dacă pentru fiecare $v \in V(G)$, G – v admite o partiție de α ω – clici şi o partiție de ω mulțimi α – stabile.

Un *graf* G = (V,E) se numeşte α – *partiționabil* (α – *decompozabil*) (Olaru) dacă există o partiție $Z = \{V_1, ..., V_m\}$ a lui V, cu m > 1 astfel încât $\sum_{i=1}^{m} \alpha(G_i) = \alpha(G)$, unde $G_i = G(V_i), i = \overline{1, m}$.

Z se numeşte α – *partiție* a lui G, iar G_i sunt α – *componente*.

Un *graf* G se numeşte ω - *partiționabil* dacă $\overline{G}$ este α - partiționabil.

Dacă graful G are o α – partiție astfel încât α – componentele sunt clici atunci G este *perfect* α – *partiționabil* (α – *decompozabil*).

G este *partiționabil* dacă este α – partiționabil şi ω – partiționabil.

Un *graf* G se numeşte *tare stabil* (Olaru, Antohe) dacă

$$\alpha(G - Q) = \alpha(G),$$

pentru orice clică proprie Q a lui G.

Un *graf* G se numeşte *tare* α – *stabil* (Olaru) dacă şi numai dacă $\forall v \in V(G)$ şi orice clică Q a lui G, $\theta(G - v) = \alpha(G) = \alpha(G - Q)$.

Cografurile sau grafurile P_4 – libere (sau P_4 – free), descoperite de mai mulți autori, printre care Lerchs sunt grafuri care nu conțin P_4 indus.

Un graf G se numeşte *gem – free* dacă pentru fiecare vârf v, $[N_G(v)]$ este graf P_4 – free.

Un graf se numeşte *paw* dacă este izomorf cu

$$(\{a,b,c,d\}, \{ab,bc,cd,db\}).$$

Un graf izomorf cu $\overline{P_5}$ se numeşte *house*.

Un graf se numeşte *bull* dacă este izomorf cu

$$(\{a,b,c,d,e\}, \{ab,bc,ca,bd,ce\}).$$

Chvatal a introdus clasa grafurilor ordonabile perfect, care sunt caracterizate prin existența unei ordini lineare < pe mulțimea vârfurilor astfel încât nici un P_4: abcd nu are a < b şi d < c.

Fie F o familie de mulțimi nevide. *Graful intersecție* al lui F este obținut reprezentând fiecare mulțime din F printr-un vârf şi două astfel de vârfuri determină o muchie dacă şi numai dacă mulțimile lor corespunzătoare se intersectează.

1.6. Drumuri şi circuite

Fie G un graf si a, b două vârfuri ale sale. *Distanța dintre a şi b*, notată d(a,b) înseamnă minimum lungimilor a – b drumurilor din G. Pentru $A \subset V(G)$ şi $x \in V(G) - A$, *distanța de la x la A* înseamnă

$$d(x, A) = \min_{a \in A} d(x, a).$$

Un graf este *conex* dacă există un drum între orice două vârfuri ale sale. Un graf care nu este conex se numeşte *neconex*. Orice graf poate fi exprimat unic ca o reuniune disjunctă de subgrafuri induse conexe şi maximale cu această proprietate. Aceste subgrafuri se numesc *componente conexe* ale grafului.

Un *arbore* este un graf conex şi fără circuite.

1.7. Mulţimi separatoare, transversale şi mulţimi omogene

Fie G = (V,E) un graf conex. O submulţime $S \subset V$ se numeşte *vârf separator* (a se vedea Golumbic) pentru vârfurile a şi b (sau a – b - separator) dacă în G – S, a şi b vor aparţine la componente conexe diferite. Dacă nici o submulţime proprie a lui S nu este a – b separator atunci S este *vârf separator minimal* pentru a şi b.

