STATICA FLUIDELOR

STATICA FLUIDELOR

- Se ocupă cu:
  - legile repausului fluidelor,
  - interacțiunile dintre fluide şi suprafețele solide cu care acestea vin în contact.
- **Fluid în echilibru** (repaus) = rezultanta forțelor care acționează asupra masei de fluid este **nulă**.

STATICA FLUIDELOR

- Echilibru:
- **absolut** = fluidul este în repaus față de un **sistem de referință fix**
  - *ex: repausul unui fluid dintr-un rezervor static*
- **relativ** = fluidul este în repaus față de un **sistem de referință mobil**
  - *ex: repausul unui fluid dintr-o cisternă în deplasare,*
  - *ex: repausul unui lichid dintr-o centrifugă aflată în mişcare de rotație*

Forțe care acționează în fluide

- Forțele care acționează asupra unei mase de fluid:
  - forțe masice;
  - forțe de suprafață (superficiale).

Forțe de masă

- Sunt forțe care:
  1. acționează în fiecare punct al masei de fluid,
  2. sunt determinate de câmpul de forțe externe în care se află fluidul (câmp gravitațional, centrifugal, electric, etc.),
  3. sunt proporționale cu **masa** fluidului.
- Exemple:
  - forța gravitațională,
  - forța centrifugă,
  - forța inerțială,
  - forța electromagnetică, etc.

Forțe de masă

- Forțele unitare de masă se definesc prin relația:

$$\vec{F}_m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\rho \cdot \Delta V} = \frac{d\vec{F}_m}{\rho \cdot dV}$$

- Au formula dimensională:

$$\left| \vec{F}_m \right| = \frac{\text{Forta}}{\text{Masa}} = \frac{\text{Masa} \cdot \text{Acceleratie}}{\text{Masa}} = L \cdot T^{-2}$$

- Dpdv matematic sunt mărimi vectoriale (tensori de ordinul 1).

Forțe de suprafață

- Sunt forțe care:
  1. acționează asupra suprafețelor de delimitare a masei de fluid,
  2. sunt rezultatul interacțiunii dintre moleculele de fluid din interiorul volumului *V* de fluid cu moleculele fluidului înconjurător sau cu suprafețele solide cu care fluidul vine în contact.
- Exemple:
  - forțele de presiune,
  - forțele de frecare la curgerea fluidelor, etc.

Forțe de suprafață

- Forța unitară de suprafață (tensiunea, efortul unitar) se definește prin relația:

$$\vec{F}_s = \lim_{\Delta A \longrightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_s}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_s}{dA}$$

$\Delta \vec{F}_s$ = forța de suprafață aplicată

ΔA = aria care mărginește volumul de fluid ΔV

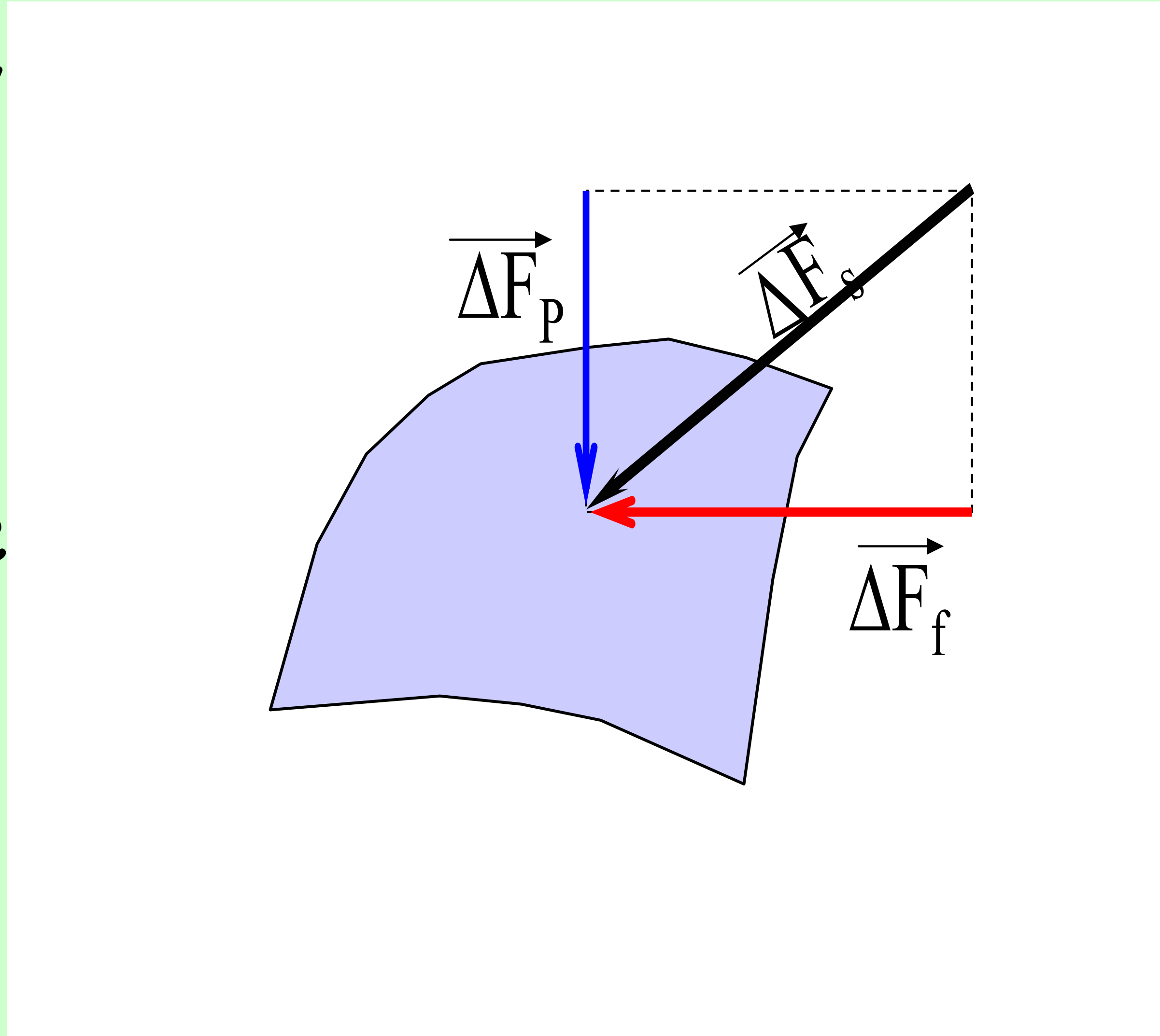
- Formula dimensională:

$$\left|\vec{F}_s\right| = \frac{\text{Forta}}{\text{Suprafata}} = \frac{\text{Masa} \cdot \text{Acceleratie}}{\text{Suprafata}} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

- Dpdv matematic, forțele superficiale sunt mărimi tensoriale de ordin 2.