Fie G = (V,E) un graf conex. O submulţime $A \subset V$ se numeşte *mulţime separatoare* (*cutset*) dacă G – A este neconex. O *mulţime separatoare* A se numeşte *minimală* dacă nici o submulţime proprie a sa nu este mulţime separatoare.

Fie G = (V,E) un graf. O mulţime nevidă T de vârfuri se numeşte *star – cutset* (Chvatal) dacă G – T este neconex şi există un vârf v din T care este adiacent la toate vârfurile rămase din T. Vârful v se numeşte *centrul* lui T.

Fie M o mulţime şi $F = \{M_i\}_{i \in I}$ o familie de submulţimi a lui M şi $T \subset M$.

Mulţimea T este o *transversală* a lui F dacă

$$T \cap M_i \neq \emptyset, \forall i \in I.$$

Transversala T este *perfectă* dacă

$$|T \cap M_i| = 1, \forall i \in I.$$

Fie G = (V,E) un graf. Se numeşte *cuplaj* (Berge) o mulţime $F \subset E$ astfel încât muchiile din F sunt neadiacente. Un *cuplaj* se numeşte *perfect* dacă orice vârf din V este extremitate a unei muchii din F. Un *cuplaj* se numeşte *maximal* dacă are cardinal maxim între toate cuplajele grafului G.

O submulţime nevidă A, a lui V(G), se numeşte *modul* dacă $\forall x \in V(G) - A$, ori $x \sim A$ ori $x \not\sim A$. Dacă A este submulţime proprie a lui V(G) cu cel puţin două elemente, atunci A se numeşte *mulţime omogenă* (Babel, Olariu, Olaru). Summer numeşte mulţimea A, *partitivă*.

Fie A o mulţime omogenă în G. G / A este graful obţinut din G, înlocuind A cu un nou vârf a şi conectând a prin muchii cu toate vârfurile $x \in V(G) - A$ dacă şi numai dacă $x \sim A$.

1.8. Algoritmi şi complexitate de calcul

Vom înțelege prin *problemă algoritmică* (Croitoru) o funcție total definită $P : I \to F$, unde I este mulțimea informațiilor inițiale (intrărilor problemei), iar F este mulțimea informațiilor finale. Vom presupune că I şi F sunt cel mult numărabile. Dacă $i \in I$ este precizat, atunci determinarea lui P(i) se numeşte *instanță a problemei* P. Vom folosi pentru o instanță notația p şi prin abuz de notație vom scrie $p \in P$.

Pentru fiecare instanță $p \in P$ se poate asocia un număr natural g(p) numit *dimensiunea problemei*.

Un algoritm care rezolvă problema P va porni de la o codificare a unei instanțe oarecare a problemei P si va oferi o codificare a rezultatului.

Vom nota cu $T_A(p)$ timpul necesar algoritmului A pentru rezolvarea instanței p a problemei P.

Comportarea în cazul cel mai nefavorabil a algoritmului A pe o intrare de dimensiune n este

$$T_A(n) = \sup\{T_A(p) \mid p \in P \text{ şi } g(p) = n\}.$$

Acest tip de analiză a algoritmilor ne asigură că, oricare ar fi o intrare de dimensiune n, timpul de lucru este mărginit de $T_A(n)$. De aceea, o abordare naturală este să se studieze comportarea în medie a unui algoritm, care presupune:

- precizarea unei distribuții de probabilitate pe mulțimea instanțelor $p \in P$;
- determinarea mediei variabilei aleatoare $T_A(p)$:

$$T_A^{med}(n) = M(\{T_A(p) \mid p \in P \text{ şi } g(p) = n\}).$$

Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Atunci

$$O(f) = \{g \mid g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{R}, c > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} : g(n) \le cf(n), \forall n \ge n_0\}.$$

Un algoritm A cu proprietatea că $T_A(n) = O(p(n))$, unde p este un polinom în n se numeşte *polinomial*. Un algoritm care nu este polinomial se numeşte *exponențial*. O problema pentru care nu se cunosc algoritmi polinomiali se numeşte *intractabilă*.