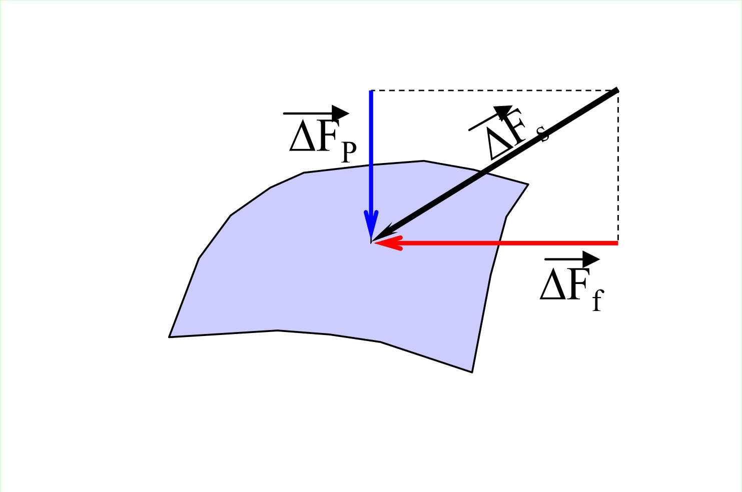
Forțe de suprafață

- În cazul general, forța de suprafață este înclinată în raport cu suprafața ΔA pe care acționează, ea putând fi descompusă în două componente:



Forțe de suprafață

- FORTA DE SUPRAFATA $\Delta\vec{F}_s$:
- o componentă **normală** la suprafața ΔA: forța de presiune $\Delta\vec{F}_p$;
- o componentă **tangentă** la suprafața ΔA: forța de frecare $\Delta\vec{F}_f$.



Forțe de suprafață

- Analog, **tensiunea** se descompune în:
  - tensiunea normală (sau compresiunea), numită şi presiune hidrodinamică sau presiune:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_P}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_P}{dA}$$

  - tensiunea tangențială (sau tensiunea de forfecare):

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_f}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_f}{dA}$$

Presiunea statică

- **Tensiunea normală (de compresiune)** caracterizată prin:
  1. perpendicularitate pe suprafața pe care acționează;
  2. orientare către interiorul volumului de fluid considerat;
  3. valoare identică pe orice direcție (devenind astfel o mărime scalară)
- poartă denumirea de **presiune statică**.

Presiunea statică

- **Presiunea statică**, este definită de relația:

$$P = \lim_{\Delta A \longrightarrow 0} \frac{\Delta F_P}{\Delta A} = \frac{dF_P}{dA}$$

- Formula dimensională:

$$|P| = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L^2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

Presiunea statică

- Presiunea statică - mărime scalară care caracterizează intensitatea stării de tensiune a unui fluid şi intervine în ecuația de stare a fluidelor: $f(P, V, T) = 0$

- Unitatea de măsură a presiunii în SI este **pascalul (Pa):**

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$$

- O unitate tolerată (dar nerecomandată) este barul:

$$1\ \text{bar} = 1.10^5\ \text{Pa}$$

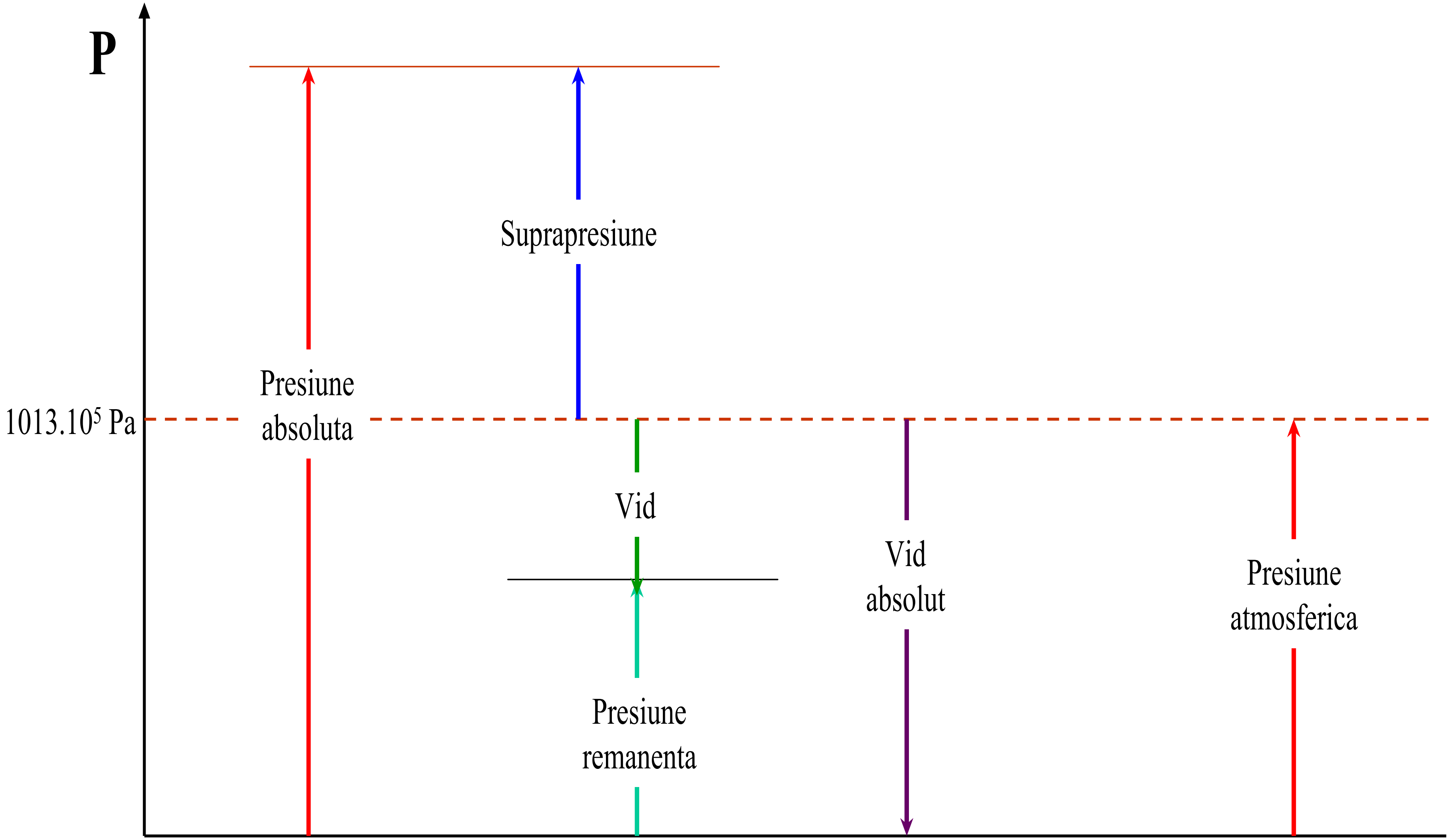
Presiunea statică

- Alte unități (unele folosite încă frecvent în diverse ramuri ale tehnicii) sunt:
  - atmosfera fizică (atm),
  - atmosfera tehnică (at),
  - torrul (1 torr = 1 mm col Hg),
  - mm coloană de apă (mm col H_2O sau mm CA),
  - kgf/m^2,
  - dyn/cm^2,
  - psi (lb/in^2), etc.

Presiunea statică

- Pentru măsurarea presiunii se utilizează două baze (presiuni de referință)
- În mod frecvent se iau ca presiuni de referință:
  - **presiunea atmosferică,**
  - **presiunea zero = vid absolut.**

Presiunea statică



Presiunea statică

- **Presiunea absolută** = presiunea totală exercitată de fluid, măsurată de la un vid absolut.
- **Suprapresiunea (presiunea efectivă)** = excesul de presiune ce depăşeşte presiunea atmosferică.
- Dacă la presiunea efectivă se adaugă presiunea atmosferică, se obține presiunea absolută:

$$P_{abs} = P_{ef} + P_{atm}$$

Presiunea statică

- **Vidul** reprezintă un caz special al presiunii diferențiale utilizat în cazul presiunilor subatmosferice
- **Vidul** reprezintă diferența între presiunea atmosferică şi presiunea remanentă.
- **Presiunea remanentă** este mai mică decât presiunea atmosferică şi se exprimă sub formă de presiune absolută.

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- În interiorul unui fluid, presiunea variază în fiecare punct al acestuia după o ecuație de forma: $$P = f(x, y, z) \qquad (41)$$

- scrisă diferențial:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \qquad (42)$$

- $\partial P/\partial x, \partial P/\partial y, \partial P/\partial z$ = gradienții presiunii statice după axele de coordonate x, y, z.

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Deducerea gradienților necesită cunoaşterea forțelor care acționează asupra fluidului.
- Fluidul fiind în echilibru rezultanta forțelor care acționează asupra sa este nulă.
- Se consideră un volum diferențial dV de fluid omogen (ρ = const.) aflat în repaus. Elementul de volum considerat este de formă paralelipipedică, având laturile dx, dy, dz.

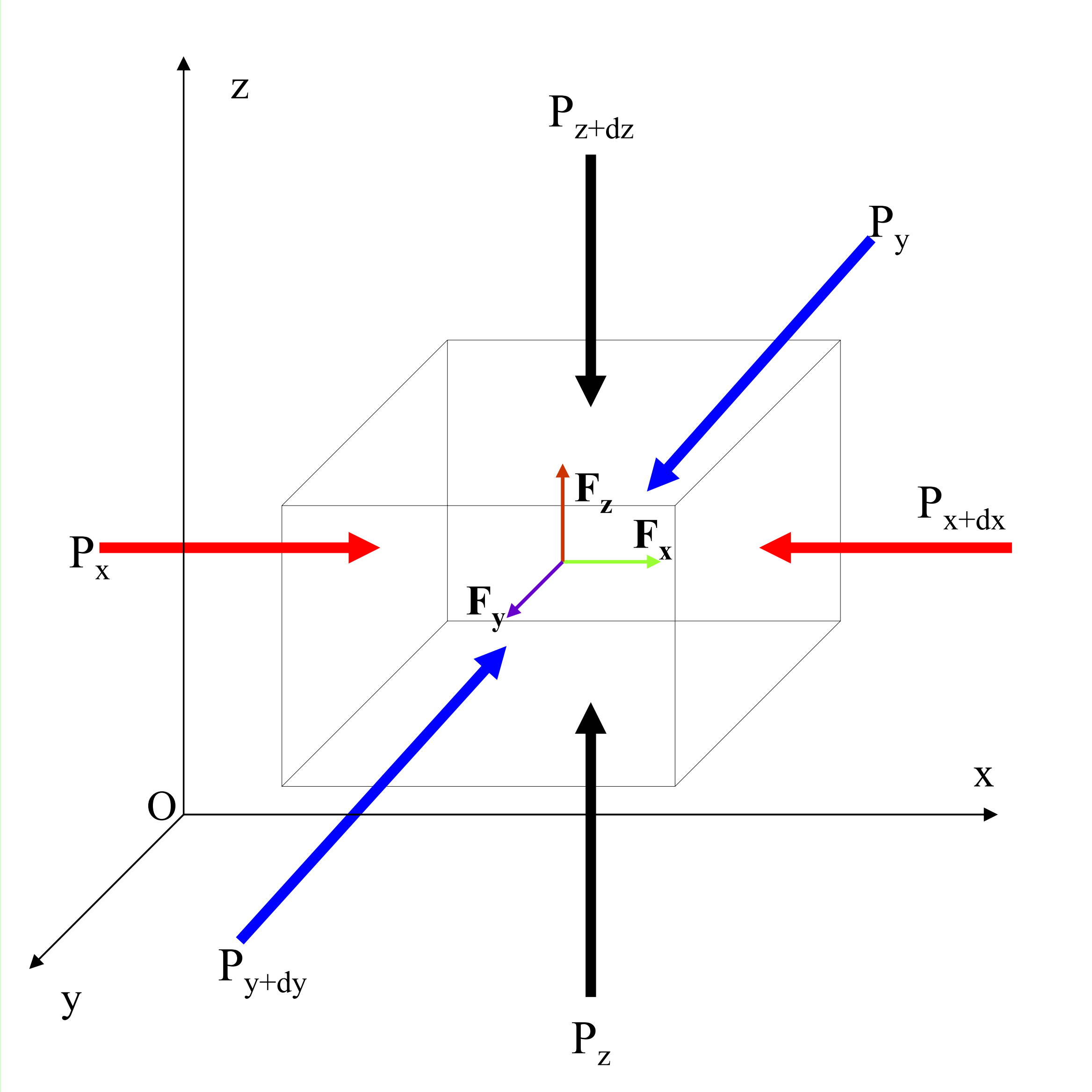
Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Volumul elementului este:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad (43)$$

- iar masa sa este:

$$m = \rho dV \quad (44)$$



Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Asupra elementului de volum acționează:
  - forțele de suprafață sub forma forțelor de presiune
  - forțele masice
  - forțele tangențiale sunt nule, fluidul fiind în repaus.
- În figura sunt reprezentate proiecțiile forțelor pe axele de coordonate:
  - P = presiunea statică,
  - F_x, F_y, F_z = forțele unitare masice.

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Condiția de echilibru = suma proiecțiilor forțelor care acționează asupra volumului elementar de fluid pe axele de coordonate să fie nulă.
- Această condiție se poate scrie:

$$\begin{aligned} P\big|_x dydz - P\big|_{(x+dx)} dydz + \rho dxdydzF_x &= 0 \\ P\big|_y dxdz - P\big|_{(y+dy)} dxdz + \rho dxdydzF_y &= 0 \\ P\big|_z dxdy - P\big|_{(z+dz)} dxdy + \rho dxdydzF_z &= 0 \end{aligned} \qquad (45)$$

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Ținând cont că:

$$\Psi\Big|_{(w+dw)} = \Psi\Big|_{w} + \frac{\partial \Psi}{\partial w} dw \qquad (46)$$

- după înlocuiri, simplificări şi împărțirea fiecărei ecuații prin dV, ecuațiile (45) devin:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho F_x \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho F_y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho F_z \qquad (47)$$

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Ecuațiile (47):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= \rho F_x \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \rho F_y \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \rho F_z\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

- **ecuațiile diferențiale de echilibru** ale fluidului = **ecuațiile Euler**.

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Introducând (47) în (42) se obține **ecuația diferențială a staticii fluidelor**:

$$dP = \rho\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (48)$$

- Dacă $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt vectorii unitate (versorii) pe axele Ox, Oy, Oz, din (42) şi (47) rezultă:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) = \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right) \qquad (49)$$

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Ecuatia (49) $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right)=\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right)$
- se mai poate scrie: $\vec{F}=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P=\frac{1}{\rho}\nabla P$ (50)
- forma vectorială a ecuației Euler, în care operatorul ∇ (nabla) aplicat unei funcții are expresia:

$$\nabla\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{k} \qquad (51)$$

Ecuația fundamentală a staticii fluidelor

- Ecuația (50) este valabilă atât pentru repausul absolut cât şi pentru repausul relativ al fluidelor.

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,P = \frac{1}{\rho}\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) = \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right)$$

Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

- Într-un fluid omogen (ρ = const.), aflat în repaus în câmp gravitațional, acționează ca forță de masă forța gravitațională, ale cărei componente sunt:

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = g$$

- Înlocuind aceste expresii în (47), ecuațiile diferențiale de echilibru devin:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \qquad (52)$$

Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

- iar ecuația (48) devine:

$$dP = \rho \cdot g \cdot dz \longleftrightarrow \int_{P_0}^{P} dP = \rho g \int_{H_0}^{H} dz \qquad (53)$$

- din care rezultă:

$$P - P_0 = \rho g \left(H - H_0\right) \qquad (54)$$

- Dacă P_0 reprezintă presiunea la suprafața unui lichid ($H_0 = 0$), ecuația (54) devine:

$$P = P_0 + \rho \cdot g \cdot H \qquad (55)$$

Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

- Relația (55) arată că presiunea într-un lichid (considerat incompresibil) creşte liniar cu adâncimea.
- Diferența: $$P - P_0 = \rho \cdot g \cdot H = \gamma \cdot H \qquad (56)$$
- = **presiune piezometrică** = presiunea exercitată de un lichid, egală cu greutatea coloanei de lichid de deasupra punctului pentru care se măsoară presiunea piezometrică;
  - H = înălțimea coloanei de lichid deasupra punctului considerat (sau adâncimea punctului în lichid),
  - γ = greutatea specifică a lichidului (greutatea unității de volum).

Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

- În cazul fluidelor compresibile (gaze sau vapori) aflate în repaus izoterm, integrarea ecuației (53) se efectuează ținând cont că densitatea fluidului variază cu presiunea acestuia.

$$\boxed{dP = \rho \cdot g \cdot dz} \qquad (53^*)$$

$$\boxed{\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho} = g \cdot \int_{H_0}^{H} dz} \qquad (53^{**})$$

Echilibrul absolut al fluidelor în câmpul de forțe gravitațional

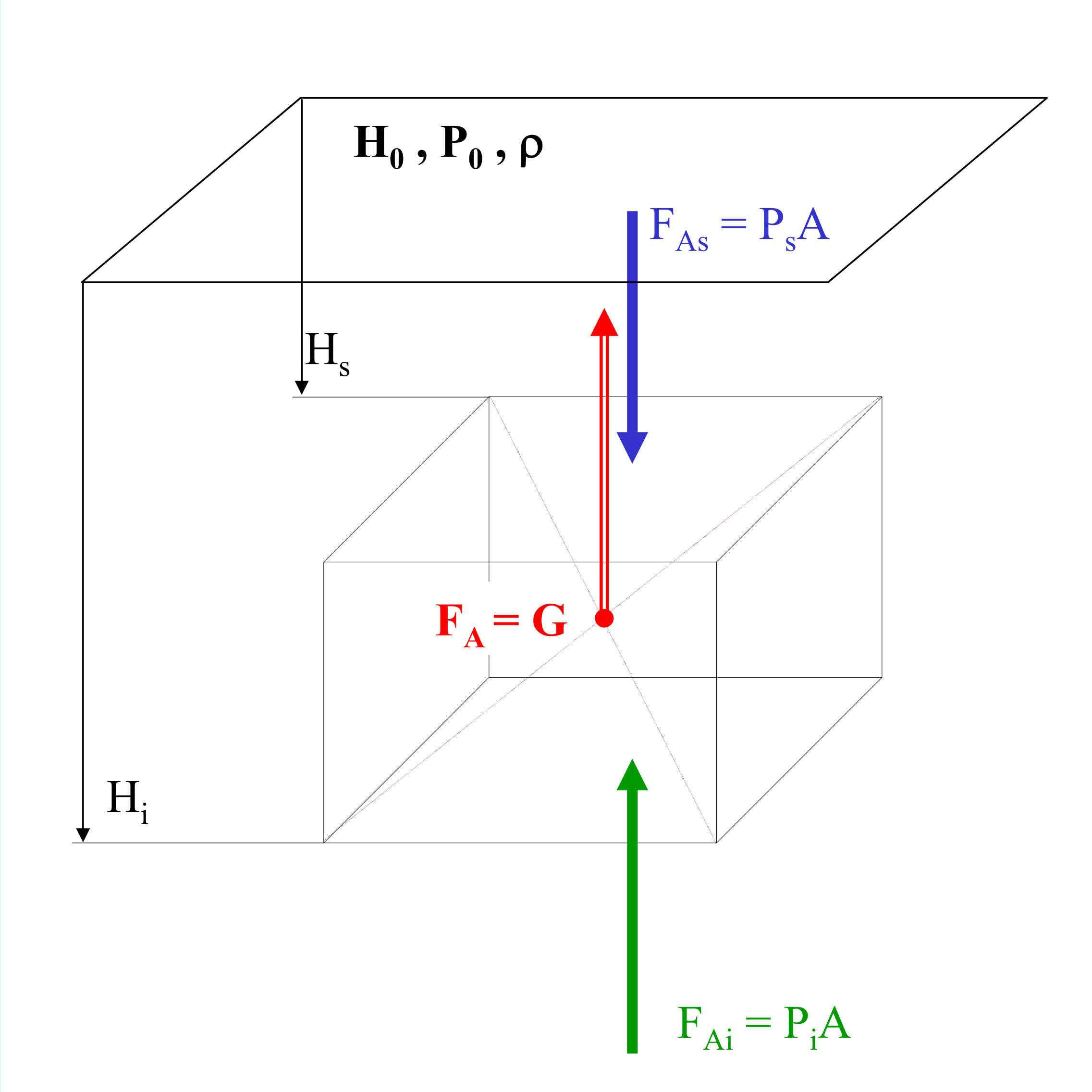
- Din analiza ec. (52) – (56) se poate constata că, într-un fluid omogen, incompresibil, aflat în echilibru în câmp de forțe gravitațional:
  1. presiunea statică este direct proporțională cu înălțimea coloanei de lichid;
  2. suprafețele izobare (suprafețe de egală presiune) sunt plane orizontale de ecuație z = const.; [principiul vaselor comunicante, aplicațiile acestui principiu (sticla de nivel, manometrul, manometrul diferențial)];
  3. orice variație a presiunii într-un punct oarecare al lichidului se transmite cu intensitate egală în toată masa fluidului (principiul lui Pascal); [constructia preselor hidraulice.]

Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

- Asupra unui corp imersat într-un fluid aflat în echilibru, efectul presiunii statice se manifestă ca o forță F_A (numită şi **forță arhimedică**):
  - egală cu greutatea volumului de fluid dislocuit de corp (*G*),
  - orientată de jos în sus,
  - cu punctul de aplicație în centrul de greutate al corpului imersat.

Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

- Se consideră cazul unui corp paralelipipedic cufundat într-un fluid omogen având densitatea ρ.
- Forțele rezultate din presiunea hidrostatică pe fețele laterale ale paralelipipedului se echilibrează două câte două, ca fiind egale şi de sens opus.



Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

- Forțele de pe fața superioară (F_{As}) şi inferioară (F_{Ai}) vor fi, cf. ecuației (54):

$$F_{As} = P_s \cdot A = \left(\rho \cdot g \cdot H_s + P_0\right) \cdot A$$
$$F_{Ai} = P_i \cdot A = \left(\rho \cdot g \cdot H_i + P_0\right) \cdot A$$

  - P_s , P_i = presiunile hidrostatice pe fețele superioară şi respectiv inferioară ale paralelipipedului,
  - A = aria fiecăreia dintre aceste fețe,
  - P_0 = presiunea la suprafața lichidului,
  - H_s , H_i = adâncimile la care se găsesc fața superioară şi respectiv inferioară a corpului imersat.

Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

- Forța rezultantă pe direcția z va fi:

$$F_A = F_{Ai} - F_{As} = \rho \cdot g \cdot \left(H_i - H_s\right) \cdot A =$$
$$= \rho \cdot g \cdot H \cdot A = \rho \cdot g \cdot V = g \cdot m = G$$

- Același rezultat, F_A = G se va obține indiferent de forma corpului imersat.
- Principiul lui Arhimede se aplică şi în cazul unui corp parțial imersat într-un lichid, caz în care se consideră numai volumul părții de corp scufundate.

Principiul lui Arhimede. Forța de plutire

- *Aplicație:*
- Să se determine forța de plutire (forța arhimedică) în cazul următoarelor corpuri complet imersate în fluid:
  - un cilindru cu diametrul D şi înălțimea H, orientat cu generatoarea paralelă cu axa Oz;
  - o sferă de rază R;
- precum şi în cazul unor corpuri parțial imersate:
  - un cilindru cu diametrul D şi înălțimea H, orientat cu generatoarea paralelă cu axa Ox, imersat până la jumătate;
  - o sferă de rază R imersată până la jumătate.

Fluide în echilibru relativ

- Asupra unui fluid aflat în repaus relativ față de un sistem de referință mobil care se mişcă accelerat, acționează şi forțele masice inerțiale datorită deplasării fluidului odată cu sistemul de referință.
- Gazele fiind fluide uşoare (cu densitate mică), au forțe de inerție neglijabile ➔ prezintă importanță studiul echilibrului relativ al lichidelor, a căror forță de inerție este apreciabilă.

Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

- $\vec{F}_i$ = forțele unitare de inerție;
- F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} = proiecțiile acestora pe axele de coordonate ale sist. de referință O_{xyz} mobil (solidar cu recipientul în care se află lichidul).
- $\vec{F}_g$ = forțele unitare gravitaționale
- F_{gx}, F_{gy}, F_{gz} = proiecțiile acestora pe axele sistemului de referință considerat.
- $\vec{F}_P$ = forțele de presiune
- P = presiunea statică ce acționează asupra unui volum elementar de fluid, dV = dxdydz şi masa m = ρdV.

Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

- Condiția de echilibru cere ca rezultanta dintre forțele unitare de inerție, gravitaționale şi de presiune să fie nulă:

$$\overline{F}_i + \vec{F}_g + \vec{F}_P = 0 \qquad (57)$$

- Aplicând un raționament similar celui expus la "ecuatia fundamentala a staticii fluidelor", se obține sistemul de ecuații diferențiale:

Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= \rho\left(F_{ix} + F_{gx}\right) \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \rho\left(F_{iy} + F_{gy}\right) \\
\frac{\partial P}{\partial z} &= \rho\left(F_{iz} + F_{gz}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

- sau vectorial:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_g = \frac{1}{\rho}\nabla P \qquad (59)$$

Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

- Înlocuind ecuațiile (58) în ecuația (42) se obține **ecuația diferențială a echilibrului relativ al fluidelor**:

$$dP = \rho\left[\left(F_{ix} + F_{gx}\right)dx + \left(F_{iy} + F_{gy}\right)dy + \left(F_{iz} + F_{gz}\right)dz\right] \tag{60}$$

- sau, în forma integrală:

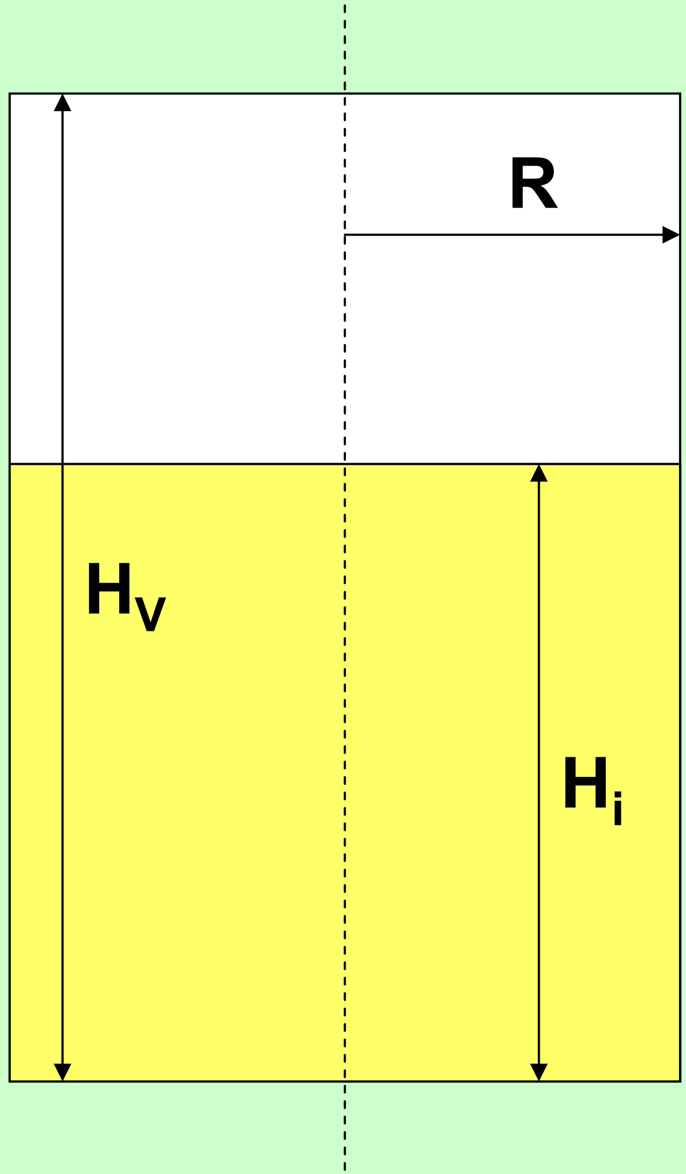
$$P = \int \rho\left[\left(F_{ix} + F_{gx}\right)dx + \left(F_{iy} + F_{gy}\right)dy + \left(F_{iz} + F_{gz}\right)dz\right] + C \tag{61}$$

Echilibrul relativ al lichidelor în câmp gravitațional

- Ecuația (61) exprimă repartiția presiunilor hidrostatice într-un lichid aflat în repaus relativ; constanta de integrare ***C*** se determină dintr-o condiție la limită, într-un punct oarecare de pe suprafața liberă a lichidului, punct în care presiunea P_0 este cunoscută.

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

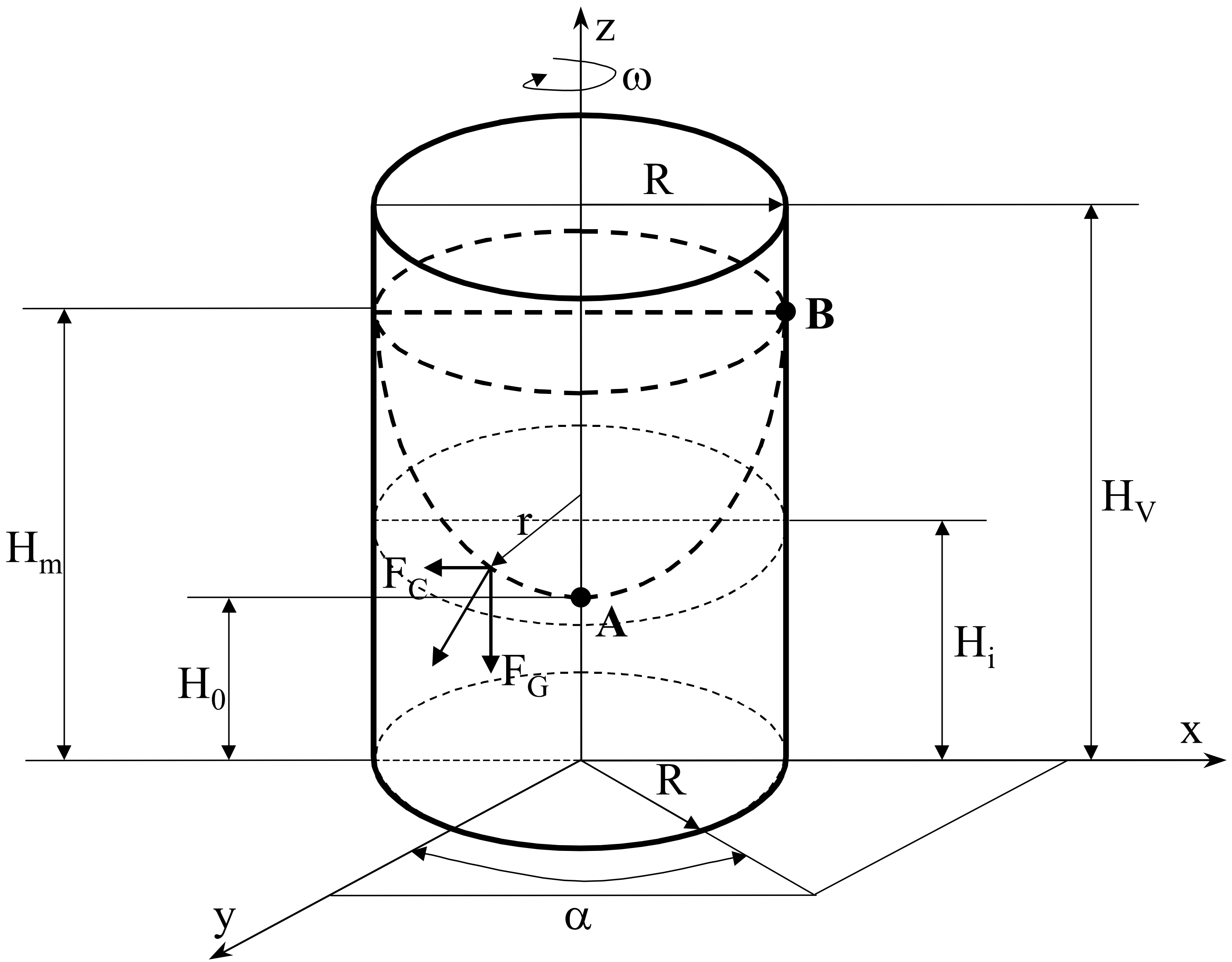
- Se consideră un vas cilindric de rază R şi înălțime H_V, umplut cu lichid până la nivelul H_i.
- Dacă vasul este în repaus, suprafața liberă a lichidului este plană, paralelă cu planul xOy, întrucât singura forță de masă care acționează asupra lichidului este forța gravitațională.



Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

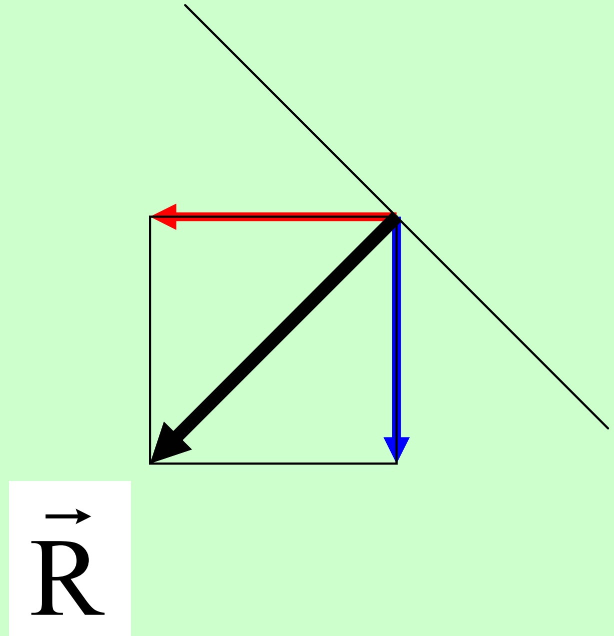
- Atunci când vasul începe să se rotească în jurul axei sale verticale, lichidul se va roti şi el în jurul axei vasului, cu aceeaşi viteză unghiulară ω (considerând că frecarea internă în lichid este nulă, iar stratul de lichid aflat în contact cu peretele vasului se mişcă solidar cu acesta).
- În această situație, în fiecare punct al masei de lichid vor acționa următoarele forțe masice unitare:
  - accelerația gravitațională, *g*;
  - accelerația centrifugală ωr^2, r fiind raza de rotație a particulei.

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotaţie uniformă



Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Suprafața liberă a lichidului va lua o astfel de formă încât orice element de suprafață să fie normal la rezultanta celor două forțe masice:
  - forța gravitațională, $\vec{F}_g$
  - forța centrifugă, $\vec{F}_c$



Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Dacă viteza unghiulară ω este constantă, mişcarea de rotație este uniformă şi se realizează un echilibru relativ între forțele masice şi cele de suprafață.
- Pe baza ecuațiilor deduse în cazul echilibrului relativ al fluidelor aflate in camp gravitational, se poate stabili legea distribuției presiunilor în lichid.

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Componentele accelerației gravitaționale pe axele de coordonate:

$$F_{gx} = 0 \qquad F_{gy} = 0 \qquad F_{gz} = -g \qquad (62)$$

- Componentele accelerației centrifugale pe axele de coordonate:

$$F_{cx} = \omega^2 x \qquad F_{cy} = \omega^2 y \qquad F_{cz} = 0 \qquad (63)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Inlocuind (62) si (63) in (58):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\left(F_{ix} + F_{gx}\right)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho\left(F_{iy} + F_{gy}\right) \qquad (58)$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho\left(F_{iz} + F_{gz}\right)$$

- se obtine:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \qquad (64)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Ecuația diferențială a echilibrului relativ (60) devine:

$$dP = \rho\left(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz\right) \qquad (65)$$

- Dacă ținem cont că:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\alpha \\ y &= r\cos\alpha \end{aligned} \qquad (66)$$

- si:

$$\begin{aligned} dx &= dr\sin\alpha - r\cos\alpha \\ dy &= dr\cos\alpha + r\sin\alpha \end{aligned} \qquad (67)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- După înlocuiri şi efectuarea calculelor, (65) devine:

$$dP = \rho\left(\omega^2 r dr - g dz\right) \qquad (68)$$

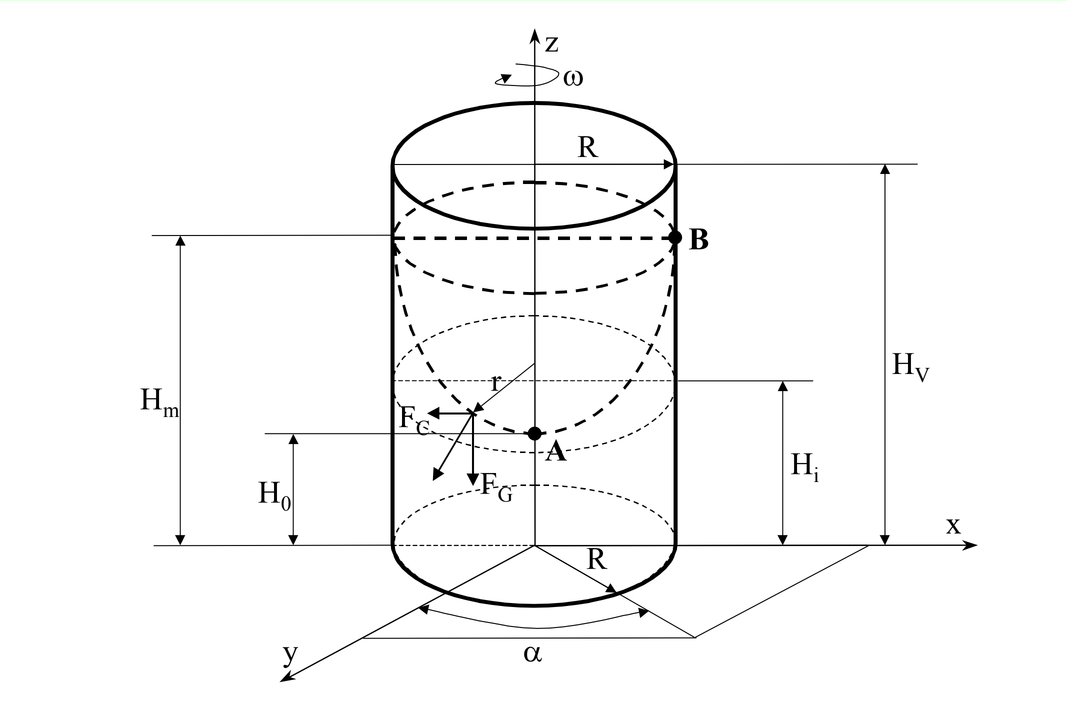
- Considerând ρ = const. şi ω = const. şi integrând ecuația (65) pentru o înălțime oarecare H:

$$P - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g H = C \qquad (69)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Constanta de integrare, C, se determină pentru cazul particular al punctului A, în care: $r = 0$ ($x = 0$; $y = 0$), $H = H_0$ şi $P = P_0$.
- În aceste condiții:

$$C = P_0 + \rho g H_0 \quad (70)$$



Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Înlocuind (70) în (69) obținem:

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + \rho g\left(H_0 - H\right) \qquad (71)$$

- Ecuația (71) = **ecuația distribuției presiunilor într-un fluid incompresibil aflat în mişcare de rotație uniformă.**
- Suprafața liberă a lichidului şi orice suprafață de nivel izobară este un **paraboloid de rotație** cu axa verticală Oz.

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Din expresia (71) se pot calcula:
- distribuția presiunilor pe peretele vasului (r = R):

$$P = P_0 + \rho g \left(H_0 - H + \frac{\omega^2 R^2}{2g} \right) \qquad (72)$$

- distribuția presiunilor pe fundul vasului (H = 0):

$$P = P_0 + \rho g \left(H_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) \qquad (73)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Nivelul maxim (H_m) al lichidului în vasul care se roteşte se obține punând condiția ca volumul lichidului din vas să fie constant înainte şi după rotație:

$$\pi R^2 H_i = \pi R^2 H_0 + \frac{1}{2}\pi R^2 \left(H_m - H_0\right) \qquad (74)$$

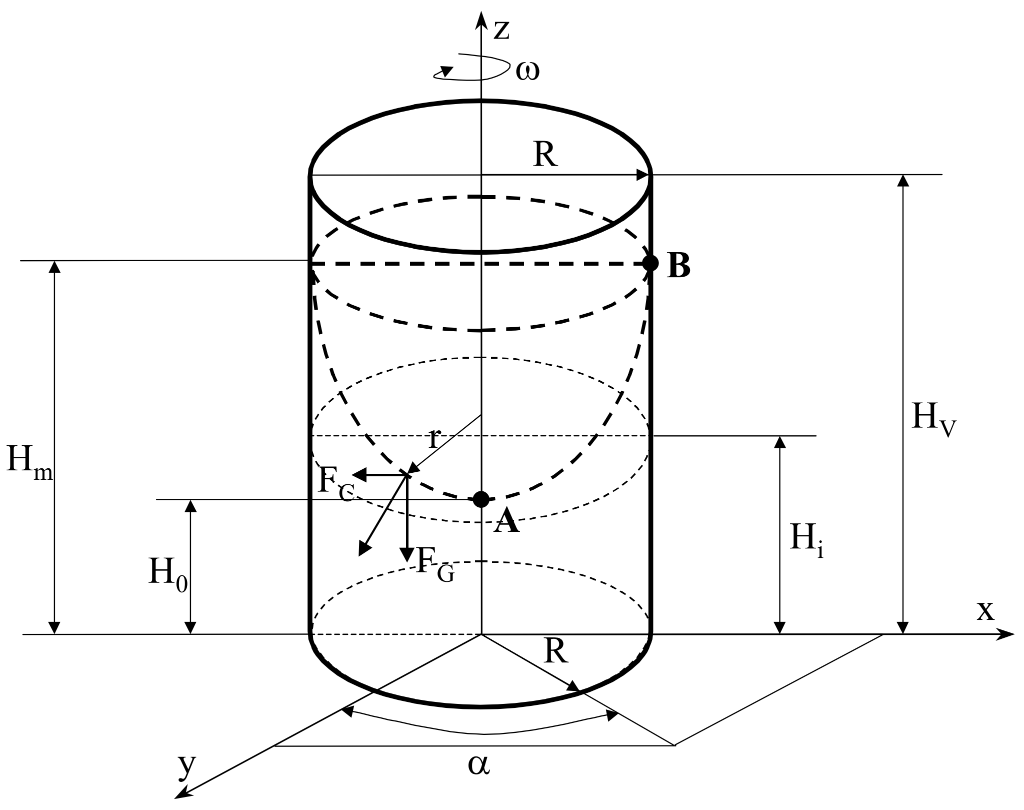
- sau:

$$2H_i = H_0 + H_m \qquad (75)$$

Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- În punctul B:
  - $P = P_B = P_0$ (suprafața liberă a lichidului este o curbă de nivel izobară),
  - $r = R$ şi $H = H_m$.
- În aceste condiții, din (69), constanta de integrare C are valoarea:

$$C = P_0 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 + \rho g H_m \quad (76)$$



Echilibrul relativ al lichidelor aflate în mişcare de rotație uniformă

- Deoarece C are aceeaşi valoare pentru orice punct de pe o suprafață izobară, prin egalarea ecuațiilor (69) şi (76) se obține:

$$H_m - H_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \qquad (77)$$

- Exprimând H_0 din (75) şi introducându-l în (77) rezultă:

$$H_m = H_i + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \qquad (78)$$

Inălțimea la care se ridică lichidul pe pereții vasului aflat în mişcare de rotație uniformă este direct proporțională cu pătratul vitezei unghiulare şi cu pătratul razei recipientului.

Forțe de presiune hidrostatică

- Fluidele exercită forțe de presiune asupra contururilor solide (pereții recipienților şi conductelor, corpuri imersate) cu care vin în contact.
- Aceste forțe de presiune se exprimă în funcție de efortul unitar de compresiune P, conform relației:

$$dF_P = \vec{P} dA = P d\vec{A} \quad \text{sau} \quad F_p = \int_A P dA \tag{79}$$

- A este aria suprafeței pe care acționează fluidul.

Forțe de presiune hidrostatică

- Cunoaşterea **forțelor de presiune** $\vec{F}_P$ este necesară în vederea dimensionării din punct de vedere al rezistenței mecanice a utilajelor şi instalațiilor.
- Pentru calculul de rezistență mecanică este necesară cunoaşterea:
  - **valorii** (modulului) forței rezultante de presiune,
  - **orientării** (ca direcție şi ca sens) acesteia,
  - **punctului** **său** **de aplicație**, denumit şi **centru de presiune**.

Forțe de presiune hidrostatică

- **Suprafețe plane**: toate forțele elementare de presiune sunt perpendiculare pe suprafață şi sunt paralelele între ele. Rezultanta lor va avea aceeaşi direcție şi sens, de la fluid către suprafață.
- **Pe suprafețele plane orizontale** (*fundul unui rezervor sau al unui canal*, de ex.) asupra cărora acționează presiunea hidrostatică a unui lichid, presiunile sunt egale pe toată suprafața, iar forța de presiune orizontală este dată de relația:

Forțe de presiune hidrostatică

$$F_{P_0} = \left(P - P_0\right)A = \rho g H A \qquad (80)$$

- în care:
  - P - presiunea exercitată de lichid pe suprafața solidă (Pa);
  - P_0 - presiunea la suprafața lichidului (Pa);
  - H - înălțimea coloanei de lichid deasupra suprafeței solide (m);
  - A - aria suprafeței solide orizontale (m^2).

Forțe de presiune hidrostatică

- În cazul **suprafețelor plane verticale** (*pereții laterali ai unui rezervor prismatic, baraje, deversoare, şicane verticale,* etc.) forțele de presiune sunt variabile pe înălțime, crescând cu creşterea adâncimii.
- Este de preferat ca solicitările provenite din presiunea hidrostatică:

$$P = P_0 + \rho g H \tag{81}$$

- să se separe în:

Forțe de presiune hidrostatică

- o solicitare provenită din acțiunea presiunii P_0 (F_{P1}), de valoare constantă, cu punctul de aplicație în centrul de greutate al ariei suprafeței *A*, solicitare dată de relația:

$$F_{P1} = P_0 \cdot A \tag{82}$$

- o solicitare provenită din acțiunea presiunii piezometrice a lichidului ($P - P_0$), solicitare notată cu F_{P2}, reprezentând rezultanta forțelor elementare de presiune.

Forțe de presiune hidrostatică

- Această rezultantă creşte cu creşterea adâncimii şi are punctul de aplicație în centrul de presiune al suprafeței *A*:

$$F_{P2} = \int_A (P - P_0) dA = \rho g b \int_{H_0=0}^{H} h dh = \frac{1}{2} \rho g b H^2 \quad (83)$$

- în care:
  - b - lățimea suprafeței plane verticale (m);
  - h - înălțimea curentă a suprafeței plane verticale (m);
  - dh - înălțimea diferențială a suprafeței plane verticale (m);
  - H - adâncimea lichidului (m);
  - H_0 - nivelul suprafeței lichidului (m).

Forțe de presiune hidrostatică

- Poziția centrului de presiune *C* (care nu coincide întotdeauna cu poziția centrului de greutate *G* al suprafeței plane, fiind situat mai jos) se defineşte prin coordonatele x_C şi y_C față de axele *Ox*, respectiv *Oy*; acestea se determină egalând sumele momentelor forțelor elementare față de cele două axe cu momentul rezultantei lor, față de aceleaşi axe:

$$F_{P2} \cdot x_C = x \cdot \int_A dF_{P2}$$
$$F_{P2} \cdot y_C = y \cdot \int_A dF_{P2} \qquad (84)$$

Forțe de presiune hidrostatică

- În cazul **suprafețelor plane înclinate** sub un unghi θ față de suprafața liberă a lichidului, solicitarea provenită din acțiunea presiunii P_0 este:

$$F_{P_0} = P_0 \cdot A \qquad (85)$$

- şi are punctul de aplicație în centrul de greutate al suprafeței A,

Forțe de presiune hidrostatică

- Solicitarea provenită din acțiunea presiunii piezometrice ($P - P_0$) este egală cu produsul dintre presiunea din centrul de greutate *G* al suprafeței *A* şi aria acesteia:

$$F_P = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \int_A y dA = \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot A_x = P_G \cdot A \qquad (86)$$

- în care:
  - A_x - momentul static al suprafeței *A* față de axa *Ox*;
  - P_G - presiunea în centrul de greutate al suprafeței *A*.

Forțe de presiune hidrostatică

- Punctul de aplicație al solicitării datorate presiunii piezometrice este centrul de presiune C, ale cărui coordonate sunt:

$$x_C = \frac{I_{xy}}{A_x} \quad ; \quad y_C = \frac{I_x}{A_x} \qquad (87)$$

- în care:
  - I_{xy} - momentul centrifugal al suprafeței A față de axele Ox şi Oy;
  - I_x - momentul de inerție axial al suprafeței A față de axa Ox.

Forțe de presiune hidrostatică

- Dacă suprafața *A* se află în contact cu un gaz având presiunea P, valoarea modulului forței de presiune este:

$$F_P = P \cdot A \qquad (88)$$

- iar centrul de presiune coincide cu centrul de greutate al suprafeței întrucât presiunea se manifestă cu aceeaşi intensitate pe întreaga suprafață, iar greutatea gazului este neglijabilă.

Forțe de presiune hidrostatică

- În cazul **suprafețelor curbe**, forțele de presiune nu pot fi reduse la o rezultantă unică decât în unele cazuri particulare (*suprafețe sferice sau cilindrice*, de ex.).
- Pentru suprafețele curbe care nu admit o rezultantă unică, se reduce sistemul de forțe elementare la un punct convenabil ales şi se obține rezultanta sistemului (forța de presiune) – calculabilă cu relația (79) – şi un cuplu (moment) rezultant.

Forțe de presiune hidrostatică

Plastic Bag vs. Storage Tank